H PRÉPA TOUT EN UN

1[RE] ANNÉE

MATHS

MPSI

- Le cours : connaissances et méthodes
- De nombreux exercices corrigés
- Des extraits de concours

TOUT LE PROGRAMME EN UN SEUL VOLUME !

hachette
SUPÉRIEUR

H PRÉPA TOUT EN UN

1[re] ANNÉE

MATHS

MPSI

Marie ALLANO-CHEVALIER
Ancienne élève de l'École Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses
Professeur en classes préparatoires

Xavier OUDOT
Ancien élève de l'École Polytechnique
Professeur en classes préparatoires

HACHETTE
Supérieur

Crédits photographiques

Couverture : Getty Images/AKIRA INOUE

Page 187 : Bettmann/CORBIS

Toutes les photographies de cet ouvrage proviennent de la photothèque HACHETTE LIVRE.

Composition, mise en page et schémas : Publilog
Maquette intérieure : Véronique Lefèbvre
Maquette de couverture : Guylaine MOI

I.S.B.N. 978-2-0118-1331-2

Avant-propos

En proposant ici réuni en un seul ouvrage le programme de la première année MPSI des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles, nous avons voulu privilégier la simplicité et la concision. Nous avons cherché pour chaque nouvelle notion l'introduction la plus économique et les démonstrations les plus compréhensibles pour le débutant. Ce livre ne se substitue pas au cours oral d'un professeur, mais nous espérons qu'il constituera pour l'étudiant un outil de travail et de référence.

Quelques repères typographiques doivent aider le lecteur :

- tous les mots nouveaux, définis au fil du texte, sont repérés par un fond coloré et sont répertoriés dans l'index.
- les résultats essentiels et les énoncés des théorèmes sont encadrés ; les démonstrations sont clairement identifiées par un filet marginal.
- des **applications** proposent, au fur et à mesure, des situations où sont mises en oeuvre les notions étudiées.
- une **fiche-méthode** résume, en fin de chapitre, les principaux savoir-faire indispensables pour les exercices.
- chaque chapitre comporte un **exercice résolu** qui propose une solution rédigée et commentée d'un exercice classique.
- les **exercices** de chaque chapitre sont accompagnés à la fin du livre d'**indications et réponses** qui peuvent aller, suivant la difficulté, d'une simple réponse numérique à une solution détaillée en passant par le "coup de pouce" souvent nécessaire. Ces éléments de réponse n'ont évidemment d'intérêt que pour le lecteur qui a effectivement cherché l'exercice et qui veut vérifier ses résultats. Ils doivent être lus de façon active, le crayon à la main, et ne sont jamais définitifs : c'est au lecteur de conclure et, s'il le désire, de rédiger complètement sa solution.
- nous avons choisi des **exercices posés aux oraux des concours** lorsque ceux-ci ne portent que sur le programme de Première Année, ce qui est tout de même assez fréquent.

Les nouveaux programmes préconisant l'introduction du calcul formel, nous avons choisi de présenter tout au long de l'ouvrage l'utilisation d'une calculatrice, en repèrant toutes les fonctions relatives aux notions étudiées et les complétant éventuellement par de petits programmes.

Nous remercions tous ceux qui ont bien voulu nous faire bénéficier de leurs remarques et de leurs conseils.

Les auteurs

Sommaire

Partie III : Nombres réels, suites et fonctions

Partie IV : Calcul différentiel et intégral

Partie V : Algèbre linéaire

Partie VI : Espaces vectoriels euclidiens et géométrie euclidienne

Partie VII : Espace $\mathbb{R}^2$ et géométrie différentielle

1 Nombres complexes

INTRODUCTION

Nés de la résolution générale de l'équation du troisième degré par Bombelli (1572) *– voir* Exercice résolu *– les nombres complexes sont longtemps considérés comme de commodes intermédiaires de calcul n'ayant pas d'existence propre. C'est Hamilton en* 1837 *qui donne pour la première fois une construction satisfaisante des nombres complexes à partir des couples de nombres réels.*

L'intérêt majeur du corps des complexes réside dans le théorème de d'Alembert que nous évoquerons dans le chapitre Polynômes *(chapitre 13) : tout polynôme non constant à coefficients complexes possède des racines ! Par ailleurs, les nombres complexes constituent un outil commode en géométrie plane et en trigonométrie.*

OBJECTIFS

- Réviser et enrichir les notions vues en Terminale.
- Préparer le cours d'algèbre en donnant des premiers exemples de structures.
- Préparer le cours d'analyse, où les fonctions pourront être aussi bien à valeurs complexes que réelles.
- Utiliser les nombres complexes pour la trigonométrie.

1 Corps des complexes

1.1 • Définition des nombres complexes

On appelle **ensemble des nombres complexes** et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ que l'on munit des lois de composition interne :

- addition :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C} \quad \forall (x', y') \in \mathbb{C} \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

- multiplication :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C} \quad \forall (x', y') \in \mathbb{C} \quad (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

On peut identifier le complexe $(x, 0)$ au réel x, ce qui revient à considérer $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{C}$; nous constatons que ces deux lois prolongent à $\mathbb{C}$ l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{aligned} &(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \\ &(x, 0) \times (x', 0) = (xx', 0) \end{aligned}$$

Le complexe $(0, 1)$ est tel que $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, nous le notons i.

L'écriture du complexe $z = (x, y)$ devient alors :

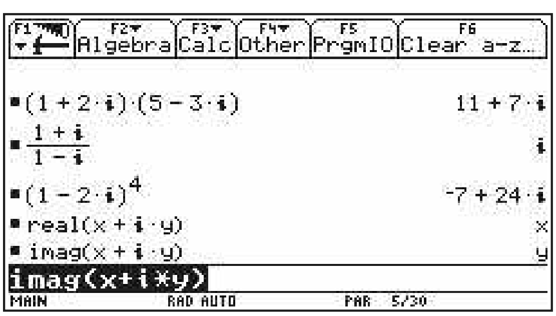
$$z = x + iy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{où} \quad i^2 = -1$$

ATTENTION

La partie imaginaire d'un complexe est un réel.

Par définition, (x, y) est l'unique couple de réels tel que $z = x + iy$:
x est appelé **partie réelle** de z, y est appelé **partie imaginaire** de z.

Notations $x = \mathrm{Re}\,(z)$ $\quad y = \mathrm{Im}\,(z)$.



La TI-92/Voyage 200 sait bien sûr calculer avec les nombres complexes.

Un complexe z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Un complexe z est dit **imaginaire** si sa partie réelle est nulle. L'ensemble des imaginaires est noté $i\mathbb{R}$.

1.2 • Structure de corps de $\mathbb{C}$

La loi $+$ définie sur $\mathbb{C}$ possède les propriétés suivantes :

- elle est **associative** :
  $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3 \quad (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$
- 0 est **élément neutre** de $\mathbb{C}$ pour $+$:
  $\forall z \in \mathbb{C} \quad z + 0 = 0 + z = z$
- tout élément de $\mathbb{C}$ possède un **symétrique** pour $+$:
  $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists z' \in \mathbb{C} \quad z + z' = z' + z = 0$:
  si $z = x + iy$, $z' = -x + i(-y) = -z$

Ces propriétés confèrent à $(\mathbb{C}, +)$ une structure de **groupe**, de plus l'addition est **commutative** sur $\mathbb{C}$.

On dit alors que $(\mathbb{C}, +)$ est un **groupe abélien**.

La loi $\times$ définie sur $\mathbb{C}$ possède les propriétés suivantes :

- elle est **associative** :
  $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3 \quad (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$
- 1 est **élément neutre** de $\mathbb{C}$ pour $\times$:
  $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \times 1 = 1 \times z = z$
- tout élément non nul de $\mathbb{C}$ possède un **symétrique** pour $\times$:
  $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists z' \in \mathbb{C}^* \quad z \times z' = z' \times z = 1$:
  si $z = x + iy,\ z' = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{z}$

$(\mathbb{C}^*, \times)$ est donc un **groupe abélien**, puisque $\times$ est **commutative** sur $\mathbb{C}$.

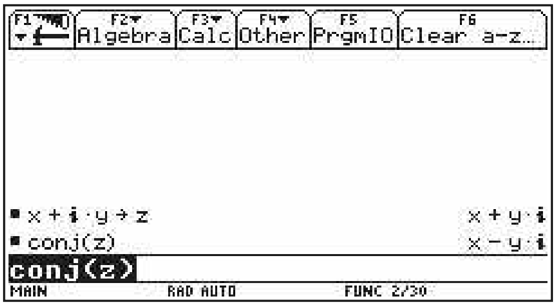
Enfin, $\times$ est **distributive** par rapport à $+$:

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3 \quad (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$$

Ces propriétés confèrent à $(\mathbb{C}, +, \times)$ une structure de **corps commutatif**.

Ces notions seront étudiées de façon plus approfondie dans le chapitre 11 *Structures algébriques usuelles*.

1.3 • Conjugué d'un nombre complexe



Le conjugué de z est noté $\operatorname{conj}(z)$.

On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le complexe :

$$\bar{z} = x - iy$$

Cette application est **involutive** : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{(\bar{z})} = z$, elle est donc bijective.
De plus :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}, \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$$

On en déduit :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{z - z'} = \bar{z} - \overline{z'}$$

et

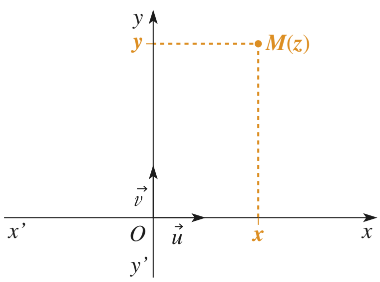
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \overline{nz} = n\bar{z} \quad ; \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

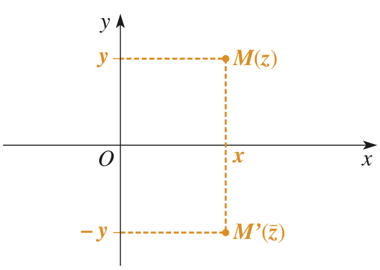
Le conjugué permet d'exprimer facilement la partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe, et donc de caractériser les réels et les imaginaires :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \ ; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff z = \bar{z}\ ; \\ z \in i\mathbb{R} &\iff z = -\bar{z} \end{aligned}$$



Doc. 1 Image d'un nombre complexe.



Doc. 2 Image du conjugué.

1.4 • Interprétation géométrique

On appelle **plan complexe** un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On peut représenter le nombre complexe $z = x + iy$ par le point M de coordonnées (x, y) (*Doc.* 1).

Le point M est appelé **image** de z, et réciproquement z est appelé **affixe** de M.

Si M et M' sont deux points d'affixes z et z', on appelle aussi affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ le complexe $z' - z$.

Les axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$ sont appelés respectivement **axe des réels** et **axe des imaginaires**.

L'image de $\bar{z}$ est symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des réels, en accord avec le caractère involutif de la conjugaison (*Doc.* 2).

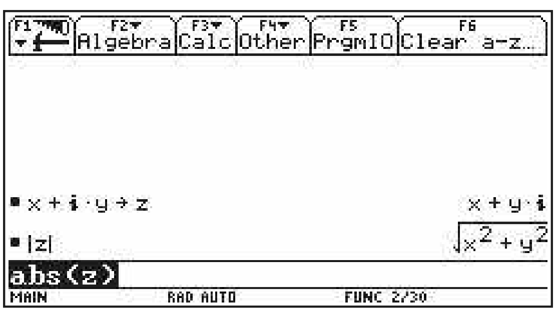
2 Module d'un nombre complexe

2.1 • Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \ : \ z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$$

On appelle **module** de z le réel positif : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.



Le module de z est noté $\text{abs}(z)$.

Si z est réel, son module est aussi sa valeur absolue, c'est pourquoi on emploie la même notation.
Mais attention ! pour un réel x : $|x|^2 = x^2$, tandis que pour un complexe quelconque z, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Théorème 1
Pour tous complexes z et z' :

$$|zz'| = |z|\,|z'|$$

Démonstration
$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |zz'|^2 = (zz')(\overline{zz'}) = (z\bar{z})(z'\overline{z'}) = |z|^2\,|z'|^2$

On en déduit :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad |z^n| = |z|^n$$

2.2 • Inégalité triangulaire

Théorème 2
Pour tous complexes z et z' :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

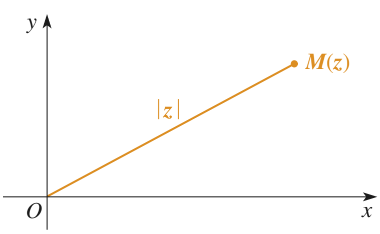
L'égalité est vérifiée si et seulement si $z' = 0$ ou $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration

Les deux membres de l'inégalité à démontrer étant des réels positifs, comparons leurs carrés.

$$\begin{cases} |z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\,\overline{z} + z\,\overline{z'} + z'\,\overline{z} + z'\,\overline{z'} = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\,\overline{z'}) + |z'|^2 \\ (|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z\,\overline{z'}| + |z'|^2 \end{cases}$$

Or $\mathrm{Re}\ (z\,\overline{z'}) \leqslant |z\,\overline{z'}|$. D'où l'inégalité demandée. L'égalité est vérifiée si et seulement si $\mathrm{Re}\ (z\,\overline{z'}) = |z\,\overline{z'}|$, c'est-à-dire $z\,\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$. Cette condition est satisfaite si $z' = 0$, ou (en divisant par $z'\overline{z'}$) si $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.



Doc. 3 Module d'un nombre complexe.

Dans le plan complexe, le module de z représente la distance de l'origine au point M d'affixe z (*Doc.* 3).

Le réel $|z - z'|$ représente la distance entre les points M et M' d'affixes z et z'.

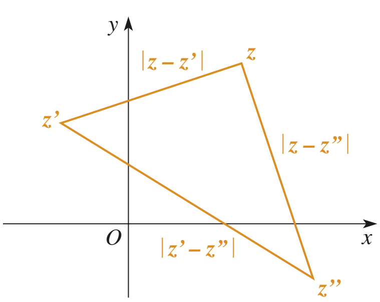
Comme dans le cas réel, on déduit de l'inégalité triangulaire que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \Big| |z| - |z'| \Big| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|$$

et :

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3 \quad |z - z''| \leqslant |z - z'| + |z' - z''|$$

(Cette dernière inégalité représente l'inégalité triangulaire dans le plan complexe (*Doc.* 4).)



Doc. 4 Inegalité triangulaire.

La notion de distance nous permet de définir dans le plan complexe :

- le **disque fermé** de centre a et de rayon R : $\{M \in P, \quad |z - a| \leqslant R\}$ où $R \in \mathbb{R}_+$;
- le **disque ouvert** de centre a et de rayon R : $\{M \in P, \quad |z - a| < R\}$ où $R \in \mathbb{R}_+^*$;
- le **cercle** de centre a et de rayon R : $\{M \in P, \quad |z - a| = R\}$ où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

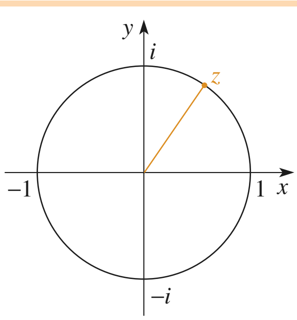
Pour s'entraîner : ex. 2 à 7

3 Représentation des nombres complexes de module 1

3.1 • Groupe U des nombres complexes de module 1

L'ensemble U des nombres complexes de module 1, muni du produit défini sur $\mathbb{C}$ est un groupe, on dit que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ (voir chapitre 11) :

- $\forall (z, z') \in U^2 \quad |zz'| = |z|.|z'| = 1$, la loi multiplicative est bien une loi de composition interne sur U.
- Elle est associative sur $\mathbb{C}$, donc en particulier sur U.
- Elle possède un élément neutre : le réel 1, qui appartient à U.
- Enfin, tout élément z de U est non nul, donc possède un inverse dans $\mathbb{C}^*$: $z' = \dfrac{1}{z}$ tel que $|z'| = \dfrac{1}{|z|} = 1$, ce qui prouve que $z' \in U$.



Doc. 5 Cercle trigonométrique.

$|z| = 1 \iff OM = 1$: l'ensemble des points M du plan d'affixe $z \in U$ est le cercle de centre O de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique** (*Doc.* 5).

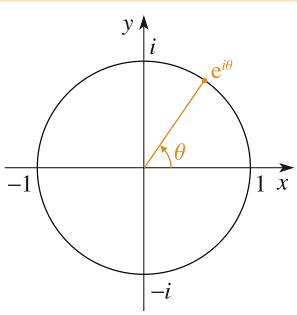
3.2 • Définition de $e^{i\theta}$

Théorème 3
Un complexe z est élément de U si et seulement s'il peut s'écrire :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Attention, cette écriture n'est pas unique.

Démonstration
Pour tout réel θ, $|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$: $\cos\theta + i\sin\theta \in U$.
Réciproquement, soit $z = x + iy$ un élément de U.
Comme $x^2 + y^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$, on peut donc écrire $z = \cos\theta + i\sin\theta$.
Attention, θ n'est pas unique : $\cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta' + i\sin\theta'$ équivaut à $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$, c'est-à-dire à $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$.



Doc. 6 Représentation d'un nombre complexe de module 1

Désignons par φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
Les fonctions cos et sin sont dérivables, ce qui entraîne que φ l'est aussi et :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \varphi'(\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)' = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

soit :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \varphi'(\theta) = i\varphi(\theta)$$

Par analogie avec les fonctions réelles d'une variable réelle $t \mapsto e^{\lambda t}$, on note, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\theta) = e^{i\theta}$, soit (*Doc.* 6) :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

Ainsi :

$$|u| = 1 \iff \exists\theta \in \mathbb{R} \quad u = e^{i\theta}$$

RAPPEL : FORMULES D'ADDITION
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

3.3 • Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{i\theta}$, d'où :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

3.4 • Propriété de l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$

Théorème 4

$$\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 \quad e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

Démonstration
$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= e^{i(\theta+\theta')} \end{aligned}$$

De même :

$$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ et $(e^{i\theta})^{-n} = e^{-in\theta}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

c'est-à-dire :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

C'est la formule de Moivre.

ATTENTION

La formule de Moivre n'a de sens que si n **est entier**. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, l'égalité $(e^{2i\pi})^{\theta/2\pi} = e^{i\theta}$ est un non-sens : elle conduirait à $e^{i\theta} = 1$.

3.5 • Exponentielle complexe

Plus généralement, on peut étendre à $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle : on appelle **exponentielle complexe** l'application définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à $z = x + iy$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, associe :

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

On remarque que le module de e^z est e^x : $\quad \forall z \in \mathbb{C} \ |e^z| = e^{\mathrm{Re}\,(z)}$.

Théorème 5

$$\forall(z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

Démonstration
Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$:

$$e^{z+z'} = e^{x+x'}e^{i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^z e^{z'}$$

On montre de même que :

$$\forall(z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

et :

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad (e^z)^n = e^{nz}$$

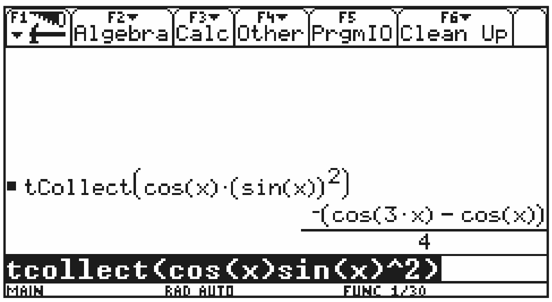
Attention : Tout complexe non nul peut s'écrire e^z, mais un tel z n'est pas unique : il n'existe pas d'application réciproque de $z \mapsto e^z$ définie sur $\mathbb{C}^*$:

$$e^z = \rho e^{i\alpha} \iff z = \ln\rho + i\alpha + 2ik\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

4 Applications à la trigonométrie

4.1 • Linéarisation et factorisation d'expressions trigonométriques

Un **polynôme trigonométrique** est une combinaison linéaire d'expressions de la forme $\cos^m x \sin^n x$, où $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.
Les formules d'Euler permettent de le transformer en un polynôme des variables e^{ix} et e^{-ix}. Après développement, en regroupant les termes conjugués, on obtient une combinaison linaire de $\cos px$ et $\sin qx$.



Exemple : Linéariser $\cos x \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
\cos x \sin^2 x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\
&= -\frac{1}{8}(e^{3ix} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
&= -\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x)
\end{aligned}$$

4.2 • Transformations de produits en sommes et vice versa

Des formules d'addition on peut déduire les formules suivantes :

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin a \sin b = -\dfrac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

En posant $a + b = p$, $a - b = q$, on obtient les formules inverses :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

4.3 • Calcul de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

D'après la formule de Moivre, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$$

En développant le premier membre de cette égalité par la formule du binôme, et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient $\cos nx$ et $\sin nx$.

Exemple : Calcul de $\cos 5x$ et $\sin 5x$.

$$\begin{aligned} e^{5ix} &= (\cos x + i \sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x - 10 \cos^3 x \sin^2 x \\ &\qquad - 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x \\ \sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}$$

Remarque : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\cos nx$ *est un polynôme en* $\cos x$.
Si n *est impair,* $\sin nx$ *est un polynôme en* $\sin x$, *si* n *est pair,* $\sin nx$ *est le produit de* $\cos x$ *par un polynôme en* $\sin x$.

Exemple :

$$\begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x(1 - \cos^2 x)^2 \\ \sin 5x = 5(1 - \sin^2 x)^4 \sin x - 10(1 - \sin^2 x) \sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

4.4 • Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$

Ce sont la partie réelle et la partie imaginaire de la somme complexe :

$$S = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)}$$

On reconnaît la somme de $(n + 1)$ termes d'une suite géométrique de premier terme e^{ia} et de raison e^{ib}.

- Si $b \in 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ib} = 1$ et $S = (n + 1)e^{ia}$;
- si $b \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $S = e^{ia} \dfrac{1 - e^{i(n+1)b}}{1 - e^{ib}}$.

Dans ce cas, mettons $e^{i(\frac{n+1}{2})b}$ en facteur au numérateur et $e^{i\frac{b}{2}}$ en facteur au dénominateur :

$$S = e^{ia} \frac{e^{i(\frac{n+1}{2})b}(e^{-i(\frac{n+1}{2})b} - e^{i(\frac{n+1}{2})b})}{e^{i\frac{b}{2}}(e^{-i\frac{b}{2}} - e^{i\frac{b}{2}})} = e^{i(a+\frac{nb}{2})} \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb) = \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

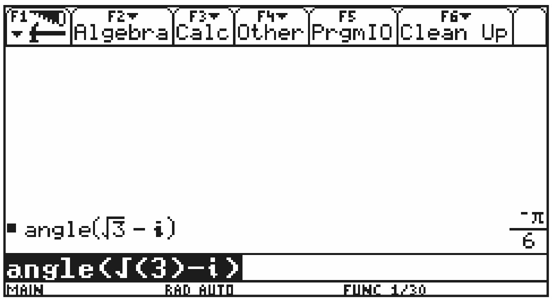
et :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb) = \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

Pour s'entraîner : ex. 8

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

5.1 • Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

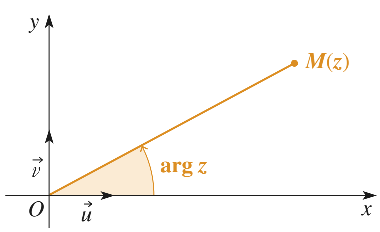


Soit $z \in \mathbb{C}^*$; le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ appartient à U. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{i\theta}$, c'est-à-dire :

$$z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z ; le réel θ est un **argument** de z noté $\arg(z)$.
L'ensemble des arguments de z est $\{\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

5.2 • Propriétés des arguments



Doc. 7 Argument d'un nombre complexe.

Dans le plan complexe orienté, un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, où M est l'image de z (*Doc.* 7).

On déduit de $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$:

$$\begin{array}{lrcl}
\forall(z,z') \in \mathbb{C}^2 & \arg(zz') & = & \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi] \\
\forall(z,z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^* & \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) & = & \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi] \\
\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z} & \arg(z^n) & = & n\arg(z) \quad [2\pi]
\end{array}$$

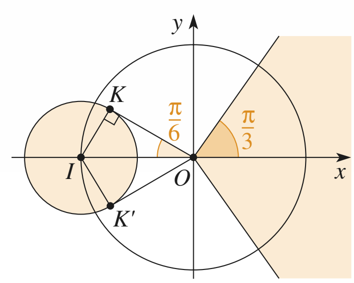
APPLICATION 1

Distances et angles dans le plan complexe

1) *Soit z un complexe tel que $|1+z| < \dfrac{1}{2}$. Montrer que $|1+z^2| > 1$.*

2) *Soit z un complexe de module 1 tel que $|1+z| < 1$. Montrer que $|1+z^2| > 1$.*

3) *Soit z_1 et z_2 deux complexes de même module supérieur à 1. Montrer que $|z_1+z_2| \geqslant 1$ ou $|z_1^2+z_2^2| \geqslant 1$.*

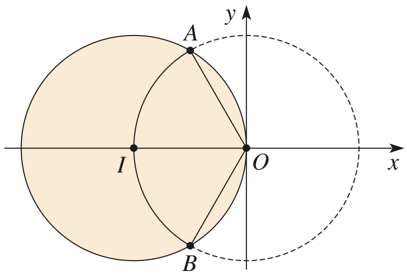


Doc. 8

1) Soit I le point d'affixe -1, M et M' les points d'affixes respectives z et z^2. M appartient au disque ouvert de centre I de rayon $\dfrac{1}{2}$. Soit K et K' les points de contact des tangentes issues de O au cercle de centre I de rayon $\dfrac{1}{2}$ (*Doc.* 8).
Le triangle (OIK) est un demi-triangle équilatéral, donc $\widehat{IOK} = \dfrac{\pi}{6}$.

On en déduit que $\arg z \in \left]\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right[\ [2\pi]$, d'où $\arg z^2 \in \left]\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}\right[\ [2\pi]$. Le point M' appartient donc à un secteur angulaire inclus dans le demi-plan $x > 0$. La distance IM' reste donc strictement supérieure à 1 : $|1+z^2| > 1$.

2) Ici, les points M et M' appartiennent au cercle de centre O de rayon 1.



Doc. 9

M appartient au petit arc de cercle $\widehat{AB}$ inclus dans le disque ouvert de centre I de rayon 1 (*Doc.* 9).

On en déduit $\arg z \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[\quad [2\pi]$,

d'où $\arg z^2 \in \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right[\quad [2\pi]$.

Le point M' appartient au grand arc de cercle $\widehat{AB}$. La distance IM' reste donc strictement supérieure à 1 : $|1 + z^2| > 1$.

3) On pose $u = \frac{z_1}{z_2}$, on a donc $|u| = 1$. En appliquant à u le résultat de la question **2)**, on sait que :

$$|1 + u| \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad |1 + u^2| \geqslant 1$$

c'est-à-dire :

$$\left|1 + \frac{z_1}{z_2}\right| \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad \left|1 + \frac{z_1^2}{z_2^2}\right| \geqslant 1$$

d'où :

$$|z_2 + z_1| \geqslant |z_2| \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad |z_2^2 + z_1^2| \geqslant |z_2^2| \geqslant 1$$

5.3 • Réduction de $a\cos x + b\sin x$ où $(a, b, x) \in \mathbb{R}^3$

Posons : $z = a + ib$.

$$\begin{aligned} \bar{z}\,\mathrm{e}^{ix} &= (a - ib)(\cos x + i\sin x) \\ &= a\cos x + b\sin x + i(a\sin x - b\cos x) \end{aligned}$$

donc :

$$a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\,(\bar{z}\,\mathrm{e}^{ix})$$

Écrivons z sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} z &= r\,\mathrm{e}^{i\varphi} \\ \bar{z}\mathrm{e}^{ix} &= r\mathrm{e}^{i(x-\varphi)} \end{aligned}$$

d'où :

$$a\cos x + b\sin x = r\cos(x - \varphi) \quad \text{où} \quad r\mathrm{e}^{i\varphi} = a + ib$$

Exemple :

Résolvons l'équation : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

Ici : $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$.

L'équation devient : $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$.

$$\text{D'où :} \left\{\begin{aligned} x - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ x - \frac{\pi}{3} &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}\right. \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Pour s'entraîner : ex. 9 et 10

6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

6.1 • Racines n-ièmes de l'unité

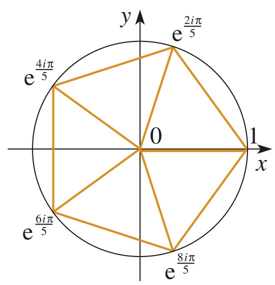
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvons l'équation $z^n = 1$. Cherchons une solution sous la forme trigonométrique $z = |z|e^{i\theta}$.

$$z^n = 1 \iff |z|^n e^{in\theta} = 1 \iff \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} , \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Doc. 10 Racines 5-ième de l'unité.

Notons que $(\mathcal{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{U}, \times)$ (voir chapitre 11). On obtient tous ses éléments en donnant à k, n valeurs consécutives (par exemple, $k \in [\![0, n-1]\!]$).

Dans le plan complexe, les images des éléments de $\mathcal{U}_n$ forment un polygone régulier à n côtés (si $n \geqslant 3$) (*Doc.* 10).

La somme des éléments de $\mathcal{U}_n$ est nulle (somme des termes d'une suite géométrique) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$$

Exemple : Racines cubiques de l'unité. Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
$\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

6.2 • Racines n-ièmes d'un nombre complexe quelconque

Soit Z un nombre complexe quelconque et $n \in \mathbb{N}^*$.
Résolvons l'équation $z^n = Z$.

- Si $Z = 0$, il y a une solution unique : $z = 0$.
- Si $Z \neq 0$, cherchons les solutions sous la forme trigonométrique $z = |z|e^{i\theta}$.

Posons $Z = |z|\, e^{i\alpha}$

$$z^n = Z \iff |z|^n e^{in\theta} = |Z| e^{i\alpha} \iff \begin{cases} |z|^n = |Z| \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

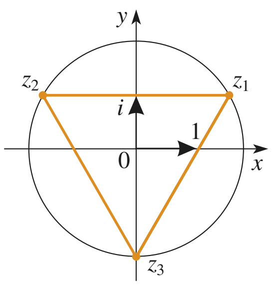
$$\iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z^n = Z \iff z = \sqrt[n]{|Z|}\, e^{\frac{i\alpha}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Tout nombre complexe non nul a donc n racines n-ièmes distinctes, qui se déduisent de l'une d'entre elles en la multipliant par un élément quelconque du groupe $\mathcal{U}_n$. Leur somme est nulle.

Exemple : $z^3 = 8i \iff \begin{cases} |z| = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$

$z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2e^{\frac{3i\pi}{2}} = -2i$ (*Doc.* 11).



Doc. 11 Racines cubiques de $8i$.

6.3 • Cas des racines carrées

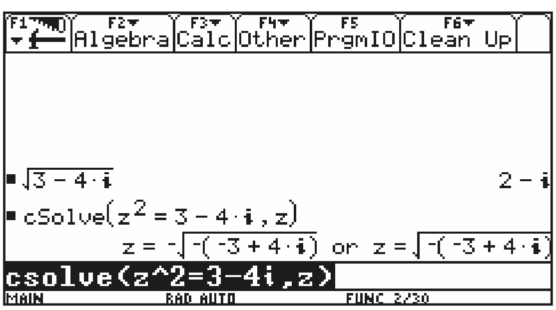
Tout nombre complexe non nul Z possède donc deux racines carrées opposées. Leur calcul effectif à l'aide de la méthode précédente n'est possible que si l'on peut écrire facilement Z sous la forme trigonométrique, ce qui est rare. La méthode suivante a l'avantage d'être plus systématique.

Posons $Z = X + iY$, avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, et cherchons $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 = Z$.

$$z^2 = Z \iff x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = X & \textbf{(1)} \\ 2xy = Y & \textbf{(2)} \end{cases}$$

De plus : $|z|^2 = |Z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$ **(3)**

Les relations **(1)** et **(3)** donnent x et y au signe près. La relation **(2)** permet d'apparier les signes de x et de y.



Attention : la fonction racine carrée de la calculatrice ne donne qu'une solution. On peut utiliser `cSolve` pour obtenir les deux racines.

Exemple : Calculons les racines carrées de $Z = 3 - 4i$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \text{ et } y = -1 \\ \text{ou} \\ x = -2 \text{ et } y = 1 \end{cases}$$

Les racines carrées cherchées sont donc :

$$z_1 = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 + i$$

6.4 • Équation du second degré

Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$. On peut écrire le trinôme sous la forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

L'équation équivaut donc à :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution : $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, le nombre complexe Δ a deux racines carrées δ et $-\delta$; l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

Les formules sont les mêmes que celles qui donnent les solutions d'une équation du second degré à coefficients réels ; mais le calcul des racines carrées du discriminant constitue une étape supplémentaire.

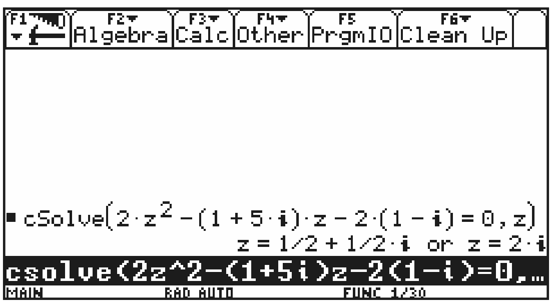
Exemple : Résolvons l'équation $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$.

$$\Delta = (1+5i)^2 + 16(1-i) = -8-6i$$

$$\text{Cherchons } \delta = x+iy \text{ tel que } \delta^2 = \Delta$$

$$(x+iy)^2 = -8-6i \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 10 \\ x^2-y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

D'où $\delta = 1-3i$ ou $\delta = -1+3i$.



Les solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{1+5i+(1-3i)}{4} = \frac{1+i}{2} \qquad z_2 = \frac{1+5i-(1-3i)}{4} = 2i$$

Comme dans le cas réel, on peut exprimer la somme et le produit des racines du polynôme az^2+bz+c en fonction des coefficients :

$$z_1+z_2 = -\frac{b}{a} \quad ; \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Réciproquement, deux nombres complexes dont la somme est S et le produit P sont les racines, distinctes ou non, du polynôme $z^2 - Sz + P$.

Pour s'entraîner : ex. 11 à 18

7 Nombres complexes et géométrie plane

7.1 • Configuration de trois points

Soit A, B et M trois points du plan complexe, distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b et z. Considérons le complexe $Z = \dfrac{z-a}{z-b}$:

$$\begin{cases} |Z| = \dfrac{|z-a|}{|z-b|} = \dfrac{AM}{BM} \\ \arg(Z) = \arg(z-a) - \arg(z-b) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \quad [2\pi] \end{cases}$$

Ainsi, le nombre $\dfrac{z-a}{z-b}$ caractérise la position de M par rapport à A et B. Par exemple :

- ABM est un triangle équilatéral $\iff \dfrac{z-a}{z-b} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$;
- ABM est un triangle isocèle rectangle en M $\iff \dfrac{z-a}{z-b} = \pm i$;

Pour s'entraîner : ex. 19 à 23

7.2 • Transformations du plan complexe

Soit $z \mapsto z' = f(z)$ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$; nous pouvons lui associer une application $\widetilde{f}$ du plan complexe P qui au point M d'affixe z fait correspondre M' d'affixe z'. Nous allons interpréter géométriquement $\widetilde{f}$, dans quelques cas particuliers :

- $z \mapsto \overline{z}$
  L'application $\widetilde{f}$ est la symétrie orthogonale s par rapport à l'axe réel. Rappelons que cette application est involutive.

- $z \mapsto az, \quad a \in \mathbb{C}^*$
  Si $a = 1$, $\widetilde{f} = \mathrm{Id}_P$, sinon l'origine est le seul point invariant par $\widetilde{f}$.
  Notons $a = \rho e^{i\alpha}$, alors si $z \neq 0$, $z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow z' = \rho|z|e^{i(\theta+\alpha)}$, c'est-à-dire :

$$OM' = \rho OM \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \quad [2\pi]$$

  L'application $\widetilde{f}$ est donc la composée commutative de la rotation de centre O et d'angle α et de l'homothétie de centre O et de rapport ρ ; c'est une similitude directe.
  $\widetilde{f}$ est bijective ; sa réciproque est la composée commutative de la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\rho}$.

- $z \mapsto az + b, \quad (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$
  Cherchons tout d'abord si cette application possède des points fixes :

$$z = az + b \iff z(1 - a) = b$$

  – si $a = 1$, f ne possède pas d'invariant, l'application $\widetilde{f}$ associée à $z \mapsto z + b$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$, d'affixe b, dont la réciproque est la translation de vecteur $-\overrightarrow{V}$;

  – si $a \neq 1$, f possède un unique invariant, $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$, alors

$$z' = az + b \iff z' - z_0 = a(z - z_0)$$

  Soit Ω d'affixe z_0 ; nous sommes ramenés à l'exemple précédent : $\widetilde{f}$ est la composée commutative de la rotation de centre Ω et d'angle α et de l'homothétie de centre Ω et de rapport ρ. Sa réciproque est la composée commutative de la rotation de centre Ω et d'angle $-\alpha$ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{\rho}$.

  Dans tous les cas, $\widetilde{f}$ est une similitude directe. Réciproquement, toute similitude directe, translation ou composée rotation-homothétie, est associée à une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$.

- $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ $\;f$ est définie sur $\mathbb{C}^*$, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, il est immédiat que cette application est involutive.
  Notons $z = |z|e^{i\theta}$; alors : $z' = \dfrac{1}{|z|}e^{-i\theta}$, c'est-à-dire :

$$OM' = \frac{1}{OM} \quad \text{et} \quad \frac{1}{OM'}\overrightarrow{OM'} = s\left(\frac{1}{OM}\overrightarrow{OM}\right)$$

  où s est la symétrie par rapport à l'axe des réels.

APPLICATION 2

Étude de l'inversion

Soit I l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par $I(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$. On note encore I l'application correspondante du plan complexe, appelée ***inversion****.*

1) *Vérifier que l'inversion est une involution du plan P privé de O dans lui-même.*

2) *Déterminer l'image par I :*

- *d'une droite passant par O, privée de O ;*
- *d'une droite ne passant pas par O ;*
- *d'un cercle passant par O, privé de O ;*
- *d'un cercle ne passant pas par O.*

3) *Soit $M' = I(M)$ et $N' = I(N)$, montrer que :*

$$M'N' = \frac{MN}{OM.ON}$$

4) *Soit A, B, C, D quatre points cocycliques distincts. En considérant une inversion de pôle A, montrer que l'une des égalités suivantes est vérifiée :*

$$\left\{\begin{array}{lrcl} & BC.AD + CD.AB & = & BD.AC \\ ou & BC.AD + BD.AC & = & CD.AB \\ ou & CD.AB + BD.AC & = & BC.AD \end{array}\right.$$

Étudier la réciproque.

1) Pour tout $M \neq O$, $I(M) = M'$ tel que :

O, M et M' sont sur la même demi-droite issue de O et $OM.OM' = 1$.

Ce qui prouve immédiatement que l'image par I de M' est M : l'inversion est une involution du plan P privé de O dans lui-même.

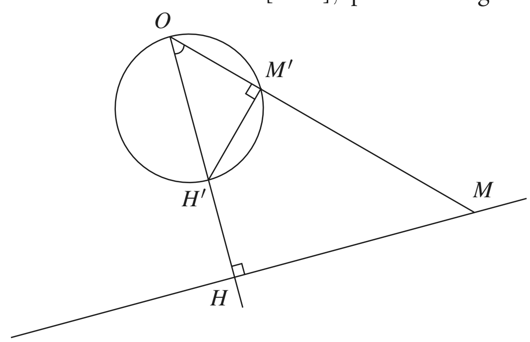
2) Image par I :

- D'une droite D passant par O, privée de O
D'après la remarque précédente, l'image de D est D', incluse dans D, si D' était strictement incluse dans D, on aurait $I(D')$ strictement incluse dans D, ce qui est absurde puisque $I \circ I(D) = D$.

- D'une droite ne passant pas par O
Soit D une telle droite, considérons H projection orthogonale de O sur D et H' image de H par I. Soit alors M un point de D et M' son image (*Doc.* 12). Nous avons :

$$1 = OH.OH' = OM.OM' \iff \frac{OM'}{OH'} = \frac{OH}{OM}$$

et par alignement des points O, H, H' d'une part, O, M, M' d'autre part, $(OH, OM) = (OM', OH')$, les triangles OHM et $OM'H'$ sont donc semblables, ce qui prouve que l'angle $OM'H'$ est droit : l'image de D est incluse dans le cercle C de diamètre $[OH']$, privé de l'origine.



Doc. 12

Réciproquement, soit N un point de ce cercle autre que O, la droite (ON) coupe D en N'. Les deux triangles rectangles ONH' et OHN' ont en commun l'angle $\widehat{O}$, ils sont donc semblables, ce qui prouve que :

$$\frac{ON}{OH'} = \frac{OH}{ON'} \iff 1 = OH.OH' = ON.ON'$$

$N' = I(N) \iff N = I(N')$.
L'image de $D \setminus \{O\}$ est donc $C \setminus \{O\}$.

- D'un cercle passant par O, privé de O
D'après l'étude précédente l'image de $C \setminus \{O\}$, où C est un cercle passant par O, dont un diamètre est OH', est la droite perpendiculaire en $H = I(H')$ à ce diamètre.

- D'un cercle ne passant pas par O
Soit un tel cercle C, d'équation cartésienne :

$$(E) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad c \neq 0$$

Soit M un point de ce cercle et $M' = I(M)$, donc $M = I(M')$, nous avons donc :

$$(x, y) = \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

$M \in C$ si et seulement si ses composantes x, y vérifient (E), c'est-à-dire si et seulement si :

$$x'^2 + y'^2 - 2ax'(x'^2 + y'^2) - 2ay'(x'^2 + y'^2) + c(x'^2 + y'^2)^2 = 0$$

Soit, en simplifiant par $c(x'^2 + y'^2)$, qui n'est pas nul :

$$x'^2 + y'^2 - 2\frac{a}{c}x' - 2\frac{b}{c}y' + \frac{1}{c} = 0$$

M' décrit donc un cercle C', ne passant pas par O.
Remarquons que le centre du cercle image C' n'est pas en général l'image du centre du cercle C.

3) Soit $M' = I(M)$ et $N' = I(N)$, montrons que :

$$M'N' = \frac{MN}{OM.ON}$$

Pour ce calcul, choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{\imath}, \quad a > 0$, d'où

$$OM' = \frac{1}{a}\vec{\imath}.$$

$N = (x, y)$, d'où :

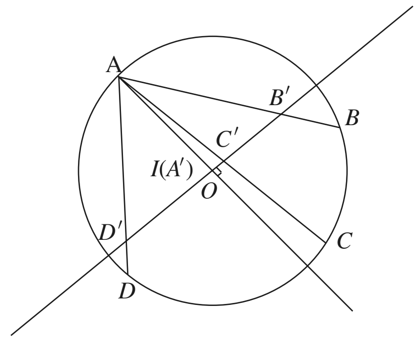
$$N' = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
(M'N')^2 &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{a^2(x^2 + y^2)^2}(a^2x^2 - 2ax(x^2 + y^2) \\
&\qquad + (x^2 + y^2)^2 + a^2y^2) \\
&= \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{a^2(x^2 + y^2)} \\
&= \frac{(x - a)^2 + y^2}{a^2(x^2 + y^2)} \\
&= \frac{MN^2}{OM^2.ON^2}
\end{aligned}$$

4) Soit A, B, C, D quatre points cocycliques distincts. Supposons que C est entre les points B et D ; et notons B', C' et D' les images par I, inversion de pôle A, de ces points : B', C' et D' sont alignés et C' est entre B' et D' (*Doc.* 13), nous avons donc : $B'D' = B'C' + C'D'$, ce qui se traduit à l'aide de la question **3)** par :

$$\frac{BD}{AB.AD} = \frac{BC}{AC.AB} + \frac{CD}{AC.AD}$$



Doc. 13

Soit, en réduisant au même dénominateur :

$$BC.AD + CD.AB = BD.AC$$

Les deux autres égalités proposées correspondent aux autres dispositions relatives des points B, C et D.

Réciproquement, si l'une des trois égalités est vérifiée, les points B', C' et D' sont alignés.
Considérons alors leurs images B, C et D, directes ou réciproques par une inversion de pôle A.

- si A n'est pas un point de la droite (B', C'), l'image de cette droite est un cercle passant par A, ce qui signifie que A, B, C et D sont cocycliques ;
- Si $A \in (B', C')$, cette droite est invariante par I, A, B, C et D sont alignés.

Quatre points du plan sont donc alignés ou cocycliques si et seulement s'ils vérifient l'une des trois conditions proposées, c'est le **théorème de Ptolémée**.

MÉTHODE

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel, on peut :

- montrer que sa partie imaginaire est nulle ;
- montrer qu'il est égal à son conjugué ;
- montrer qu'il est nul ou que son argument est 0 modulo π.

Pour montrer qu'un nombre complexe est imaginaire pur, on peut :

- montrer que sa partie réelle est nulle ;
- montrer qu'il est égal à l'opposé de son conjugué ;
- montrer qu'il est nul ou que son argument est $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Pour calculer une puissance d'un nombre complexe :
le mettre sous la forme trigonométrique.

Pour calculer une somme de cosinus, respectivement une somme de sinus :
reconnaître la partie réelle, respectivement la partie imaginaire, de la somme des termes d'une suite géométrique complexe.

Pour écrire $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ sous la forme $r\,e^{i\alpha}$, avec $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, on peut

factoriser par $e^{i\frac{\theta}{2}}$:

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Exercice résolu

ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ, MÉTHODE DE TARTAGLIA

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$: ***(1)*** $\quad z^3 + pz + q = 0$, *où* $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

1 *Si z est solution de **(1)**, on cherche deux complexes u et v tels que $u + v = z$ et $uv = -\dfrac{p}{3}$.*
*Montrer que u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré **(2)**.*

2 *En déduire la résolution de l'équation **(1)** dans $\mathbb{C}$.*

3 *Discuter selon les valeurs de p et q le nombre de solutions réelles de l'équation **(1)**.*

4 *Exemples : Résoudre dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ les équations :*

$$z^3 - 12z - 65 = 0, \quad z^3 - 12z - 16 = 0 \quad \textit{et} \quad z^3 - 6z + 4 = 0$$

Conseils

Deux nombres complexes de somme S et de produit P sont les racines du polynôme $X^2 - SX + P$.

Si u est une racine cubique de U, les deux autres racines cubiques de U sont $u\,\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $u\,\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Apparier les solutions en u et v de sorte que uv soit réel.

Les racines cubiques de $\overline{U}$ sont $\overline{u_0}$, $\overline{u_0}\,j$ et $\overline{u_0}\,\bar{j}$.

Solution

1) Soit u et v deux complexes tels que $uv = -\dfrac{p}{3}$. Le complexe $u+v$ est solution de **(1)** si et seulement si :

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

c'est-à-dire $\quad u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0,\quad$ d'où :

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{et} \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

u^3 et v^3 sont donc les solutions de l'équation du second degré :

$$\textbf{(2)} \qquad X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

dont le discriminant est réel :

$$\Delta = \frac{1}{27}(4p^3 + 27q^2)$$

2) ■ Si $\Delta > 0$, l'équation **(2)** a deux solutions réelles distinctes (U, V).

$$\begin{cases} u^3 = U \\ v^3 = V \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} u \in \{\sqrt[3]{U}, \sqrt[3]{U}\,j, \sqrt[3]{U}\,\bar{j}\} \\ v \in \{\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}\,j, \sqrt[3]{V}\,\bar{j}\} \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où : $\quad (u,v) \in \{(\sqrt[3]{U}, \sqrt[3]{V}), (\sqrt[3]{U}\,j, \sqrt[3]{V}\,\bar{j}), (\sqrt[3]{U}\,\bar{j}, \sqrt[3]{V}\,j)\}$

L'équation **(1)** a donc une solution réelle $z_0 = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$ et deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \sqrt[3]{U}\,j + \sqrt[3]{V}\,\bar{j} \quad \text{et} \quad \overline{z_1} = \sqrt[3]{U}\,\bar{j} + \sqrt[3]{V}\,j$$

■ Si $\Delta = 0$, l'équation **(2)** a une racine double réelle $U = -\dfrac{q}{2}$

$$\begin{cases} u^3 = U \\ v^3 = V \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} u \in \left\{\sqrt[3]{U}, \sqrt[3]{U}\,j, \sqrt[3]{U}\,\bar{j}\right\} \\ v \in \left\{\sqrt[3]{U}, \sqrt[3]{U}\,j, \sqrt[3]{U}\,\bar{j}\right\} \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où : $\quad (u,v) \in \{(\sqrt[3]{U}, \sqrt[3]{U}), (\sqrt[3]{U}\,j, \sqrt[3]{U}\,\bar{j}), (\sqrt[3]{U}\,\bar{j}, \sqrt[3]{U}\,j)\}$

L'équation **(2)** a donc deux solutions réelles : $z_0 = 2\sqrt[3]{U}$ et $z_1 = -\sqrt[3]{U}$

■ Si $\Delta < 0$, l'équation **(2)** a deux solutions complexes conjuguées $(U, \overline{U})$. Soit u_0, $u_0\,j$ et $u_0\,\bar{j}$ les trois racines cubiques de U.

$$(u,v) \in \{(u_0, \overline{u_0}), (u_0\,j, \overline{u_0}\,\bar{j}), (u_0\,\bar{j}, \overline{u_0}\,j)\}$$

L'équation **(1)** a trois solutions réelles : $z_0 = 2\mathrm{Re}\,(u_0)$, $\quad z_1 = 2\mathrm{Re}\,(u_0\,j)$ et $z_2 = 2\mathrm{Re}\,(u_0\,\bar{j})$.

3) En résumé, l'équation **(1)** a une solution réelle simple, deux solutions réelles dont une double (voire triple) ou trois solutions réelles distinctes suivant que $4p^3+27q^2$ est strictement positif, nul ou strictement négatif. On peut retrouver ces résultats par l'étude des variations de la fonction $f : x \mapsto x^3+px+q$. L'équation $f(x)=0$ a au moins une solution réelle, car f est continue et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3x^2+p$. Si $p \geqslant 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il y a une seule solution réelle (simple ou triple). Si $p<0$, les variations de f sont les suivantes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

avec $\alpha = q-\sqrt{-\dfrac{4p^3}{27}}$ et $\beta = q+\sqrt{-\dfrac{4p^3}{27}}$ d'où $\alpha\beta = \dfrac{4p^3+27q^2}{27}$.

Appliquer le théorème :
« Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I dans $f(I)$ »
successivement aux intervalles :

$\left]-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$, $\left[-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$

et $\left[\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right[$.

Il y a trois solutions réelles si et seulement si $\alpha\beta<0$, c'est-à-dire $4p^3+27q^2<0$;

Il y a deux solutions réelles dont une double si et seulement si $\alpha\beta>0$, c'est-à-dire $4p^3+27q^2=0$;

Il y a une solution réelle simple si et seulement si $\alpha\beta>0$, c'est-à-dire $4p^3+27q^2>0$.

4) *Exemples :*

■ $z^3-12z-65=0$

$$u^3v^3=64\,,\quad u^3+v^3=65\,;\quad \text{d'où}\quad u^3=1,\quad v^3=64$$

$$u\in\{1,j,\bar{j}\}\quad v\in\{4,4j,4\bar{j}\}\quad uv\in\mathbb{R}$$

L'équation a une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées :

$$S=\left\{5, \frac{-5-3\sqrt{3}\,i}{2}, \frac{-5+3\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$$

■ $z^3-12z-16=0$

$$u^3v^3=64\,,\quad u^3+v^3=16\,;\quad \text{d'où}\quad u^3=v^3=8$$

$$(u,v)\in\{2,2j,2\bar{j}\}^2\quad uv\in\mathbb{R}$$

L'équation a deux solutions réelles : $S=\{4,-2\}$.

■ $z^3-6z+4=0$

$$u^3v^3=8,\quad u^3+v^3=-4\quad \text{d'où}\quad u^3=-2+2i=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad v^3=\overline{u}^3$$

$$u\in\left\{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}\quad v\in\left\{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}\,e^{-i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2}\,e^{-i\frac{19\pi}{12}}\right\}$$

$$uv\in\mathbb{R}$$

L'équation a trois solutions réelles : $S=\{2,-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}\}$.

Complément : Pour résoudre une équation du troisième degré quelconque $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, on peut toujours se ramener à la forme $Z^3 + pZ + q = 0$ en posant $Z = z + \frac{a}{3}$ afin d'éliminer les termes en z^2.

Exemple : Résoudre l'équation : $z^3 + 12z^2 + 42z + 44 = 0$.
Cette équation équivaut à $(z+4)^3 - 6(z+4) + 4 = 0$. On est ramené au troisième exemple ci-dessus. D'où $S = \{-2, -5 - \sqrt{3}, -5 + \sqrt{3}\}$.

Note historique

Nicolo Tartaglia (1500-1557) découvrit, vers 1540, une merveilleuse méthode de résolution algébrique d'équations du troisième degré. Lors d'un défi l'opposant à Antonio Maria Fior, qui l'accusait de l'avoir plagié, Tartaglia résolut trente équations proposées par Fior, alors que ce dernier ne put en résoudre une seule de Tartaglia. Invité par Jérôme Cardan qui lui proposait de financer ses recherches, Tartaglia commit l'imprudence de lui confier son secret. Cardan s'empressa de le publier sous son nom et il s'ensuivit une querelle de plusieurs années jusqu'à ce que des menaces de mort fassent renoncer Tartaglia à défendre ses droits...
La méthode de Tartaglia laissait cependant quelques zones d'ombre : on se ramenait à une équation du second degré qui, lorsqu'elle possédait deux racines réelles, fournissait une unique racine réelle de l'équation du troisième degré. Mais lorsque l'équation du second degré n'avait pas de racine réelle, la méthode semblait impuissante à fournir les racines réelles évidentes de l'équation du troisième degré ; pour comble de malchance, c'est justement dans ce cas qu'il y en avait le plus grand nombre... (au maximum trois, les racines négatives étant à l'époque écartées).
Quelques années plus tard, Raffaele Bombelli n'hésita pas, non seulement à considérer des nombres négatifs, mais aussi à leur attribuer une racine carrée... Il compléta ainsi la méthode de Tartaglia, trouvant systématiquement toutes les solutions réelles de l'équation du troisième degré après élimination des racines carrées de négatifs.
Les nombres complexes étaient nés...

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a. Deux complexes dont la somme et le produit sont réels, sont des réels.

b. Pour tout complexe z, $|z|^2 = z^2$.

c. Pour tous complexes a et b,

$$a + ib = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$$

d. Deux complexes de même module dont les arguments diffèrent de 2π sont égaux.

e. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(e^z = -1 \quad \Rightarrow \quad z = i\pi \right)$

f. L'application $z \mapsto e^z$ est bijective.

g. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif.

h. Tout nombre complexe non nul possède n racines n-ièmes distinctes.

i. Pour tout entier $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe est nulle.

j. Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ a toujours des solutions.

Forme algébrique – module

2 Soit z et z' deux complexes de module 1 et a un réel. On note :

$$Z = z + z' + azz' + 1 \quad \text{et} \quad Z' = z + z' + zz' + a$$

1) Montrer que $Z' = zz'\overline{Z}$ et que $|Z| = |Z'|$.

2) On suppose que $1 + zz' \neq 0$. Montrer que le nombre $u = \dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

3 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}$$

En déduire les sommes réelles :

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1)$$

et

$$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{p+1}2p$$

4 Déterminer z pour que z, $z - 1$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

5 Soit u et v deux complexes. Montrer que :

$$|u| + |v| \leqslant |u + v| + |u - v|$$

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

(formule du parallélogramme)

6 Un entier n est « somme de deux carrés » s'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = a^2 + b^2$. Montrer qu'un produit fini de tels entiers est encore somme de deux carrés.

7 Pour a et b complexes tels que $a\overline{b} \neq 1$, soit $z = \dfrac{a - b}{1 - a\overline{b}}$. Montrer que :

$$|z| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1$$

Caractériser de même $|z| < 1$.

Applications à la trigonométrie – forme trigonométrique

8 Calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \,; \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin kx \,;$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx \,; \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx \,;$$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} \,; \qquad S_6 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x} \,;$$

$$S_7 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx \,; \quad S_8 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx.$$

9 Calculer le nombre complexe $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}$

10 **1)** Déterminer le module et un argument de $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ en discutant suivant la valeur du réel α.

2) Soit $z' = \dfrac{1 - i}{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right[$. Calculer en fonction de α le module et un argument de z'.

Équations

11 Résoudre de deux façons l'équation
$$(z+1)^5 = (z-1)^5.$$
Comparer les résultats.

12 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :
z^3-1 ; z^3+1 ; z^4+z^2+1 ; z^4-z^2+1 ; z^6-1 ; z^6+1.

13 Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer $1+u+u^2+u^3+u^4$. En déduire la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.
Application : trouver une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.

14 On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = u+u^2+u^4$ et
$$T = u^3+u^5+u^6.$$

1) Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.

2) Calculer $S+T$ et ST. En déduire S et T.

15 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2-2iz-1+2i=0$

2) $iz^2+iz+1+i=0$

3) $z^2-2^{\theta+1}\cos\theta z+2^{2\theta}=0$

4) $z^2-\dfrac{4}{\sin\theta}z+\dfrac{13}{\sin^2\theta}-9=0 \quad \theta\in\,]0,\pi[$

5) $2z^2(1-\cos 2\theta)-2z\sin 2\theta+1=0 \quad \theta\in\,]0,\pi[$

6) $z^2-2e^{i\theta}z+2i\sin\theta e^{i\theta}=0$ (on écrira les racines sous la forme trigonométrique)

7) $z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i=0$ (racine évidente)

8) $4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i)=0$ (chercher une racine réelle)

9) $z^3-(5-3i)z^2+(6-11i)z+2+16i=0$ (chercher une racine imaginaire)

16 Résoudre l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.

17 Déterminer sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $a = 16(1-i)$. Pour tout réel λ on pose $z_\lambda = 1+i+2\sqrt{2}e^{i\lambda}$. Déterminer l'ensemble (C) des points M_λ d'affixes z_λ quand λ décrit $[0,2\pi[$.
Montrer que les solutions de l'équation $(z-(1+i))^3 = a$ sont des affixes de points de (C).

18 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(z^2+1)^n-(z-i)^{2n}=0 \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

Applications des complexes à la géométrie

19 À tout point M d'affixe $z\neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$.

Établir que $|z'|=1$; $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel ; $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
En déduire une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

20 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points I d'affixe i et M' d'affixe iz soient alignés avec M. Déterminer l'ensemble des points M'.

21 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$$

22 Soit A, B, C trois points distincts du plan complexe d'affixes a, b, c. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1) ABC est un triangle équilatéral.

2) j ou $\bar{j}$ est solution de l'équation $az^2+bz+c=0$.

3) $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

23 Soit $ABCD$ un carré dans le plan complexe. Montrer que si A et B ont des coordonnées entières, il en est de même de C et D.
Peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets ont des coordonnées entières ?

2 Fonctions usuelles

INTRODUCTION

Après un rappel concernant les fonctions logarithmes, exponentielles et circulaires, le catalogue des fonctions usuelles s'enrichit ici de plusieurs spécimens dont les étudiants disposent déjà sur leur calculatrice : quelles sont ces mystérieuses touches : $\texttt{sin}^{-1}$, $\texttt{cosh}$, $\texttt{tanh}^{-1}$ *? Ces fonctions seront utilisées couramment en analyse, notamment dans les calculs de primitives.*

OBJECTIFS

- Réviser les fonctions déjà connues : exponentielles, logarithmes, puissances, fonctions circulaires.
- Découvrir de nouvelles fonctions : fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques, fonctions circulaires réciproques.
- Préparer le cours d'analyse en disposant de nombreux exemples.

1 Fonctions logarithmes et exponentielles

1.1 • Fonction logarithme népérien

Nous verrons dans le chapitre 20 que toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle. Les primitives d'une même fonction sur un intervalle sont égales à une constante près. On peut spécifier une primitive particulière en précisant sa valeur en un point de l'intervalle.

On appelle **logarithme népérien** la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1. Cette fonction est notée $x \mapsto \ln x$.

Par définition, la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée $\dfrac{1}{x}$ est strictement positive : $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel y strictement positif, la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ln(xy) = \ln x + C$.

Pour $x = 1$, on obtient $C = \ln y$.

D'où :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x^n = n \ln x$$

Cette propriété sera démontrée au § 3.4 du chapitre 17.

$\ln$ étant strictement croissante, elle admet une limite finie ou infinie en $+\infty$.
Comme $\ln 2^n = n \ln 2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln 2^n = +\infty$. La limite de $\ln$ en $+\infty$ ne peut donc être que $+\infty$.

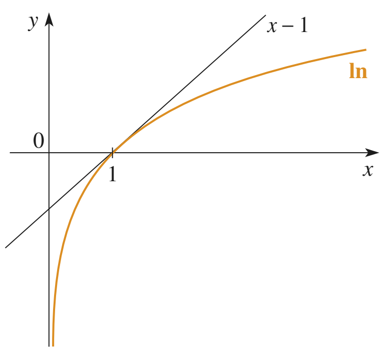
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

En changeant x en $\dfrac{1}{x}$, on en déduit :

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

La fonction $\ln$ ayant une dérivée décroissante (on dit qu'elle est concave), sa courbe représentative est en dessous de sa tangente en tout point, en particulier au point 1 (*Doc.*1) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leqslant x - 1$$



Doc. 1 Logarithme répérien.

APPLICATION 1

Déterminer l'ensemble des couples $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ *tels que :*

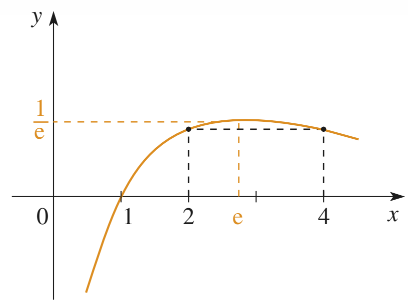
$$n \neq p \quad \text{et} \quad n^p = p^n$$

Remarquons que $n^p = p^n \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln p}{p}$, ce qui nous conduit à étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\frac{1 - \ln x}{x^2}$, elle est donc croissante sur $]0, \mathrm{e}]$, décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Nous cherchons n et p entiers tels que : $f(n) = f(p)$; l'un de ces deux entiers appartient nécessairement à $]0, \mathrm{e}]$.

Or $f(1) = 0$, valeur atteinte en ce seul point, $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4} = f(4)$. Les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$ sont donc les seules solutions (*Doc.* 2).



Doc. 2

1.2 • Fonction exponentielle de base e

Vous avez vu en Terminale que toute fonction f strictement monotone et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$; la bijection réciproque f^{-1} est alors strictement monotone et continue de J dans I.

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle est donc bijective. Sa bijection réciproque est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$; elle est appelée **exponentielle** et notée $\exp$.

Pour tous réels x et y, on a :

$$\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y = \ln(\exp(x + y))$$

D'où, puisque la fonction logarithme népérien est bijective :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$$

On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp(n) = \exp(n1) = \big(\exp(1)\big)^n$$

En notant e le réel $\exp(1)$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp(n) = \mathrm{e}^n$.

On convient d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

(pour $x \in \mathbb{Z}$, c'est une propriété ; pour $x \notin \mathbb{Z}$, c'est une définition).

La fonction exp est appelée **exponentielle de base e**.

Avec cette nouvelle notation, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{nx} = \left(\mathrm{e}^x\right)^n$$

Nous démontrerons dans le chapitre 18 : *Dérivation des fonctions d'une variable réelle* que, si f est une bijection, dérivable, et si sa dérivée **ne s'annule pas sur** I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ de dérivée :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

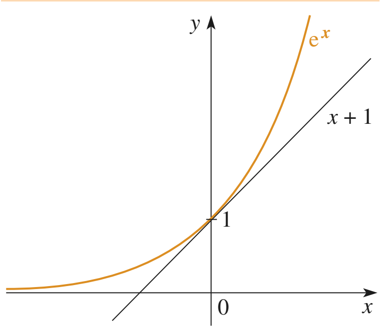
La dérivée du logarithme népérien ne s'annulant pas, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\exp)'(x) = \frac{1}{1/\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x$$

La fonction exponentielle de base e est égale à sa dérivée.

Les limites de l'exponentielle se déduisent de celles du logarithme népérien (*Doc.* 3) :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$



Doc. 3 La fonction exponentielle.

1.3 • Fonctions exponentielles de base quelconque

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **exponentielle de base a** la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = \mathrm{e}^{x \ln a}$$

On vérifie que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \exp_a(x+y) &= \mathrm{e}^{(x+y)\ln a} \\ &= \mathrm{e}^{x \ln a}\mathrm{e}^{y \ln a} \\ &= \exp_a(x)\exp_a(y) \end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp_a(n) = \left(\exp_a(1)\right)^n = a^n$$

On convient d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp_a(x) = a^x$.

ATTENTION

Seul un réel strictement positif peut être élevé à un exposant réel quelconque. $2^{\sqrt{2}}$ signifie $\exp_2(\sqrt{2})$, c'est-à-dire $\exp(\sqrt{2}\ln 2)$; mais $(-2)^{\sqrt{2}}$ n'a aucun sens.

Avec cette nouvelle notation, on a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad & a^x = e^{x\ln a} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad & \ln a^x = x\ln a \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad & a^{x+y} = a^x a^y \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad & a^{-x} = \frac{1}{a^x} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad & a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \end{aligned}$$

De plus : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left(a^x\right)^y = e^{y\ln a^x} = e^{y(x\ln a)} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$

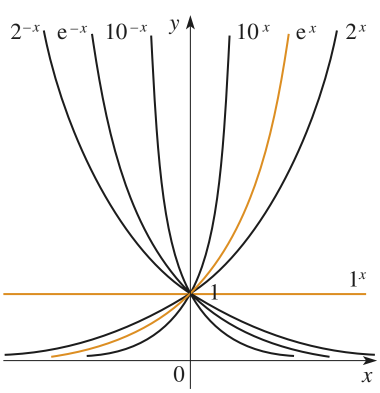
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

On a aussi :

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x\ln a}e^{x\ln b} = a^x b^x$$

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (ab)^x = a^x b^x$$

Ces relations généralisent pour les exposants réels les propriétés connues pour les seuls exposants entiers.



Doc. 4 Les fonctions exponentielles.

Dérivée

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\exp_a$ (*Doc.* 4) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\exp_a)'(x) = a^x \ln a$$

- Si $a = 1$, la fonction $\exp_1$ est constante : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1^x = 1$.
- Si $a > 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante.
- Si $a < 1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante.

Remarque : *Pour dériver* $x \mapsto u(x)^{v(x)}$, *il faut revenir à la définition* : $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$. *Par exemple* $x \mapsto x^x = e^{x\ln x}$ *a pour dérivée* $x \mapsto (\ln x + 1)x^x$.

1.4 • Fonctions logarithmes de base quelconque

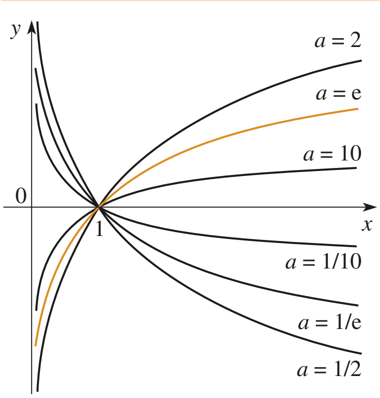
Si $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $\exp_a$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$: c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. La bijection réciproque est appelée **logarithme de base** a et notée $\log_a$. On a donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \qquad \begin{cases} y = \log_a x \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} x = a^y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Comme cette égalité équivaut encore à $\ln x = y\ln a$, on en déduit $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Toutes les fonctions logarithmes sont proportionnelles (*Doc.* 5).



Doc. 5 Les fonctions logarithmes.

Dérivée

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

1.5 • Fonctions puissances

La définition des fonctions exponentielles permet d'élever un réel strictement positif à la puissance d'un exposant réel quelconque. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut donc définir la fonction : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array} \right.$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$$

Cette fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_\alpha'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Cette propriété généralise pour les exposants réels celle qui était connue pour les seuls exposants rationnels.

- Si $\alpha = 0$, la fonction f_α est constante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x^0 = 1$.
- Si $\alpha > 0$, la fonction f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $\alpha < 0$, la fonction f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $\alpha \neq 0$, on a les tableaux de variation suivants :

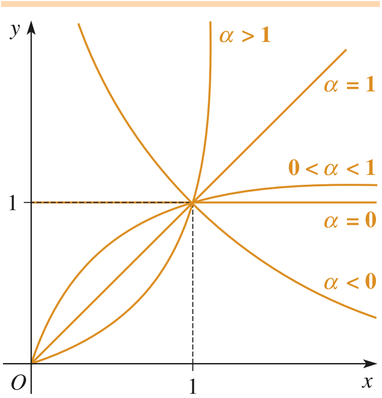
Si $\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$f_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si $\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$f_\alpha(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Notons que si $\alpha \geqslant 0$, on peut prolonger f_α par continuité en 0 en posant : $f_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 0$, et $f_0(0) = 1$.



Doc. 6 Les fonctions puissances.

- Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f_\alpha'(x) = 0$, donc f_α est dérivable en 0 et $f_\alpha'(0) = 0$.
- Si $\alpha = 1$, $f_1(x) = x$; f_1 est dérivable en 0 et $f_\alpha'(0) = 1$.
- Si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f_\alpha'(x) = +\infty$, donc f_α n'est pas dérivable en 0 (*Doc.* 6).

1.6 • Croissances comparées

1) On a prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln x \leqslant x - 1; \quad \text{a fortiori, } \ln x < x.$$

Pour tout $\alpha > 0$, $\ln x^\alpha < x^\alpha$, d'où $\ln x < \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$.

Pour tout $\beta > 0$ et $x \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^\beta} < \dfrac{x^{\alpha - \beta}}{\alpha}$.

En choisissant $\alpha < \beta$ et en appliquant le théorème d'encadrement (chapitre 17, § 4.3), on en déduit :

$$\forall \beta > 0 \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$$

On dit que $\ln x$ est **négligeable** devant x^β au voisinage de $+\infty$ (voir chapitre 17, § 5.2).

Plus généralement, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha,$$

d'où :

$$\forall \alpha > 0 \ \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$(\ln x)^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$.

En posant $x = \dfrac{1}{X}$, on en déduit :

$$\forall \alpha > 0 \ \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \longrightarrow 0} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

$|\ln x|^\alpha$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^\beta}$ au voisinage de 0.

2) Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \mathrm{e}^{\alpha x - \beta \ln x} = \mathrm{e}^{x(\alpha - \beta \frac{\ln x}{x})}$.

Comme $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$,

$$\forall \alpha > 0 \ \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

x^β est négligeable devant $\mathrm{e}^{\alpha x}$ au voisinage de $+\infty$.

En posant $x = -X$, on obtient de même :

$$\forall \alpha > 0 \ \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} |x|^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} = 0$$

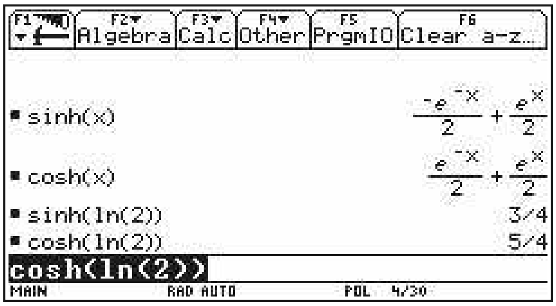
$\mathrm{e}^{\alpha x}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{|x^\beta|}$ au voisinage de $+\infty$.

2 Fonctions hyperboliques

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est, de façon unique, la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

2.1 • Fonctions sinus et cosinus hyperboliques



Sur la TI-92/Voyage 200 ces deux fonctions sont notées `sinh` et `cosh` (menu `MATH/Hyperbolic`).

On appelle **sinus hyperbolique** et **cosinus hyperbolique** la partie impaire et la partie paire de la fonction exponentielle de base e :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

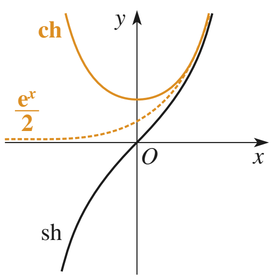
Ces deux fonctions (*Doc.* 7) sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{sh})'(x) = \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad (\operatorname{ch})'(x) = \operatorname{sh} x$$

Il en résulte les tableaux de variation suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}' x$		$+$	1	$+$	
$\operatorname{sh} x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}' x$		$-$	0	$+$	
$\operatorname{ch} x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Doc. 7 Cosinus et sinus hyperboliques.

Remarque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\operatorname{ch} x - \frac{e^x}{2}\right) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sh} x - \frac{e^x}{2}\right) = 0$. *Les courbes d'équations* $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{sh} x$ *et* $y = \frac{e^x}{2}$ *sont asymptotes en* $+\infty$, *leurs positions relatives étant données par les inégalités :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x < \frac{e^x}{2} < \operatorname{ch} x$$

2.2 • Trigonométrie hyperbolique

On vérifie facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{-x}$$

D'où :

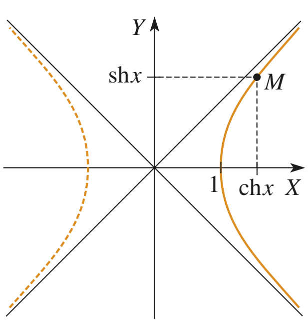
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

En posant :

$$X = \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad Y = \operatorname{sh} x,$$

on a

$$X^2 - Y^2 = 1 \quad \text{et} \quad X \geqslant 1.$$



Doc. 8 Paramétrage d'une demi-hyperbole.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, le point de coordonnées (X, Y) décrit donc une demi-hyperbole équilatère (*Doc.* 8) (voir chapitre 6 : *Coniques*) : les fonctions hyperboliques servent à paramétrer la demi-hyperbole d'équations $X^2 - Y^2 = 1$, $X \geqslant 1$.

APPLICATION 2

Formules d'addition en trigonométrie hyperbolique

Calculer ch $(a+b)$, ch $(a-b)$, sh $(a+b)$, sh $(a-b)$, ch $2a$, sh $2a$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(a+b) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{-a-b})\\ &= \frac{1}{4}[(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b})\\ &\quad +(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b})]\end{aligned}$$

D'où :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

En changeant b en $-b$, on obtient :

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

On en déduit :

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2\operatorname{ch}^2 a - 1 = 2\operatorname{sh}^2 a + 1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(a+b) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a+b} - \mathrm{e}^{-a-b})\\ &= \frac{1}{4}[(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b})\\ &\quad +(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b})]\end{aligned}$$

D'où :

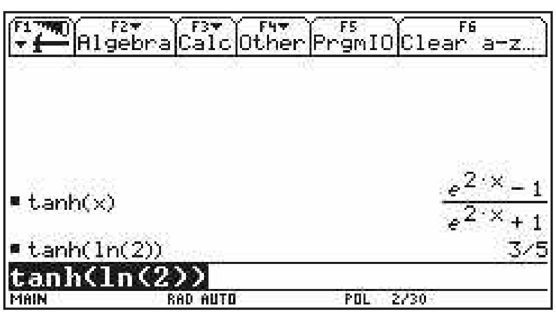
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$

et :

$$\operatorname{sh} 2a = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$

Remarque : *La plupart des formules de trigonométrie s'étendent aux fonctions hyperboliques, moyennant certains changements de signe.*

2.3 • Fonction tangente hyperbolique



Sur la TI-92/Voyage 200, cette fonction est notée `tanh` (menu `MATH/Hyperbolic`).

La fonction **tangente hyperbolique** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

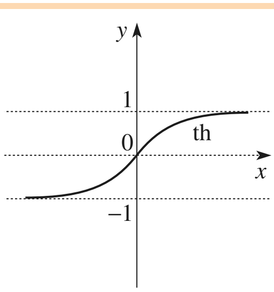
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

Cette fonction est impaire.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$



Doc. 9 Tangente hyperbolique.

La fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (*Doc.* 9).

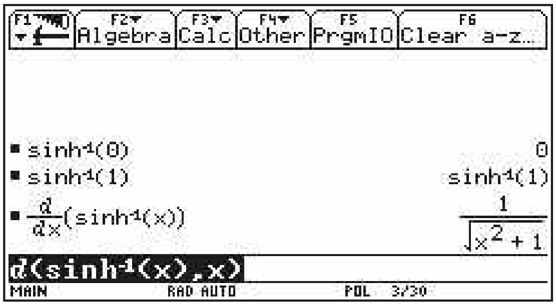
Au voisinage de $+\infty$, $\operatorname{th} x \sim \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$.

Comme la fonction th est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$.

Pour s'entraîner : ex. 4 et 6

3 Fonctions hyperboliques réciproques

3.1 • Fonction argument sinus hyperbolique



Sur la TI-92/Voyage 200, la fonction Argsh est notée `sinh` $^{-1}$ (menu `MATH/Hyperbolic`). Ne pas confondre avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$.

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ses limites en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée **argument sinus hyperbolique** et notée $x \mapsto \operatorname{Argsh} x$.
Par définition :

> Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argsh} x$ est l'unique élément de $\mathbb{R}$ qui a pour sinus hyperbolique x :
>
> $$\begin{cases} y = \operatorname{Argsh} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{sh} y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'après le théorème utilisé, la fonction argument sinus hyperbolique est également continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

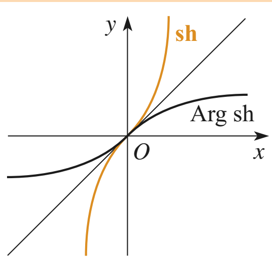
Dérivée

La fonction sh étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, la fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ (*Doc.* 10) et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{Argsh})'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}$$

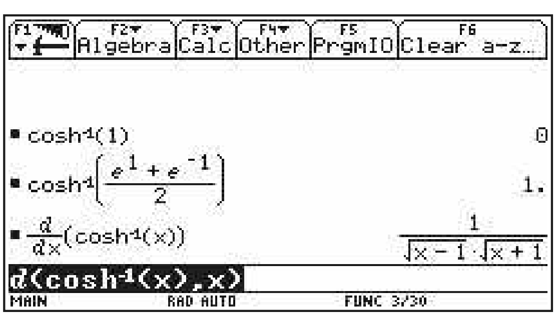
or $\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) = 1 + x^2$ et $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) > 0$, donc $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) = \sqrt{x^2+1}$. D'où :

$$(\operatorname{Argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$



Doc. 10 Argument sinus hyperbolique.

3.2 • Fonction argument cosinus hyperbolique



Sur la TI-92/Voyage 200, la fonction Argch est notée `cosh` $^{-1}$ (menu `MATH/Hyperbolic`). Ne pas confondre avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

La restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. La bijection réciproque de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ est appelée **argument cosinus hyperbolique** et notée $x \mapsto \operatorname{Argch} x$. Par définition :

> Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{Argch} x$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_+$ qui a pour cosinus hyperbolique x
>
> $$\begin{cases} y = \operatorname{Argch} x \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{ch} y \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

D'après le théorème utilisé, la fonction argument cosinus hyperbolique est également continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Dérivée

La fonction ch étant dérivable et sa dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ (*Doc.* 11) et :

$$\forall x > 1 \quad (\text{Argch})'(x) = \frac{1}{\text{sh}(\text{Argch}\, x)}$$

or

$$\text{sh}^2(\text{Argch}\, x) = \text{ch}^2(\text{Argch}\, x) - 1 = x^2 - 1$$

et

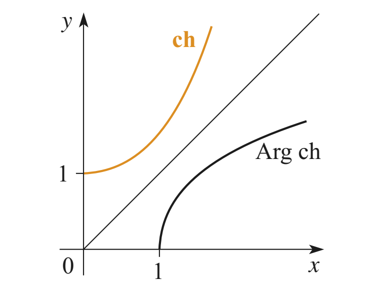
$$\text{sh}(\text{Argch}\, x) > 0$$

donc

$$\text{sh}(\text{Argch}\, x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

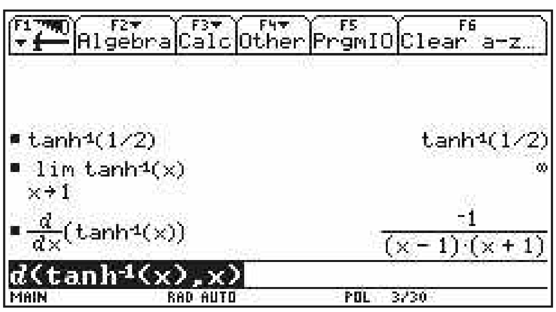
D'où

$$(\text{Argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$



Doc. 11 Argument cosinus hyperbolique.

3.3 • Fonction argument tangente hyperbolique



Sur la TI-92/Voyage 200, la fonction Argth est notée `tanh` $^{-1}$ (menu `MATH/Hyperbolic`). Ne pas confondre avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\text{th}\, x}$.

La fonction tangente hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; ses limites en $\pm\infty$ sont ± 1. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. La bijection réciproque de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ est appelée **argument tangente hyperbolique** et notée $x \mapsto \text{Argth}\, x$.
Par définition :

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\text{Argth}\, x$ est l'unique élément de $\mathbb{R}$ qui a pour tangente hyperbolique x :

$$\begin{cases} y = \text{Argth}\, x \\ x \in]-1, 1[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{th}\, y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'après le théorème utilisé, la fonction argument tangente hyperbolique est également continue et strictement croissante sur $]-1, 1[$.

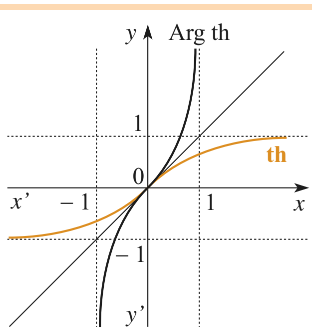
Dérivée

La fonction th étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, la fonction Argth est dérivable sur $]-1, 1[$ (*Doc.*12) et :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\text{Argth})'(x) = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{Argth}\, x)}$$

Or $\text{th}(\text{Argth}\, x) = x$, d'où :

$$(\text{Argth})'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$



Doc. 12 Argument tangente hyperbolique.

APPLICATION 3

Expression des fonctions hyperboliques réciproques à l'aide du logarithme népérien

Les fonctions hyperboliques réciproques peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction logarithme népérien ; vérifions-le pour chacune d'elles.

1) *Montrer, de deux façons différentes, que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

2) *Montrer, de deux façons différentes, que :*

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

3) *Montrer, de deux façons différentes, que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

1) • Résolvons l'équation en y : $x = \operatorname{sh} y$, soit $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Posons $Y = e^y$.
L'équation devient :

$$2x = Y - \frac{1}{Y} \quad \text{soit} \quad Y^2 - 2xY - 1 = 0$$

Cette équation du second degré en Y possède deux racines réelles de signes contraires :

$$Y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad Y = x - \sqrt{x^2 + 1}.$$

Comme $Y = e^y$, on conserve uniquement la solution positive :

$$Y = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{d'où} \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

• Autre méthode : Les deux fonctions $x \mapsto \operatorname{Argsh} x$ et $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Or,

$$\left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

où l'on reconnaît la dérivée de la fonction Argsh .
De plus, ces deux fonctions prennent la même valeur nulle pour $x = 0$, elles sont donc égales.

2) • Résolvons l'équation en y : $x = \operatorname{ch} y$, soit $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Posons $Y = e^y$. L'équation devient :

$$2x = Y + \frac{1}{Y} \quad \text{soit} \quad Y^2 - 2xY + 1 = 0$$

Cette équation du second degré en Y possède deux racines réelles positives :

$$Y = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad Y = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Comme on veut que $y \geqslant 0$, on conserve uniquement la solution supérieure à 1 :

$$Y = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{d'où} \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[\quad \operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}$$

• Autre méthode : Les deux fonctions

$$x \mapsto \operatorname{Argch} x \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

sont dérivables sur $]1, +\infty[$. Or,

$$\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

où l'on reconnaît la dérivée de la fonction Argch .
De plus, ces deux fonctions prennent la même valeur nulle pour $x = 1$, elles sont donc égales.

3) • Résolvons l'équation en y :

$$x = \operatorname{th} y$$

soit

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

Posons $Y = e^{2y}$. L'équation devient :

$$Y - 1 = x(Y + 1)$$

soit

$$Y(1 - x) = 1 + x$$

d'où

$$Y = \frac{1+x}{1-x}$$

L'équation a une solution réelle unique :

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

car

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\quad \text{Argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}}$$

- Autre méthode : Les deux fonctions

$$x \mapsto \text{Argth}\, x \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

sont dérivables sur $]-1,1[$. Or,

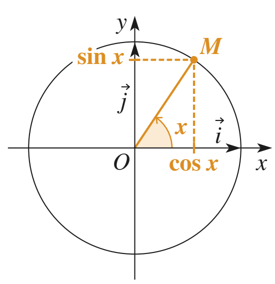
$$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$

où l'on reconnaît la dérivée de la fonction Argth . De plus, ces deux fonctions prennent la même valeur nulle pour $x = 0$, elles sont donc égales.

Pour s'entraîner : ex. 5

4 Fonctions circulaires

4.1 • Paramétrage d'un cercle



Doc. 13 Paramétrage d'un cercle.

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O de rayon 1. Pour tout réel x, le point M de $\mathcal{C}$ tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x, a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$ (*Doc.* 13).

On définit ainsi deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π -périodiques, **sinus** et **cosinus**, respectivement impaire et paire.

Leur quotient est la fonction **tangente** définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Cette fonction est impaire et π -périodique.

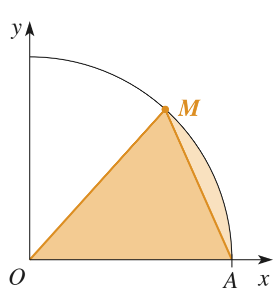
Retrouvons les propriétés différentielles (limites, dérivées) de ces fonctions classiques à partir de ce simple point de vue géométrique.

4.2 • Fonctions sinus et cosinus

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, M le point de coordonnées $(\cos x, \sin x)$, A le point de coordonnées $(1, 0)$.

Continuité

Comparons les aires du triangle OAM et du secteur angulaire OAM (*Doc.* 14) :



Doc. 14 Comparaison d'aires.

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \frac{1}{2}\sin x \leqslant \frac{1}{2}x, \qquad \text{soit :} \quad \sin x \leqslant x$$

Cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$, et comme la fonction sinus est impaire, on peut écrire :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad |\sin x| \leqslant |x|$$

On en déduit $\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$, donc la fonction sinus est continue en 0.

On sait que $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, donc $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$: la fonction cosinus est continue en 0.

En un point quelconque x_0, on a :

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad \sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h, \quad \text{donc} \quad \lim_{h\to 0} \sin(x_0+h) = \sin x_0$$

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad \cos(x_0+h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h, \quad \text{donc} \quad \lim_{h\to 0} \cos(x_0+h) = \cos x_0$$

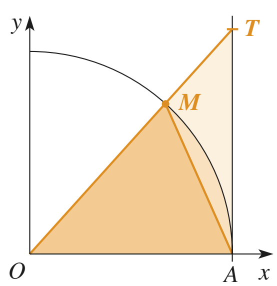
En définitive, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité

Soit T le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente en A à $\mathcal{C}$.

Comparons les aires du triangle OAM, du secteur angulaire OAM et du triangle OAT (*Doc.* 15) :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \frac{1}{2}\sin x \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}\tan x$$



Doc. 15 Comparaison d'aires.

D'où l'on déduit en divisant les trois membres par $\frac{1}{2}\sin x$ (qui est strictement positif) : $1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$, ou en passant aux inverses :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Comme cette fonction est paire, il en est de même de la limite à gauche. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Cette limite exprime la dérivabilité de la fonction sinus en 0, sa dérivée valant 1 en ce point.

Comme : $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

En un point x_0 quelconque :

$$\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$

d'où :
$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}$$

et par conséquent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$$

De même :

$$\cos(x_0+h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h$$

d'où : $$\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} = \cos x_0 \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \frac{\sin h}{h}$$

et par conséquent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} = -\sin x_0$$

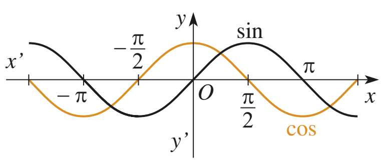
Les fonctions sinus et cosinus sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et (*Doc.* 16) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\sin x$$

Or $\sin'(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos'(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

On en déduit facilement par récurrence que les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

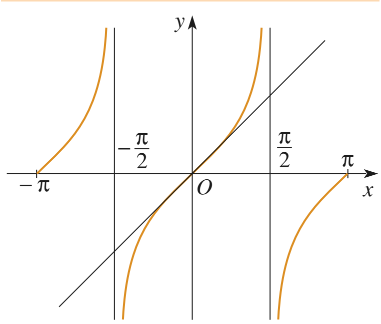


Doc. 16 Fonctions sinus et cosinus.

4.3 • Fonction tangente

La fonction tangente (*Doc.* 17), notée tan, est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; elle est impaire et π-périodique. Elle est dérivable sur cet ensemble et :

$$\tan'(x) = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$



Doc. 17 Fonction tangente.

5 Fonctions circulaires réciproques

Les fonctions que nous venons d'étudier ne sont évidemment pas bijectives sur tout leur ensemble de définition, mais certaines restrictions convenablement choisies peuvent l'être. Les bijections réciproques correspondantes définissent de nouvelles fonctions qui sont très importantes, notamment en calcul intégral.

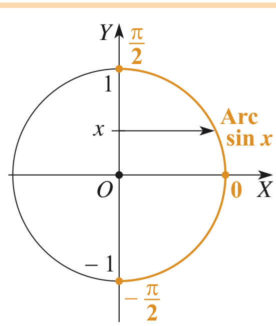
5.1 • Fonction Arc sinus

Soit f la restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, f est continue et strictement croissante sur cet intervalle. C'est donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$. La bijection réciproque de $[-1,1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est appelée **Arc sinus** et notée $x \mapsto \text{Arcsin } x$ (*Doc.* 18).

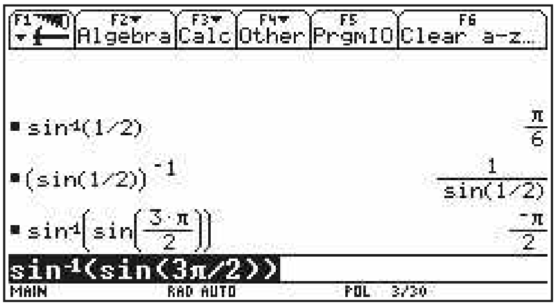
Par définition :

Pour tout $x\in[-1,1]$, Arcsin x est l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ qui a pour sinus x :

$$\begin{cases} y = \text{Arcsin } x \\ x\in[-1,1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



Doc. 18 Arc sinus.



Sur la TI-92/Voyage 200, la fonction Arcsin est notée `sin` $^{-1}$. Ne pas confondre avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

D'après le théorème utilisé, la fonction Arc sinus est également continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

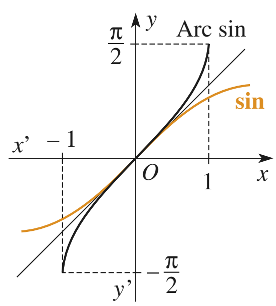
Dérivée

Comme la fonction f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction Arc sinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\mathrm{Arcsin})'(x) = \frac{1}{f'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}\, x)}$$

Or $\cos^2(\mathrm{Arcsin}\ x) = 1 - \sin^2(\mathrm{Arcsin}\ x) = 1 - x^2$ et comme $\mathrm{Arcsin}\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\mathrm{Arcsin}\ x) > 0$. D'où $\cos(\mathrm{Arcsin}\ x) = \sqrt{1 - x^2}$. En définitive :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\mathrm{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



Doc. 19 Fonctions Arc sinus.

La fonction Arcsin est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et $\lim\limits_{x \to 1-} (\mathrm{Arcsin})'(x) = +\infty$. Par conséquent, Arcsin n'est pas dérivable en 1, ni de même en -1. Sa courbe représentative (*Doc.*19) présente aux points d'abscisse 1 et -1 des demi-tangentes verticales.

Remarque : *La fonction* Arcsin *est impaire.*

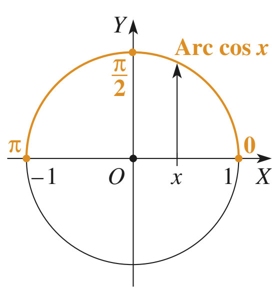
5.2 • Fonction Arc cosinus

Soit f la restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$, f est continue et strictement décroissante sur cet intervalle. C'est donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. La bijection réciproque de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$ est appelée **Arc cosinus** et notée $x \mapsto \mathrm{Arccos}\ x$ (*Doc.* 20).

Par définition :

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\mathrm{Arccos}\ x$ est l'unique élément de $[0, \pi]$ qui a pour cosinus x :

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arccos}\ x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$



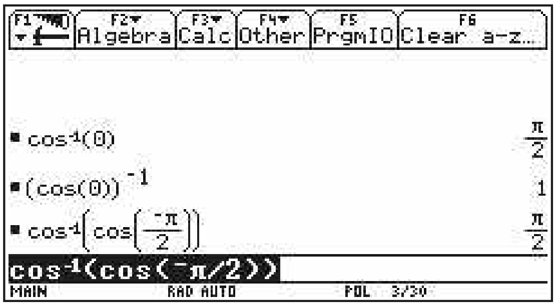
Doc. 20 Arc cosinus.

D'après le théorème utilisé, la fonction Arc cosinus est également continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

Dérivée

Comme la fonction f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, la fonction Arc cosinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\mathrm{Arccos})'(x) = \frac{1}{f'(f(x))} = \frac{1}{-\sin(\mathrm{Arccos}\ x)}$$



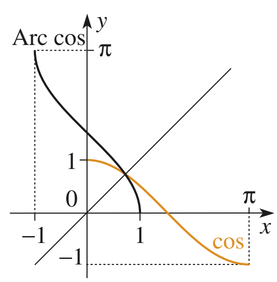
Sur la TI-92/Voyage 200, la fonction Arccos est notée `cos` $^{-1}$. Ne pas confondre avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$.

Or $\sin^2(\text{Arccos } x) = 1 - \cos^2(\text{Arccos } x) = 1 - x^2$ et comme $\text{Arccos } x \in]0, \pi[$, $\sin(\text{Arccos } x) > 0$.

D'où $\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1 - x^2}$.
En définitive :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\text{Arccos})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La fonction Arccos est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et $\lim\limits_{x \to 1-} (\text{Arccos})'(x) = -\infty$. Par conséquent, Arccos n'est pas dérivable en 1, ni de même en -1. Sa courbe représentative présente aux points d'abscisse 1 et -1 des demi-tangentes verticales (*Doc.* 21).



Doc. 21 Fonction Arc cosinus.

Remarque *: La fonction* $x \mapsto \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$ *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et sa dérivée est nulle : cette fonction est donc constante sur cet intervalle. La valeur de cette constante est* $\dfrac{\pi}{2}$ *(valeur en 0). Comme on a aussi :*

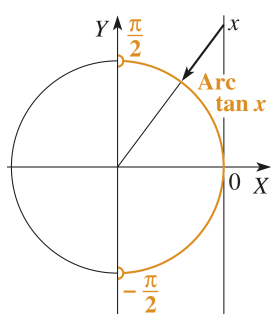
$$\text{Arcsin } 1 + \text{Arccos } 1 = \frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \text{Arcsin } (-1) + \text{Arccos } (-1) = \frac{\pi}{2},$$

on peut conclure :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$$

5.3 • Fonction Arc tangente

Soit f la restriction de la fonction tangente à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, f est continue et strictement croissante sur cet intervalle ; ses limites aux bornes sont $\pm\infty$. C'est donc une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. La bijection réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est appelée **Arc tangente** et notée $x \mapsto \text{Arctan } x$ (*Doc.* 22).



Doc. 22 Arc tangente.

Par définition :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Arctan x est l'unique élément de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ qui a pour tangente x :

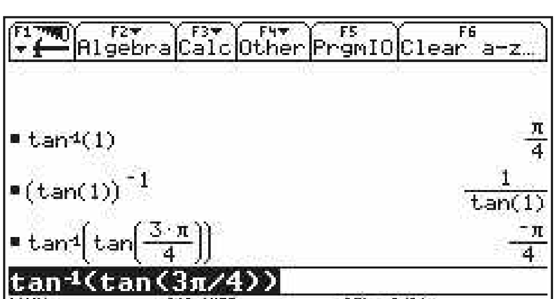
$$\begin{cases} y = \text{Arctan } x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

D'après le théorème utilisé, la fonction Arc tangente est également continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

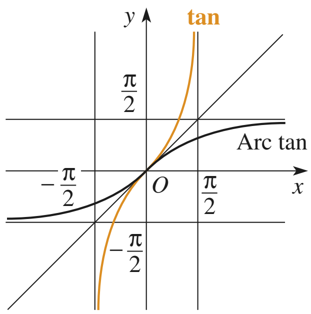
Dérivée

Comme la fonction f est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et (*Doc.* 23) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan })'(x) = \frac{1}{f'(f(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan } x)}$$



Sur la TI-92/Voyage 200, la fonction Arctan est notée `tan` $^{-1}$. Ne pas confondre avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$.



Doc. 23 Fonction Arc tangente.

Or $\tan(\text{Arctan}\, x) = x$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Remarque *: La fonction* Arctan *est impaire.*

Pour s'entraîner : ex. 7 à 13

MÉTHODE

Retenir les équivalences :

$$\begin{cases} y = \text{Argsh}\, x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{sh}\, y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{Argch}\, x \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{ch}\, y \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{Argth}\, x \\ x \in]-1, 1[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \text{th}\, y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ainsi que :

$$\begin{cases} y = \text{Arcsin}\, x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{Arccos}\, x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{Arctan}\, x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

Argsh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Argch est continue sur $[1, +\infty[$ et dérivable sur $]1, +\infty[$:

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad (\text{Argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Argth est continue et dérivable sur $]-1, 1[$:

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\text{Argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

- Arcsin est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$:

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Arccos est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$:

$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\text{Arccos})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$(\ln x)^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$

$|\ln x|^\alpha$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^\beta}$ au voisinage de 0

x^β est négligeable devant $e^{\alpha x}$ au voisinage de $+\infty$

$e^{\alpha x}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{|x^\beta|}$ au voisinage de $-\infty$

- Comparaison des fonctions circulaires et des fonctions hyperboliques.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Fonctions circulaires	Fonctions hyperboliques
$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{sh}\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\ \text{ch}\, x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \end{cases}$
$\begin{cases} \cos x + i \sin x = e^{ix} \\ \cos x - i \sin x = e^{-ix} \end{cases}$	$\begin{cases} \text{ch}\, x + \text{sh}\, x = e^{x} \\ \text{ch}\, x - \text{sh}\, x = e^{-x} \end{cases}$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
$\begin{cases} (\sin)'(x) = \cos x \\ (\cos)'(x) = -\sin x \end{cases}$	$\begin{cases} (\text{sh})'(x) = \text{ch}\, x \\ (\text{ch})'(x) = \text{sh}\, x \end{cases}$

Exercice résolu

D'APRÈS ENSTIM (ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES)

1 *Soit* g *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$g(t) = \text{Arctan } t - t + \frac{t^3}{3}$$

a) *Vérifier que* g *est impaire, dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et calculer* $g'(t)$, *pour* $t \in \mathbb{R}$.

b) *Montrer que :* $\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant g'(t) \leqslant t^2$.

c) *En déduire :* $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t - \dfrac{t^3}{3} \leqslant \text{Arctan } t \leqslant t$.

2 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(0) = 1 \quad \textit{et} \quad \forall t \neq 0, \quad f(t) = \frac{\text{Arctan } t}{t}$$

a) *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et paire.*

b) *Montrer que* f *est dérivable en 0 et donner* $f'(0)$.

c) *Justifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* $f'(t)$, *pour* $t \in \mathbb{R}^*$.

3 *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$

En déduire le sens de variation de f.

4 *Tracer la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé.*

Conseils

Intégrer l'inégalité précédente.

Calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$.

Solution

1) a) g est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(-t) = \text{Arctan }(-t) + t - \frac{t^3}{3} = -g(t)$$

g est impaire ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et pour $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} - 1 + t^2 = \dfrac{t^4}{1+t^2}$.

b) On en déduit immédiatement : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant g'(t) \leqslant t^2$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on obtient alors, en intégrant sur $[0, t]$, $0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{t^3}{3}$, c'est-à-dire : $t - \dfrac{t^3}{3} \leqslant \text{Arctan } t \leqslant t \quad (*)$.

2) a) f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues, elle est paire comme quotient de fonctions impaires.

D'après $(*)$, nous pouvons écrire pour $t > 0$: $1 - \dfrac{t^2}{3} \leqslant f(t) \leqslant 1 \quad (*)$, ce qui prouve, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 1$, f est continue à droite en 0, par parité, elle est continue à gauche en 0.

f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Se souvenir de la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point.

b) Pour $t \neq 0$, $\dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \dfrac{\text{Arctan } t - t}{t^2}$.
Utilisons encore $(*)$, pour $t > 0$:

$$-\frac{t^3}{3} \leqslant \text{Arctan } t - t \leqslant 0 \quad \text{d'où} \quad -\frac{t}{3} \leqslant \frac{\text{Arctan } t - t}{t^2} \leqslant 0$$

ce qui prouve, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\text{Arctan } t - t}{t^2} = 0$
et, par parité $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{Arctan } t - t}{t^2} = 0$: f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

c) D'autre part, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour $t \in \mathbb{R}^*$, $f'(t) = \dfrac{1}{t(1+t^2)} - \dfrac{\text{Arctan } t}{t^2}$.

3) Calculons, pour $t \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ à l'aide d'une intégration par parties :

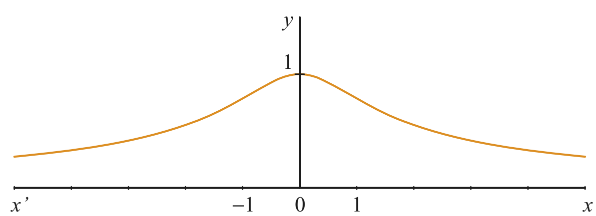
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t u \cdot \frac{2u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left[-u \cdot \frac{1}{(1+u^2)}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{(1+u^2)}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\text{Arctan } t \\
&= -\frac{1}{2}t^2 f'(t)
\end{aligned}$$

Quel est le signe de $\displaystyle\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$?

$f'(t)$ est donc du signe opposé à celui de t : f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, croissante sur $\mathbb{R}_-$.

Préciser les limites de f en $\pm\infty$.

4) De plus $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{Arctan } t = \dfrac{\pi}{2}$, d'où : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
Nous pouvons alors donner l'allure du graphe de f :



Doc. 24

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$: $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$

b) Pour tout réel x : $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$

c) Pour tout réel $x \in [-1, 1]$: $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$

d) La fonction Arcsin est continue et dérivable sur $[-1, 1]$.

e) La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

f) $\ln x$ est négligeable devant $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

g) $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

h) La fonction cosinus hyperbolique est bijective.

i) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\} \quad \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2}$

Exponentielles et logarithmes

2 Résoudre les équations suivantes :

a) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$

b) $2^{x^3} = 3^{x^2}$

c) $\log_a x = \log_x a$

d) $\log_3 x - \log_2 x = 1$

e) $2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots + 3^{x+n}$ où $n \in \mathbb{N}$

3 Démontrer que $\log_{10} 2$ n'est pas rationnel.

Fonctions hyperboliques

4 Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kb)$.

5 Simplifier les expressions suivantes :

$\operatorname{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$ $\quad$ $\operatorname{sh}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$

$\operatorname{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$ $\quad$ $\operatorname{sh}(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$

6 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

a) $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x$ $\quad$ **b)** $f(x) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} x)$

c) $f(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$ $\quad$ **d)** $f(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{th} x)$

Fonctions circulaires réciproques

7 Étudier les variations des fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative :

a) $f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ $\quad$ **b)** $f(x) = \operatorname{th} \frac{x-1}{x+1}$

c) $f(x) = (x-1)^2 \operatorname{Arctan} x$ $\quad$ **d)** $f(x) = \sqrt{1-x^2}\, e^{\operatorname{Arcsin} x}$

8 Représenter graphiquement les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \cos(\operatorname{Arccos} x) \quad \text{et} \quad g(x) = \operatorname{Arccos}(\cos x)$$

9 Calculer $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y$ en discutant suivant les signes des réels $1 - xy$ et $x + y$.

10 Simplifier les expressions :

$\cos(\operatorname{Arctan} x)$; $\quad$ $\sin(\operatorname{Arctan} x)$; $\quad$ $\tan(2\operatorname{Arctan} x)$;

$\cos(4\operatorname{Arctan} x)$; $\quad$ $\tan(\operatorname{Arcsin} x)$; $\quad$ $\tan(\operatorname{Arccos} x)$;

$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

11 Démontrer la formule de *Machin* :

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$$

12 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

a) $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Arcsin} x}{1 + \operatorname{Arcsin} x}}$

c) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

d) $f(x) = \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

13 **1)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p)$

2) Étudier la convergence et la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{Arctan}\frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Exercice posé aux oraux des concours

14 (Petites Mines 2005)

Simplifier l'expression :

$$f(x) = \cos(\operatorname{Arccos} x - \operatorname{Arcsin} x) - \sin(\operatorname{Arccos} x - \operatorname{Arcsin} x)$$

3 Équations différentielles linéaires

OBJECTIFS

- Étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre.
- Donner un exemple de résolution approchée : la méthode d'Euler.
- Étudier les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre du type polynôme-exponentiel.

INTRODUCTION

De très nombreuses applications des mathématiques conduisent à la recherche d'une fonction assujettie à une certaine relation avec ses dérivées successives. C'est ce qu'on appelle une équation différentielle. L'immense progrès scientifique des XVII^e *et* XVIII^e *siècles, en particulier en astronomie, repose sur la capacité de prévoir le comportement futur d'un système grâce à la résolution d'équations différentielles. De très nombreux noms de mathématiciens sont attachés à la théorie des équations différentielles : Euler, d'Alembert, Lagrange, Riccati, Clairaut, Bernoulli, Legendre, Cauchy... Malheureusement, il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre exactement toutes les équations différentielles. Nous devrons nous contenter d'étudier quelques types très simples, comme les équations linéaires. Par ailleurs il existe une branche des mathématiques en plein essor, l'analyse numérique, qui développe, à l'usage des physiciens et des ingénieurs, des algorithmes très performants de résolution approchée d'équations différentielles.*

1 Équations linéaires du premier ordre

1.1 • L'exemple des fonctions exponentielles

Nous avons vu que pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ est dérivable, et vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f'(t) = a\mathrm{e}^{at} = af(t)$. On dit que f est solution de l'**équation différentielle** $y' - ay = 0$.

Réciproquement, soit y une solution quelconque de cette équation ; posons pour $t \in \mathbb{R}$: $y(t) = z(t)\mathrm{e}^{at}$. En dérivant, on obtient :

$y'(t) = z'(t)\mathrm{e}^{at} + a\,z(t)\mathrm{e}^{at}$, d'où $y'(t) - a\,y(t) = z'(t)\mathrm{e}^{at}$. La fonction y vérifie l'équation différentielle si et seulement si : $z'(t) = 0$, c'est-à-dire $z(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est donc l'ensemble des fonctions y de la forme : $y(t) = C\,\mathrm{e}^{at}$.

Une solution est caractérisée par la constante C, c'est-à-dire $y(0)$.

La fonction exponentielle $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ qui vérifie $y(0) = 1$.

1.2 • Équation linéaire du premier ordre sans second membre

Inspirons-nous de ce qui précède pour résoudre l'équation différentielle :

$$y' + a(t)\,y = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

où a est une fonction continue à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle t. Comme a est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive A. La fonction f définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}$ est dérivable, et vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f'(t) = -A'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = -a(t)f(t)$. f est donc solution de l'équation **(1)**.

ATTENTION

On résistera à la tentation d'écrire $\dfrac{y'}{y} = \cdots$, car cela conduirait à ne chercher que des solutions y qui ne s'annulent pas.

Réciproquement, soit y une solution quelconque de cette équation ; posons pour $t \in \mathbb{R}$: $y(t) = z(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$. En dérivant, on obtient :

$y'(t) = z'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} - A'(t)\,z(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, d'où $y'(t) + a(t)\,y(t) = z'(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$. La fonction y vérifie l'équation différentielle si et seulement si : $z'(t) = 0$, c'est-à-dire $z(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ est l'ensemble des fonctions y de la forme : $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-A(t)}$, où A est une primitive de a.

Remarque : *Une équation de la forme $a(t)y' + b(t)y = 0$ pourra être résolue de cette façon sur un intervalle où la fonction a ne s'annule pas. Nous verrons plus loin comment « recoller », lorsque c'est possible, deux solutions de part et d'autre d'un point où $a(t) = 0$.*

1.3 • Équation linéaire du premier ordre avec second membre

Considérons maintenant l'équation différentielle :

$$y' + a(t)\,y = b(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a et b sont deux fonctions continues à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle t. Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation (1). On peut écrire :

$$\begin{cases} y_1' + a(t)\,y_1 = b(t) \\ y_2' + a(t)\,y_2 = b(t) \end{cases}$$

En retranchant membre à membre, on obtient :

$$y_1' - y_2' + a(t)(y_1 - y_2) = 0$$

La fonction $y_1 - y_2$ vérifie l'équation sans second membre :

$$y' + a(t)y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

que nous avons déjà appris à résoudre au paragraphe précédent.

Réciproquement, si y_0 est une solution quelconque de **(2)** et y_1 une solution de **(1)**, on peut écrire :

$$\begin{cases} y_1' + a(t)\,y_1 = b(t) \\ y_0' + a(t)\,y_0 = 0 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$y_1' + y_0' + a(t)(y_1 + y_0) = b(t)$$

c'est-à-dire que la fonction $y_1 + y_0$ vérifie l'équation **(1)**.

On obtient donc toutes les solutions de l'équation **(1)** en ajoutant à y_1 une solution quelconque de l'équation **(2)**. On peut énoncer :

Théorème 1

La solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + a(t)\,y = b(t) \qquad \textbf{(1)}$$

est la somme d'une solution particulière de **(1)** et de la solution générale de l'équation sans second membre associée :

$$y' + a(t)\,y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Remarque *: La structure des solutions fait penser à celle d'une droite D : l'ensemble des points de D est obtenu à partir d'un point particulier A en ajoutant un vecteur quelconque de la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$.*

Il reste à déterminer une solution particulière de l'équation. On pourra souvent reconnaître une solution évidente.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle : $y' - ty = 2t$ **(1)**.

L'équation sans second membre associée s'écrit : $y' - ty = 0$; sa solution générale est $y = Ce^{\frac{t^2}{2}}$.

Une solution évidente de l'équation **(1)** est : $y = -2$.

La solution générale est donc :

$$y = -2 + Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

On peut aussi utiliser le **principe de superposition** : si y_1 est une solution de l'équation $y' - a(t)y = b_1(t)$ et y_2 une solution de l'équation $y' - a(t)y = b_1(t)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $y' - a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle : $y' - ty = t^3$ **(1)**.

Remarquons que $t^3 = 2t - (2t - t^3)$.

L'équation $y' - ty = 2t$ a pour solution évidente : $y_1 = -2$.

L'équation $y' - ty = 2t - t^3$ a pour solution évidente : $y_2 = t^2$.

L'équation **(1)** a donc pour solution particulière : $y = y_1 - y_2 = -2 - t^2$.

La solution générale est donc :

$$y = -2 - t^2 + Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Pour s'entraîner : ex. 2

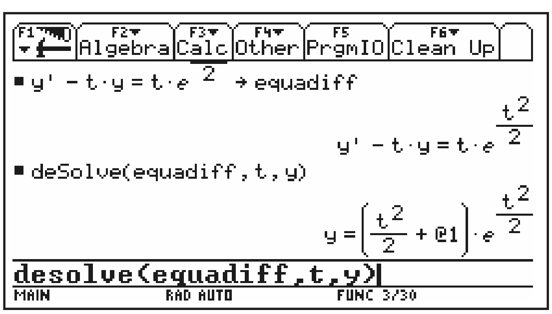
1.4 • Méthode de la variation de la constante

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une solution évidente, même par le principe de superposition, on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' + a(t)y = b(t)$ sous la forme : $y = C(t)e^{-A(t)}$, c'est-à-dire en remplaçant dans l'expression de la solution générale de l'équation sans second membre la constante C par une fonction $C(t)$, que l'on supposera dérivable.

On a donc : $y'(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)}$.

En reportant dans l'équation différentielle, il reste : $C'(t)e^{-A(t)} = b(t)$, d'où :

$$C'(t) = b(t)e^{A(t)}$$



On peut donc trouver la fonction C par une recherche de primitives.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - ty = te^{\frac{t^2}{2}} \qquad \textbf{(1)}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est : $y = Ce^{\frac{t^2}{2}}$; cherchons une solution de l'équation **(1)** sous la forme : $y = C(t)e^{\frac{t^2}{2}}$. En reportant dans l'équation différentielle, il reste : $C'(t) = t$, d'où : $C(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

Remarque *: Il est inutile d'écrire une constante d'intégration, puisqu'on cherche seulement une solution particulière ; cette constante apparaîtra lorsqu'on ajoutera la solution générale de l'équation sans second membre.*

La solution générale de l'équation (1) est donc :

$$y = \frac{t^2}{2}e^{\frac{t^2}{2}} + Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

1.5 • Condition initiale

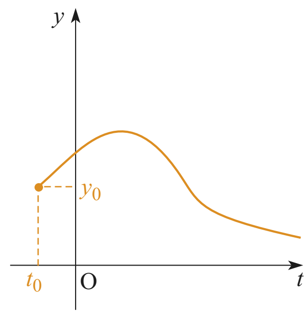
La solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dépend d'une constante.

$$y(t) = y_1(t) + Ce^{-A(t)}$$

Pour déterminer cette constante, il suffit de connaître une **condition initiale**, c'est-à-dire la valeur de la fonction en un point donné : $y(t_0) = y_0$ (*Doc.* 1).

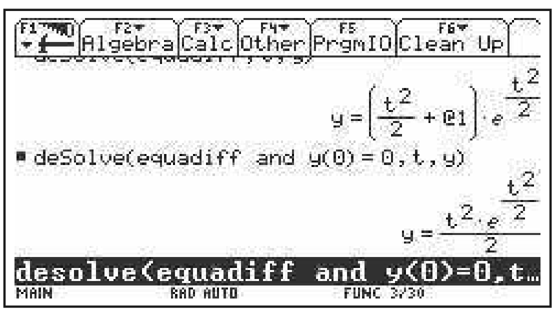
On doit avoir : $y_0 = y_1(t_0) + Ce^{-A(t_0)}$, d'où : $C = (y_0 - y_1(t_0))e^{A(t_0)}$.

D'où le résultat :



Doc. 1 Solution déterminée par une condition initiale

> **Théorème 2**
> Soit l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$. Une condition initiale de la forme $y(t_0) = y_0$ détermine une solution et une seule.



Remarque *: Si l'équation est de la forme :*

$$a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

la condition initiale doit être choisie telle que $a(t_0) \neq 0$; *l'existence et l'unicité de la solution sont garanties dans tout intervalle contenant* t_0 *sur lequel la fonction* a *ne s'annule pas, mais pas nécessairement sur une réunion de tels intervalles.*

Exemple : Étudier l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' \cos t + 2y \sin t = 1 + \sin^2 t$, vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

Considérons l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, sur lequel la fonction $\cos t$ ne s'annule pas. Sur I, l'équation devient :

$$y' + 2y \tan t = \frac{1 + \sin^2 t}{\cos t}$$

L'équation sans second membre $y' + 2y \tan t = 0$, admet pour solution générale : $y = C \cos^2 t$. Une solution évidente de l'équation complète est : $y = \sin t$. D'où la solution générale sur I :

$$y = \sin t + C \cos^2 t$$

La condition initiale $y(0) = 0$ détermine une solution unique sur I :

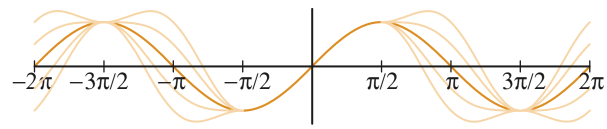
$$y = \sin t$$

Cependant, en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$, cette fonction se prolonge en une fonction continue et dérivable, de dérivée nulle. Ainsi, toute fonction de la forme :

$$y = \sin t + C_k \cos^2 t \quad \text{où} \quad C_k = \mathrm{C^{te}} \quad \text{sur} \quad \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad \text{et} \quad C_0 = 0$$

est solution sur tout $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale. L'unicité de la solution se perd aux points singuliers $t = \pm\frac{\pi}{2}$ (*Doc.* 2).

Pour s'entraîner : ex. 3 et 4



Doc. 2.

2 Résolution approchée

2.1 • Expression des solutions sous forme intégrale

La méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre fait appel à deux reprises à une recherche de primitives :

– dans la résolution de l'équation sans second membre $y' + a(t)y = 0$, où l'on cherche $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$;

– dans la détermination d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante, où l'on cherche $C(t) = \int b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t$.

Il arrive souvent qu'on ne puisse exprimer explicitement ces primitives, et que les solutions fassent intervenir des intégrales qu'on ne sait pas calculer.

Exemple : Considérons l'équation : $y' - \mathrm{e}^{-t^2} y = 1$ et la condition initiale $y(0) = 0$.

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y = C \exp\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)$$

Par la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de la forme :

$$y = C(t) \exp\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)$$

On obtient :

$$C'(t) = \exp\left(-\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)$$

d'où :

$$C(t) = \int \exp\left(-\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

et enfin :

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\int \exp\left(-\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

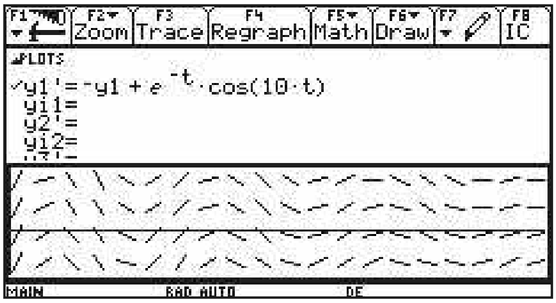
La condition initiale détermine une solution unique :

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^v \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v$$

Il est clair que de telles solutions sont peu exploitables. C'est pourquoi il est intéressant de disposer de méthodes de résolution approchée, qui faute de donner la solution exacte en donneront une approximation aussi précise que l'on veut.

Pour s'entraîner : ex. 5

2.2 • Interprétation graphique d'une équation différentielle du premier ordre



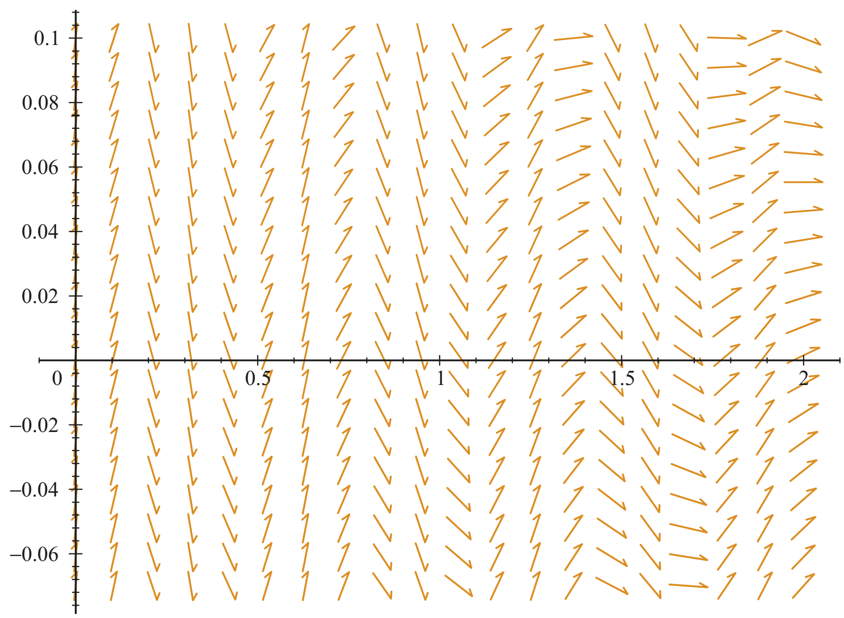
La calculatrice TI-92+/Voyage 200 permet aussi cette représentation, dans le MODE DIFF EQUATIONS.

Considérons une équation différentielle (linéaire ou non) qui peut s'écrire sous la forme $y' = f(t, y)$, où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Graphiquement, ceci signifie qu'en tout point (t, y) du plan, l'équation différentielle indique la pente de la tangente de toute courbe solution passant par ce point.

Le logiciel Maple permet de visualiser ce « champ de pentes » : soit par exemple l'équation différentielle $y' = -y + \mathrm{e}^{-t} \cos 10\, t$ (*Doc.* 3) ;

```
> f:=(t,y)->-y+exp(-t)*cos(10*t) ;
> dfieldplot(diff(y(t),t)
             =f(t,y(t)),y(t),t=0..2,y=-0.07..0.1) ;
```



Doc. 3

Sous certaines conditions (qui sont réalisées en particulier pour les équations linéaires), une condition initiale $y(t_0) = y_0$ détermine une solution unique. On peut imaginer qu'on lâche un bouchon dans le courant figuré ci-dessus, et que l'équation différentielle permet de prévoir la trajectoire du bouchon.

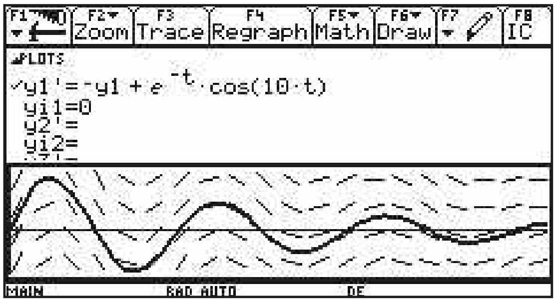
Dans notre exemple, nous savons calculer la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$:

La solution générale de l'équation sans second membre $y' + y = 0$ est :

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-t}$$

La méthode de variation de la constante donne : $C'(t) = \cos 10\, t$, d'où :

$$C(t) = \frac{1}{10} \sin 10\, t$$



Sur la calculatrice, il suffit d'introduire la condition initiale : $yi1 = 0$.

La solution générale de l'équation donnée est donc :

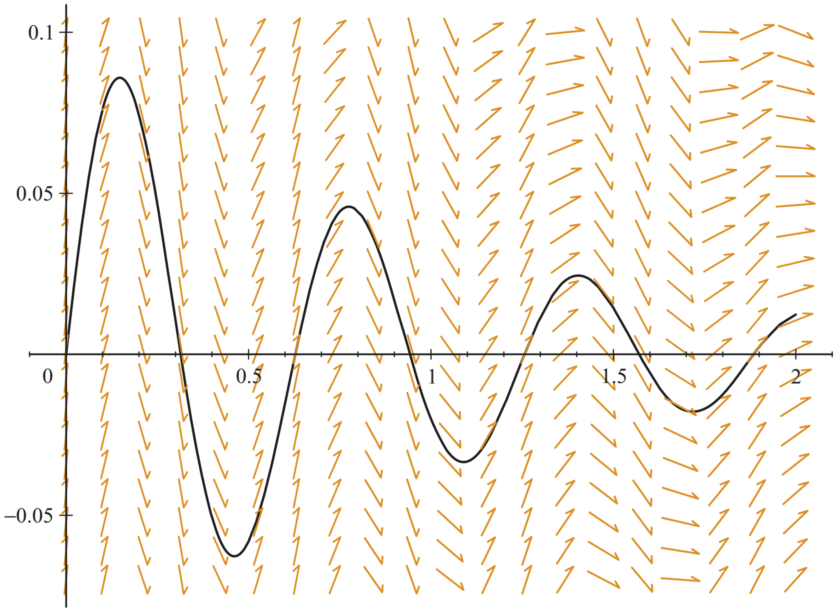
$$y(t) = \left(\frac{1}{10}\sin 10\,t + C\right)\mathrm{e}^{-t}$$

La condition initiale impose $C = 0$, d'où :

$$y(t) = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t}\sin 10\,t$$

Représentons cette fonction sur la figure précédente (*Doc.* 4) :

Leonhard Euler, 1707-1783, qui a laissé une œuvre gigantesque en arithmétique, géométrie et analyse



Doc. 4

On vérifie qu'en tout point, la tangente à la courbe solution est bien celle qui est déterminée par l'équation différentielle.

2.3 • Méthode d'Euler

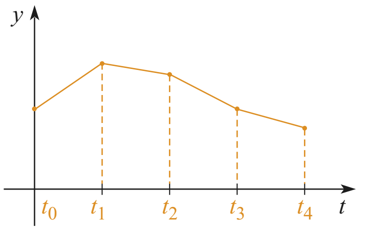
L'étude précédente donne l'idée d'une méthode très simple de résolution approchée, qui est due à Leonhard Euler (vers 1750).

La méthode consiste à partir de $t = t_0$, et à avancer pas à pas, en évaluant la solution aux points $t_k = t_0 + kh$, pour $k \in \mathbb{N}$ (*Doc.* 5).

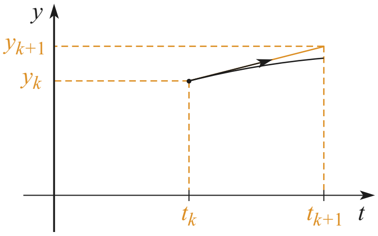
Si le pas h est suffisamment petit, on peut considérer que $y(t_{k+1})$ est approximativement égal à $y(t_k) + hy'(t_k)$, soit en tenant compte de l'équation différentielle à $y(t_k) + hf(t_k, y(t_k))$. Ceci revient à confondre sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ la courbe et sa tangente (*Doc.* 6). Posons donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

La ligne polygonale joignant les points (t_k, y_k) sera une approximation de la courbe représentative de la solution.



Doc. 5



Doc. 6

Remarque *: En principe, plus le pas est petit, plus la méthode est précise. Cependant, si le pas est choisi trop petit, le nombre d'itérations pour atteindre un point fixé est très grand et les erreurs d'arrondi accumulées peuvent nuire à la précision. Plusieurs essais seront parfois nécessaires pour choisir un pas raisonnable.*

APPLICATION 1

Mise en œuvre de la méthode d'Euler avec MAPLE

Reprenons l'exemple précédent :

$$y' + y = e^{-t}\cos 10\,t$$

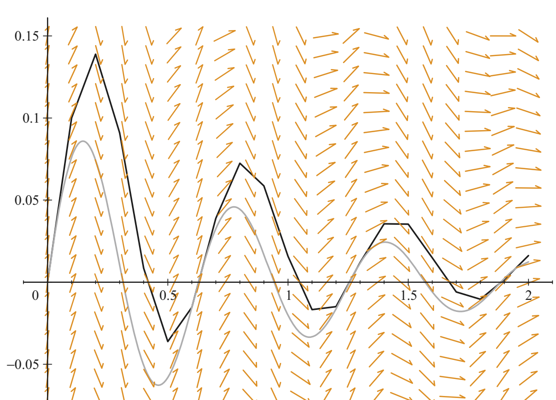
avec la condition initiale $y(0) = 0$, dont on connaît la solution exacte.

La procédure suivante trace l'approximation d'Euler pour l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, avec le pas h, la condition initiale $y(t_0) = y_0$, jusqu'à la valeur t_1 :

```
> Euler :=proc(f,h,t0,y0,t1)
> local t,y,s ;
> s :=NULL ;
> y :=y0 ;
> for t from t0 to t1 by h do
> s :=s,[t,y] ;
> y :=y+h*f(t,y) ;
> od ;
> plot([s],t0..t1) ;
> end ;
```

Appliquons cette procédure à notre équation, avec un pas $h = 0.1$:

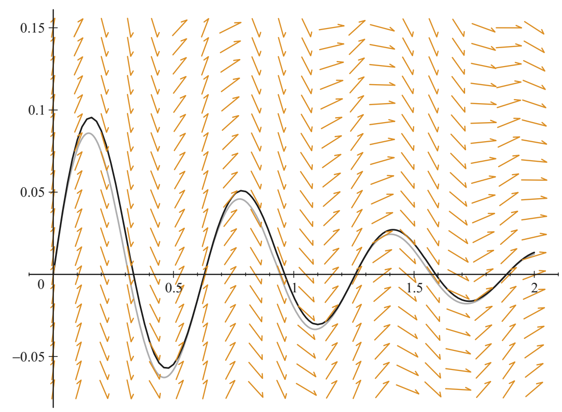
```
> f :=(t,y)->-y+exp(-t)*cos(10*t) ;
> p1 :=Euler(f,0.1,0,0,2) :
> p2 :=plot(t->exp(-t)*sin(10*t)/10,0..2) :
> with(plots) :
> display(p1,p2) ;
```



Doc. 7

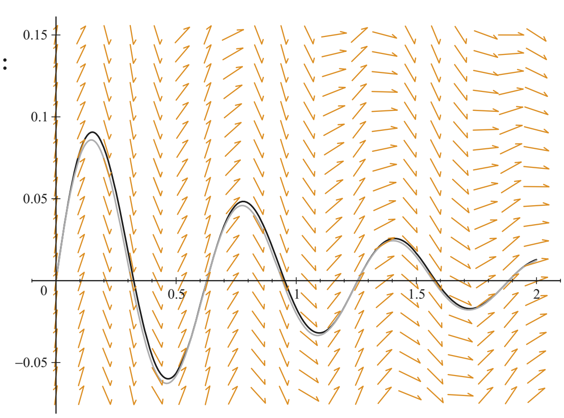
Les erreurs sont importantes ; la solution approchée est en retard par rapport à la solution exacte qu'elle « rattrape » parfois à la faveur des changements de concavité (*Doc.* 7).

Recommençons avec un pas $h = 0.02$ (*Doc.* 8) :



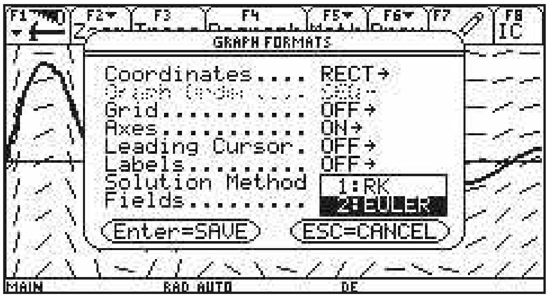
Doc. 8

Puis avec un pas $h = 0.01$ (*Doc.* 9) :



Doc. 9

La réduction du pas améliore considérablement la précision.



Sur la TI92+/Voyage 200, le tracé d'une solution utilise précisément la méthode d'Euler, ou une variante plus sophistiquée : la méthode de Runge-Kutta. Le pas est donné dans la variable *tstep*.

3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

L'équation différentielle :

$$a y'' + b y' + c y = d(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b, c sont des constantes, réelles ou complexes ($a \neq 0$), et d une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.**

3.1 • Structure des solutions

Théorème 3

La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$a y'' + b y' + c y = d(t) \qquad \textbf{(1)}$$

est la somme d'une solution particulière de **(1)** et de la solution générale de l'équation sans second membre associée :

$$a y'' + b y' + c y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

La démonstration est exactement la même que pour le premier ordre.

3.2 • Résolution de l'équation sans second membre

$$a y'' + b y' + c y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

3.1 • Solutions complexes

Cherchons des solutions complexes exponentielles : $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
On a alors : $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$ et $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$. D'où :

$$a y'' + b y' + c y = (a\lambda^2 + b\lambda + c)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Donc $y = \mathrm{e}^{\lambda t}$ est solution de l'équation **(2)** si et seulement si :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{(équation caractéristique)}$$

Pour résoudre cette équation du second degré, on calcule son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$. Distinguons deux cas :

• Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes λ_1 et λ_2. Les fonctions $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ sont solutions de l'équation **(2)**. Toute combinaison linéaire de ces deux fonctions à coefficients complexes est encore solution.

Réciproquement, soit y une solution quelconque de l'équation **(2)**, posons $y = z\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$. La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y' = (z' + \lambda_1 z)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \quad \text{et} \quad y'' = (z'' + 2\lambda_1 z' + \lambda_1^2 z)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$$

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = \left(a\,z'' + (2a\lambda_1 + b)z' + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)z\right)\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = 0$$

Or

$$2a\lambda_1 + b = a(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{et} \quad a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0$$

D'où :

$$z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en z'. On a donc successivement :

$$z' = K\mathrm{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

$$z = C_2\mathrm{e}^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C_1$$

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

L'ensemble des solutions de l'équation **(2)** est donc l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes des deux fonctions exponentielles $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.

• Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $\lambda_0 = -\dfrac{b}{2a}$. La fonction $y_0 = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ est solution de l'équation **(2)**. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et z la fonction définie par $y = z\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$. Le calcul précédent montre que y est solution de l'équation **(2)** si et seulement si $z'' = 0$, c'est-à-dire $z = C_1 t + C_2$. L'ensemble des solutions de **(2)** est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$y = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

3.2 • Solutions réelles quand $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Si les coefficients de l'équation différentielle sont réels et que l'on cherche les solutions réelles, on est amené à distinguer trois cas :

• Si $\Delta > 0$, les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique sont réelles. L'ensemble des solutions réelles de l'équation **(2)** est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions exponentielles $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

• Si $\Delta = 0$, la racine double λ_0 de l'équation caractéristique est réelle. L'ensemble des solutions réelles de l'équation **(2)** est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions $y_0 = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ et $ty_0 = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$.

$$y = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique sont non réelles et conjuguées l'une de l'autre. Écrivons-les : $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Une solution réelle de l'équation **(2)** est de la forme :

$$y = K_1\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} + K_2\,\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)t} \quad \text{avec} \quad K_2 = \overline{K_1}$$

C'est-à-dire :

$$y = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(K_1(\cos\beta t + i\sin\beta t) + \overline{K_1}(\cos\beta t - i\sin\beta t)\right)$$

soit :

$$y = \mathrm{e}^{\alpha t}\left((K_1 + \overline{K_1})\cos\beta t + i(K_1 - \overline{K_1})\sin\beta t\right)$$

Les constantes $C_1 = K_1 + \overline{K_1}$ et $C_2 = i(K_1 - \overline{K_1})$ sont réelles. D'où :

$$y = \mathrm{e}^{\alpha t}\,(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation **(2)** est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des fonctions $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$ et $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$.

En résumé, l'ensemble E des solutions réelles de l'équation **(2)** est dans tous les cas l'ensemble des combinaisons linéaires de deux solutions y_1 et y_2, non proportionnelles. Cette structure fait penser à celle de l'ensemble des vecteurs d'un plan, combinaisons linéaires de deux vecteurs de base non colinéaires. On dit que E est un espace vectoriel de dimension 2, et que (y_1, y_2) est une base de E (voir le chapitre 23 : *Dimension des espaces vectoriels*).

Tableau récapitulatif :

$\Delta = b^2 - 4ac$	**racines**	**base**	**solution générale**
$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,,\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t})$	$C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$(t\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,,\ \mathrm{e}^{\lambda_0 t})$	$\mathrm{e}^{\lambda_0 t}(C_1\,t + C_2)$
$\Delta < 0$	$\alpha + i\beta\,,\ \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$	$(\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,,\ \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t)$	$\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$

3.3 • Résolution de l'équation avec second membre de la forme $P(t)\mathrm{e}^{mt}$

Nous chercherons à résoudre l'équation complète uniquement lorsque le second membre est de la forme $P(t)\mathrm{e}^{mt}$ où P est un polynôme et m un complexe donné.

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = P(t)\,\mathrm{e}^{mt} \qquad \textbf{(1)}$$

Remarque *: Le principe de superposition s'applique encore, c'est-à-dire que si le second membre est la somme de deux fonctions de ce type, il suffira d'ajouter les solutions correspondantes.*

Nous savons que la solution générale de **(1)** est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre **(2)**, que nous avons étudiée dans le paragraphe précédent.

L'idée est de chercher une solution particulière de la même forme que le second membre, c'est-à-dire $y = Q(t)\,\mathrm{e}^{mt}$, où Q est un polynôme à déterminer.

$$\begin{aligned} y &= Q(t)\,\mathrm{e}^{mt} \\ y' &= [Q'(t) + mQ(t)]\mathrm{e}^{mt} \\ y'' &= [Q''(t) + 2mQ'(t) + m^2Q(t)]\mathrm{e}^{mt} \end{aligned}$$

D'où :

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = [a\,Q''(t) + (2am+b)Q'(t) + (am^2+bm+c)Q(t)]\mathrm{e}^{mt}.$$

y est solution de l'équation (1) si et seulement si :

$$a\,Q''(t) + (2am+b)Q'(t) + (am^2+bm+c)Q(t) = P(t)$$

- Si $am^2 + bm + c \neq 0$, on cherchera à l'aide de coefficients indéterminés un polynôme Q de même degré que P.
- Si $\begin{cases} am^2 + bm + c = 0 \\ 2am + b \neq 0 \end{cases}$ (c'est-à-dire si m est une racine simple de l'équation caractéristique), on devra chercher un polynôme Q de degré $\deg(P) + 1$ vérifiant :
$$a\,Q''(t) + (2am+b)Q'(t) = P(t).$$
- Si $\begin{cases} am^2 + bm + c = 0 \\ 2am + b = 0 \end{cases}$ (c'est-à-dire si m est racine double de l'équation caractéristique), on devra chercher un polynôme Q de degré $\deg(P)+2$ vérifiant $a\,Q''(t) = P(t)$ (on l'obtient dans ce cas par deux intégrations successives).

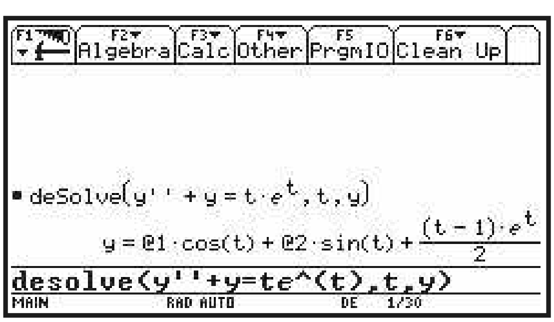
Exemple :

1) $y'' + y = t\,\mathrm{e}^t$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$. La solution générale de l'équation sans second membre est $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

On cherche une solution particulière de la forme $y = Q(t)\,\mathrm{e}^t$,

$$\begin{aligned} y' &= [Q'(t) + Q(t)]\,\mathrm{e}^t \\ y'' &= [Q''(t) + 2Q'(t) + Q(t)]\,\mathrm{e}^t \\ y'' + y &= [Q''(t) + 2Q'(t) + 2Q(t)]\,\mathrm{e}^t = t\,\mathrm{e}^t \end{aligned}$$



Comme $m = 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche Q tel que $\deg Q = \deg P = 1$:

Posons $Q(t) = at + b$; $Q'(t) = a$; $Q''(t) = 0$.

On doit avoir :

$$2a + 2(at + b) = t$$

soit : $$a = \frac{1}{2} \quad ; \quad b = -\frac{1}{2}$$

En définitive :

$$y = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t + C_1 \cos t + C_2 \sin t \quad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2) $y'' + y = \cos t$

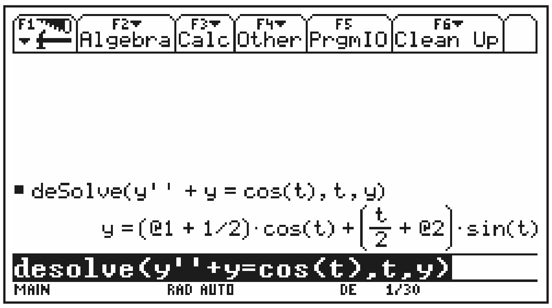
L'équation sans second membre est la même. Le second membre est la partie réelle de e^{it}. Cherchons une solution particulière complexe de la forme $y = Q(t)\,e^{it}$, dont on calculera ensuite la partie réelle.

$$\begin{aligned} y &= Q(t)\,e^{it} \\ y' &= [Q'(t) + iQ(t)]\,e^{it} \\ y'' &= [Q''(t) + 2iQ'(t) - Q(t)]\,e^{it} \\ y'' + y &= [Q''(t) + 2iQ'(t)]\,e^{it} = e^{it} \end{aligned}$$

$m = i$ étant racine simple de l'équation caractéristique, on cherche Q tel que $\deg Q = \deg P + 1 = 1$:

Posons
$$Q(t) = at + b\,;\quad Q'(t) = a\,;\quad Q''(t) = 0.$$

On obtient :



$$2ia = 1\,,\qquad \text{soit}\qquad a = -\frac{i}{2}.$$

Une solution particulière complexe est donc :

$$y = -\frac{i}{2}t\,e^{it} = \frac{t}{2}\sin t - \frac{it}{2}\cos t$$

La solution générale réelle est :

$$y = \frac{t}{2}\sin t + C_1\cos t + C_2\sin t$$

***Remarque** : On a choisi $b = 0$ pour obtenir une solution particulière. On aurait pu choisir pour b une valeur quelconque, que l'on retrouve dans la constante C_2.*

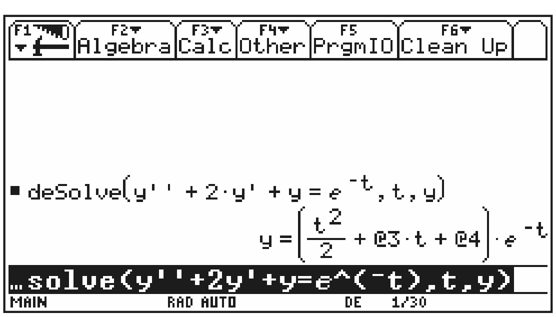
3) $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$; elle admet une racine double -1. La solution générale de l'équation sans second membre est $y = (C_1 t + C_2)e^{-t}$. Cherchons une solution particulière de la forme $y = Q(t)\,e^{-t}$.

$$\begin{aligned} y &= Q(t)\,e^{-t} \\ y' &= [Q'(t) - Q(t)]e^{-t} \\ y'' &= [Q''(t) - 2Q'(t) + Q(t)]e^{-t} \end{aligned}$$

D'où :

$$y'' + 2y' + y = Q''(t)e^{-t} = e^{-t}.$$



$m = -1$ étant racine double de l'équation caractéristique, on cherche Q tel que $\deg Q = \deg P + 2 = 2$. $Q''(t) = 1$ on peut choisir :

$$Q'(t) = t \qquad Q(t) = \frac{t^2}{2}$$

Une solution particulière de l'équation différentielle est donc : $y = \dfrac{t^2}{2}\,e^{-t}$.

La solution générale est :

$$y = \frac{t^2}{2}\,e^{-t} + (C_1 t + C_2)e^{-t} = \left(\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\right)e^{-t}$$

***Remarque** : Ici encore, on a choisi nuls les coefficients de degré 1 et 0 du polynôme Q. On aurait pu choisir un couple quelconque (C_1, C_2).*

APPLICATION 2

Oscillateur amorti

On rencontre fréquemment en physique des systèmes obéissant à une équation différentielle du type :

$$y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = \mathrm{e}^{i\omega t} \qquad \text{où} \quad (k, \omega_0, \omega) \in \mathbb{R}_+^{*3}$$

Ici, la variable t représente le temps ; ω_0 est la pulsation propre du système, ω est la pulsation de la sollicitation extérieure et k est le coefficient d'amortissement.

On ne s'intéressera pas à la solution de l'équation sans second membre, qui comporte un facteur en e^{-kt}, et qui tend donc rapidement vers 0 quand t tend vers $+\infty$ (c'est ce qu'on appelle le régime transitoire). Il existe une solution particulière de la forme $a\mathrm{e}^{i\omega t}$ $(a \in \mathbb{C})$ (régime permanent), et on veut étudier le module et l'argument de a, qui représentent l'amplitude et le déphasage de la « réponse » du système.

$$y = a\mathrm{e}^{i\omega t} \qquad y' = ai\omega\mathrm{e}^{i\omega t} \qquad y'' = -a\omega^2\mathrm{e}^{i\omega t}$$

y est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$-a\omega^2 + 2ai\omega k + a\omega_0^2 = 1$$

c'est-à-dire :

$$a = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega k}$$

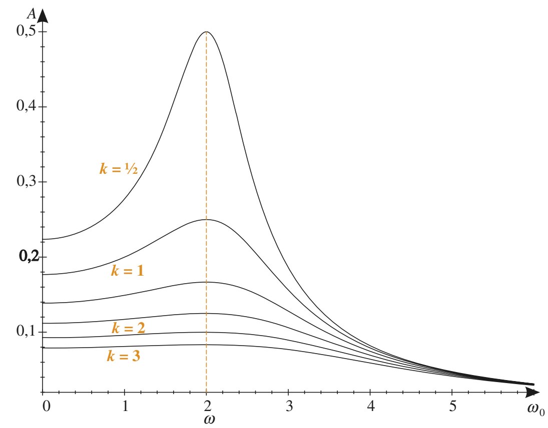
Si on pose $a = A\mathrm{e}^{i\varphi}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 k^2}}$$

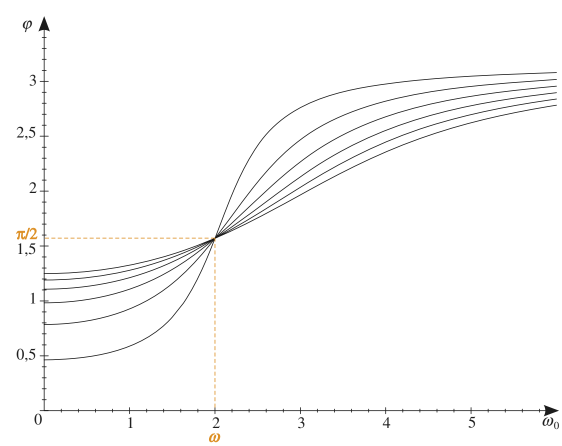
et

$$\tan\varphi = \frac{2\omega k}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Les courbes suivantes (*Doc.* 10 et *Doc.* 11) représentent les variations de A et φ en fonction de ω_0 pour $\omega = 2$ et diverses valeurs du coefficient d'amortissement k. On observe pour $\omega_0 = \omega$ un maximum de l'amplitude A, qui correspond au phénomène de **résonance**. Ce maximum est d'autant plus élevé que k est faible.



Doc. 10



Doc. 11

3.4 • Conditions initiales

Théorème 4
L'équation différentielle $a\,y'' + b\,y' + c\,y = d(t)$ possède une solution et une seule vérifiant la condition initiale : $y(t_0) = y_0$; $y'(t_0) = y'_0$.

Démonstration
Reprenons les deux cas qui se présentent dans la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation sans second membre :

1) $\Delta \neq 0$. La solution générale est de la forme :

$$y = y_1 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

On cherche des constantes C_1 et C_2 vérifiant :

$$\begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 e^{\lambda_2 t_0} = y_0 - y_1(t_0) \\ C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} = y'_0 - y'_1(t_0) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Son déterminant est :

$$D = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & e^{\lambda_2 t_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) t_0} \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique.

2) $\Delta = 0$. La solution générale est de la forme :

$$y = y_1 + C_1\, t\, e^{\lambda_0 t} + C_2 e^{\lambda_0 t}$$

Le système devient : $\begin{cases} C_1 t_0 e^{\lambda_0 t_0} + C_2 e^{\lambda_0 t_0} = y_0 - y_1(t_0) \\ C_1 (1 + \lambda_0 t_0) e^{\lambda_0 t_0} + C_2 \lambda_0 e^{\lambda_0 t_0} = y'_0 - y'_1(t_0) \end{cases}$

Son déterminant est : $D = \begin{vmatrix} t_0 e^{\lambda_0 t_0} & e^{\lambda_0 t_0} \\ (1 + \lambda_0 t_0) e^{\lambda_0 t_0} & \lambda_0 e^{\lambda_0 t_0} \end{vmatrix} = -e^{2\lambda_0 t_0} \neq 0$

Le système a encore une solution unique.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = \cos t$, avec la condition initiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

L'équation caractéristique est : $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$. Elle a deux solutions complexes conjuguées : $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit : $y = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.

On cherche une solution particulière y_1 de la forme $\operatorname{Re}\,(Q(t)\,e^{it})$, où Q est un polynôme complexe constant, c'est-à-dire : $y_1 = a \cos t + b \sin t$ avec a et b réels.

$$\begin{aligned} y_1 &= a \cos t + b \sin t \\ y'_1 &= -a \sin t + b \cos t \\ y''_1 &= -a \cos t - b \sin t \end{aligned}$$

d'où : $y''_1 + 2y'_1 + 5y_1 = (4a + 2b) \cos t + (-2a + 4b) \sin t$.

y_1 vérifie l'équation différentielle si et seulement si $\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ -2a + 4b = 0 \end{cases}$,

c'est-à-dire $a = \dfrac{1}{5}$, $b = \dfrac{1}{10}$: $y_1 = \dfrac{1}{5} \cos t + \dfrac{1}{10} \sin t$.

La solution générale de l'équation est donc :

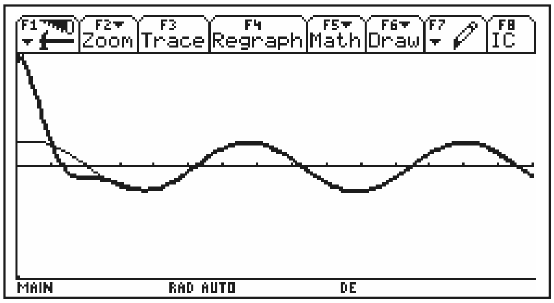
$$y = \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + e^{-t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)$$

On obtient :

$$y(0) = \frac{1}{5} + C_1 \quad \text{et} \quad y'(0) = \frac{1}{10} - C_1 + 2C_2.$$

La condition initiale est vérifiée pour $C_1 = \frac{4}{5}$ et $C_2 = \frac{7}{20}$.
D'où en définitive :

$$y = \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + e^{-t}\left(\frac{4}{5}\cos 2t + \frac{7}{20}\sin 2t\right)$$



Représentons graphiquement la solution avec la TI Voyage 200.

On observe que le deuxième terme, majoré en valeur absolue par e^{-t}, devient très vite très petit ; à partir de $t = 3$, la solution est quasiment confondue avec la solution particulière $y_1 = \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t$, périodique de période 2π : c'est le **régime permanent**. Sur l'intervalle $[0, 3]$, la solution est plus chaotique : c'est le **régime transitoire**.

Pour s'entraîner : ex. 7 à 9

MÉTHODE

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre :

- sans second membre $y' + a(t)y = 0$, on calcule une primitive A de la fonction a ; l'ensemble des solutions est :

$$y(t) = Ce^{-A(t)}$$

- avec second membre $y' + a(t)y = b(t)$, on ajoute une solution particulière y_1 et la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y(t) = y_1(t) + Ce^{-A(t)}$$

  Pour obtenir la solution particulière y_1, on peut :
  – chercher une solution évidente ;
  – utiliser la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire chercher une solution de la forme $y_1(t) = C(t)e^{-A(t)}$.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

- sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$, on résout l'équation caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$; si cette équation possède :
  – deux racines réelles λ_1 et λ_2, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$$

– une racine réelle double λ_0, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 t\, e^{\lambda_0 t}$$

– deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, la solution générale de l'équation différentielle est :

$$y = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right)$$

- avec second membre de la forme $P(t)e^{mt}$, où P est un polynôme et $m \in \mathbb{C}$, on ajoute une solution particulière y_1 et la solution générale de l'équation sans second membre :

$$y(t) = y_1(t) + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

La solution particulière y_1 sera cherchée sous la forme $y_1(t) = Q(t)e^{mt}$, où Q est un polynôme :

– de même degré que P si m n'est pas racine de l'équation caractéristique ;

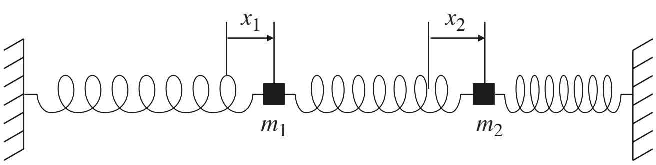
– de degré $\deg P + 1$ si m est racine simple de l'équation caractéristique ;

– de degré $\deg P + 2$ si m est racine double de l'équation caractéristique.

Exercice résolu

SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Deux masses identiques sont reliées à deux points fixes et entre elles, par trois ressorts de même raideur.



On admet que les abscisses x_1 et x_2 des deux masses, repérées par rapport à leur position d'équilibre respective, sont, en fonction du temps t, solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x_1''(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2''(t) = x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

(des unités convenables ayant été choisies).

1 *On pose :*

$$y(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2} \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$$

Établir une équation différentielle vérifiée par $y(t)$ et une équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Résoudre ces équations différentielles.

2 *En déduire les fonctions* $x_1(t)$ *et* $x_2(t)$ *avec les conditions initiales :*

$$x_1(0)=0\ ;\ x_1'(0)=0\ ;\ x_2(0)=1\ ;\ x_2'(0)=0$$

Ces fonctions sont-elles périodiques ?

Conseils

Effectuer des combinaisons linéaires des deux équations du système.

On peut exprimer x_1 et x_2 comme combinaisons linéaires de y et z.

Les périodes des fonctions y et z n'ont pas de multiple commun, ce qui permet de supposer que x_1 et x_2 ne sont pas périodiques. Le démontrer rigoureusement en raisonnant par l'absurde.

Solution

1) En retranchant puis en ajoutant membre à membre les deux équations du système, on obtient :

$$\begin{cases} 2y''(t) = -3x_1(t) + 3x_2(t) = -6y(t) \\ 2z''(t) = -x_1(t) - x_2(t) = -2z(t) \end{cases}$$

La fonction y est donc solution de l'équation différentielle $y'' + 3y = 0$, et la fonction z est solution de $z'' + z = 0$. Il existe donc des constantes A_1, A_2, B_1, B_2 telles que :

$$\begin{cases} y(t) = A_1 \cos\sqrt{3}t + A_2 \sin\sqrt{3}t \\ z(t) = B_1 \cos t + B_2 \sin t \end{cases}$$

2) On en déduit :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) + z(t) \\ &= A_1 \cos\sqrt{3}t + A_2 \sin\sqrt{3}t + B_1 \cos t + B_2 \sin t \\ x_2(t) &= -y(t) + z(t) \\ &= -A_1 \cos\sqrt{3}t - A_2 \sin\sqrt{3}t + B_1 \cos t + B_2 \sin t \end{aligned}$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_1'(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_2'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ \sqrt{3}A_2 + B_2 = 0 \\ -A_1 + B_1 = 1 \\ -\sqrt{3}A_2 + B_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad (A_1, A_2, B_1, B_2) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

D'où en définitive :

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{1}{2}\cos\sqrt{3}t + \dfrac{1}{2}\cos t \\ x_2(t) = \dfrac{1}{2}\cos\sqrt{3}t + \dfrac{1}{2}\cos t \end{cases}$$

Ces fonctions sont combinaisons linéaires de fonctions périodiques de périodes respectives $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et 2π, dont le quotient est irrationnel. Montrons que les fonctions x_1 et x_2 ne sont pas périodiques. Supposons qu'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$x_1(t+T) = x_1(t)$, c'est-à-dire :

$$-\cos\sqrt{3}(t+T) + \cos(t+T) = -\cos\sqrt{3}t + \cos t$$

En dérivant deux fois cette égalité, on obtient :

$$3\cos\sqrt{3}(t+T) - \cos(t+T) = 3\cos\sqrt{3}t - \cos t$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités et en divisant par 2 :

$$\cos\sqrt{3}(t+T) = \cos\sqrt{3}t$$

d'où l'on tire :

$$\cos(t+T) = \cos t$$

T doit donc être un multiple entier de $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et de 2π, ce qui est impossible car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

L'ensemble des fonctions périodiques n'est donc pas stable par combinaison linéaire.

Les solutions, bien que combinaisons linéaires de deux fonctions périodiques, ne sont pas périodiques. Le système des deux masses ne repasse jamais par le même état de position et de vitesse.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0.

b) La somme de deux solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ est encore solution de cette équation.

c) Le produit de deux solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ est encore solution de cette équation.

d) Toute solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ peut être obtenue à partir d'une solution particulière en ajoutant une solution quelconque de l'équation $y' + a(t)y = 0$.

e) La méthode d'Euler donne la solution exacte d'une équation différentielle linéaire vérifiant une condition initiale.

f) Si l'équation $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ a un discriminant strictement négatif, l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ n'a pas de solutions réelles.

g) L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ a une unique solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

Équations linéaires du premier ordre

2 Résoudre les équations différentielles suivantes, en cherchant d'abord une solution évidente :

a) $y' + y = \cos x + \sin x$;

b) $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$;

c) $y' + y \sin x = \sin 2x$.

3 Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles que l'on précisera. Recoller les solutions aux points critiques. Discuter l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant une condition initiale du type $y(x_0) = y_0$.

a) $y' \cos x + y \sin x = \cos x + x \sin x$;

b) $x^2 y' - y = (x^2 - 1)e^x$;

c) $xy' - 2y = x^3$;

d) $xy' + y = \operatorname{Arctan} x$;

e) $y' \cos^2 x - y = e^{\tan x}$.

4 Soit l'équation différentielle :

$$(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$$

1) Trouver une solution polynomiale.

2) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

5 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x^2$$

(On fera apparaître une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.)
Déterminer une solution prolongeable par continuité en 0.

6 Résoudre l'équation différentielle :

$$x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0$$

Étudier les raccordements possibles des solutions en 0 et 1.

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

7 Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales données :

a) $y'' + 9y = x^2 + 1 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

b) $y'' - 3y' + 2y = x e^x \qquad y(1) = 0 \quad y'(1) = 0$

c) $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \qquad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

d) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

8 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$$

9 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2ay' + y = e^x$$

en discutant suivant les valeurs du paramètre réel a.

Exercice posé aux oraux des concours

10 (X 2006)

Déterminer les fonctions y de $C^2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \end{vmatrix} = 0$$

4 Géométrie élémentaire du plan

INTRODUCTION

La géométrie plane, l'une des plus anciennes branches des mathématiques, a longtemps dominé leur enseignement. Trop vite considérée comme démodée, elle n'a pourtant rien perdu de ses vertus formatrices. Réserve inépuisable de problèmes, parfois ardus, elle peut servir de modèle à beaucoup d'autres théories mathématiques. Une « vision géométrique » aidera les étudiants dans tous les chapitres.

OBJECTIFS

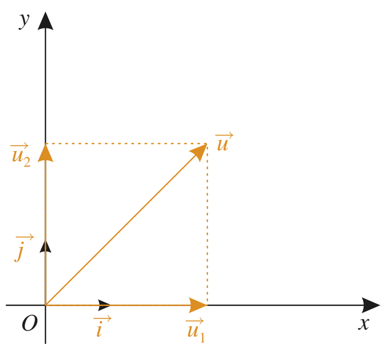
- Réviser les notions de géométrie plane étudiées jusqu'en Terminale.
- Introduire des outils nouveaux : déterminant, coordonnées polaires.
- Préparer le cours d'algèbre linéaire en donnant un premier exemple d'espace vectoriel.

1 Modes de repérage dans le plan

1.1 • Repère cartésien

Un **repère cartésien** du plan est la donnée d'un point O appelé **origine** du repère et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, appelés **vecteurs de base**. On note le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base** de l'ensemble des vecteurs du plan.

Les droites passant par O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont appelées **axes** du repère, et notées (Ox) et (Oy) (*Doc.* 1).



Doc. 1 Décomposition d'un vecteur.

Étant donné un vecteur $\vec{u}$ quelconque du plan, soit $\vec{u}_1$ le projeté de $\vec{u}$ sur (Ox) parallèlement à (Oy), et $\vec{u}_2$ le projeté de $\vec{u}$ sur (Oy) parallèlement à (Ox). On a : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Comme $\vec{u}_1$ est colinéaire à $\vec{\imath}$ et $\vec{u}_2$ colinéaire à $\vec{\jmath}$, il existe des réels x et y tels que :

$$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

Le couple (x, y) est unique ; en effet, supposons que : $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$; alors : $(x - x')\,\vec{\imath} = (y' - y)\vec{\jmath}$; comme $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires, cette égalité entraîne : $x - x' = 0$ et $y' - y = 0$, c'est-à-dire $x = x'$ et $y = y'$.

Les réels x et y sont appelés **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Étant donné un point M quelconque du plan, on appelle coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

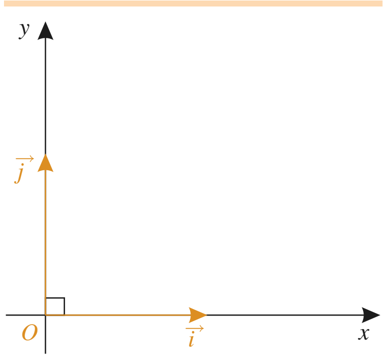
Remarque *: En géométrie plane, la méthode analytique consiste à exprimer toutes les propriétés des points par des relations algébriques entre leurs coordonnées. Les calculs peuvent être grandement facilités par le choix judicieux d'un repère. Par exemple, dans un problème portant sur un triangle* (ABC), *on pourra choisir le repère* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Pour s'entraîner : ex. 2

1.2 • Repère orthonormal. Orientation

Si les vecteurs de base du repère sont unitaires et orthogonaux, le repère est dit **orthonormal** (*Doc.* 2) :

$$\|\vec{\imath}\| = 1 \quad ; \quad \|\vec{\jmath}\| = 1 \quad ; \quad \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$$

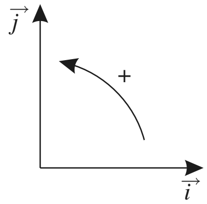


Doc. 2 Repère orthonormal.

Remarque *: Nous verrons plus loin que les coordonnées dans un repère orthonormal permettent une expression particulièrement simple du produit scalaire de deux vecteurs et de la norme d'un vecteur. En conséquence, on emploiera de préférence ce type de repère dans toutes les questions faisant intervenir des distances et des angles.*

Nous admettrons que deux repères orthonormaux sont toujours image l'un de l'autre par un déplacement du plan (translation ou rotation), ou par un anti-déplacement (composée d'une symétrie axiale et d'un déplacement). On dit que les deux repères ont la même orientation s'il s'agit d'un déplacement, ou une orientation contraire s'il s'agit d'un antidéplacement. Il y a donc deux classes de repères orthonormaux. **Orienter** le plan, c'est choisir l'une des classes, dont les éléments seront appelés repères orthonormaux **directs**, les autres étant dits **rétrogrades** (les rétrogrades, c'est toujours les autres !).

Il n'existe aucun critère mathématique pour privilégier une orientation plutôt qu'une autre ; ce choix ne peut être qu'arbitraire. En général, on convient de dire que le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est direct si l'on tourne de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$ dans le sens « trigonométrique », c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre (*Doc.* 3). (Qu'est-ce qu'une montre ? Qu'est-ce qui empêche de fabriquer une montre qui tourne dans l'autre sens ?)



Doc. 3 Sens trigonométrique.

Le plan étant orienté, le choix d'un repère orthonormal direct permet d'identifier le plan à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$: le point M (ou le vecteur $\vec{u}$) de coordonnées (x, y) est représenté par le nombre complexe $z = x + iy$. Cette identification permet de traiter certaines questions de géométrie plane à l'aide des nombres complexes, ou inversement certaines questions portant sur les nombres complexes par des méthodes géométriques.

1.3 • Changement de repère

Soit $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un premier repère cartésien, et $R' = (O', \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$ un nouveau repère, donné par :

$$\overrightarrow{OO'} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} \quad ; \quad \vec{\imath}' = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath} \quad ; \quad \vec{\jmath}' = \gamma\,\vec{\imath} + \delta\,\vec{\jmath}$$

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère R et (x', y') dans le repère R'. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\
x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} &= (a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}) + x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' \\
x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} &= (a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}) + x'(\alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}) + y'(\gamma\,\vec{\imath} + \delta\,\vec{\jmath}) \\
x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} &= (a + \alpha x' + \gamma y')\,\vec{\imath} + (b + \beta x' + \delta y')\,\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

D'où, d'après l'unicité des coordonnées d'un point :

$$\begin{cases} x = a + \alpha x' + \gamma y' \\ y = b + \beta x' + \delta y' \end{cases}$$

Ces formules sont appelées formules de changement de repère. On remarque qu'elles donnent les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles ; c'est bien ainsi qu'on en a besoin, pour transformer par exemple l'équation cartésienne d'un ensemble de points dans l'ancien repère en une équation dans le nouveau repère.

APPLICATION 1

Reconnaître un ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit E l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que : $x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$.
Reconnaître l'ensemble E grâce à un changement de repère. Tracer E.

L'ensemble E coupe l'axe Ox en $A(-2, 0)$, et l'axe Oy en $B(0, 1)$ et $C(0, -2)$. Considérons le repère $R' = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, où : $\overrightarrow{OA} = -2\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans le repère R et (x', y') dans le repère R', on peut écrire :

$$x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = -2\vec{\imath} + x'(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + y'(2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath})$$

$$x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = (2x' + 2y' - 2)\vec{\imath} + (x' - 2y')\vec{\jmath}$$

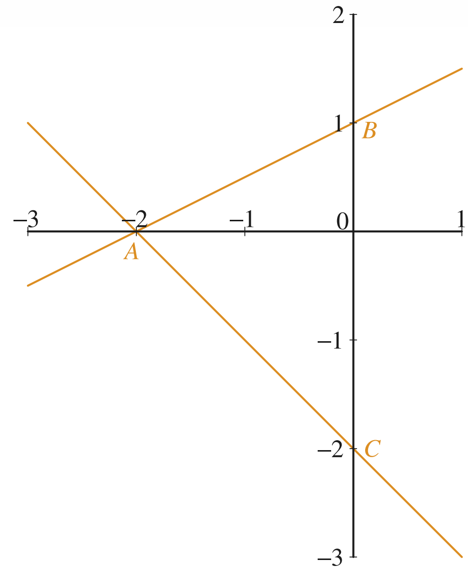
D'où, d'après l'unicité des coordonnées d'un point :

$$\begin{cases} x = 2x' + 2y' - 2 \\ y = x' - 2y' \end{cases}$$

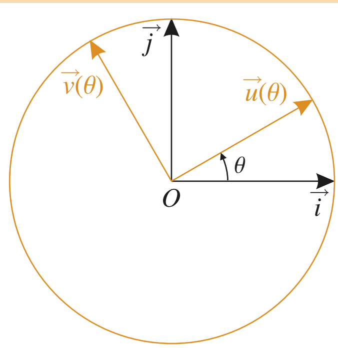
L'équation de l'ensemble E dans le repère R' est donc :

$$(2x' + 2y' - 2)^2 - (2x' + 2y' - 2)(x' - 2y') - 2(x' - 2y')^2 + 4(2x' + 2y' - 2) - 2(x' - 2y') + 4 = 0$$

ce qui équivaut à : $18x'y' = 0$, c'est-à-dire $x' = 0$ ou $y' = 0$.
L'ensemble E est donc la réunion des droites (AB) et (AC) (*Doc.* 4).



Doc. 4



Doc. 5 Repère polaire.

1.4 • Repère polaire. Coordonnées polaires

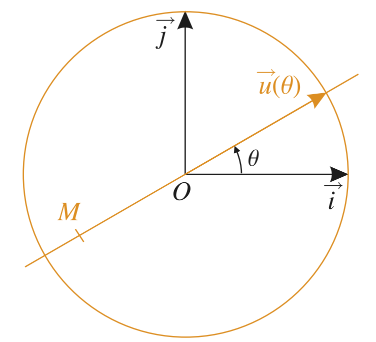
Le plan étant orienté, soit $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct. Pour tout réel θ, on définit les vecteurs :

$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

Le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est l'image du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par la rotation de centre O d'angle θ : il est encore orthonormal direct. On l'appelle **repère polaire** attaché au réel θ (*Doc.* 5).

Remarque *: En utilisant l'identification entre vecteurs et nombres complexes évoquée plus haut, on peut écrire : $\vec{u}(\theta) = e^{i\theta}$ et $\vec{v}(\theta) = i\,e^{i\theta}$.*

Pour tout point M du plan, il existe des réels r et θ tels que $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta)$. On dit que (r, θ) est un couple de **coordonnées polaires** du point M. On remarque que $|r|$ est la distance OM, et que θ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ modulo π (*Doc.* 6).



Doc. 6 Cas où r est négatif.

Attention : Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires d'un point ne sont pas uniques :

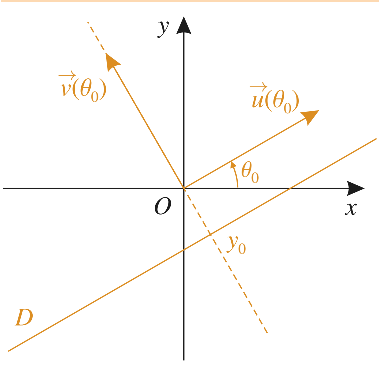
- Pour l'origine O, $r = 0$, mais θ est quelconque.
- Le point M de coordonnées polaires (r, θ) a aussi pour coordonnées polaires $(r, \theta + 2\pi)$ et $(-r, \theta + \pi)$. L'ensemble des couples de coordonnées polaires de M, distinct de l'origine, est : $\{((-1)^k r\,,\ \theta + k\pi)\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque *: En physique, on considère en général que $r = OM$, c'est-à-dire que r est nécessairement positif. Nous verrons cependant qu'il est souvent pratique d'utiliser des coordonnées polaires où r peut être de signe quelconque.*

On peut facilement exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point en fonction d'un couple de coordonnées polaires :
de $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta)$, on déduit $x\vec{i} + y\vec{j} = r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$, d'où, d'après l'unicité des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases}$$

1.5 • Équation polaire d'une droite



Doc. 7 Représentation polaire d'une droite.

Soit D une droite du plan. Notons θ_0 une mesure de l'angle que fait D avec l'axe Ox (θ_0 est défini à $k\pi$ près) (*Doc.* 7).
– Si D passe par l'origine, une équation polaire de D est : $\theta = \theta_0$.
– Si D ne passe pas par O, elle a pour équation $y = y_0$ dans le repère polaire $(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$, c'est-à-dire en coordonnées polaires : $r\,\sin(\theta - \theta_0) = y_0$. Une équation polaire de D est donc :

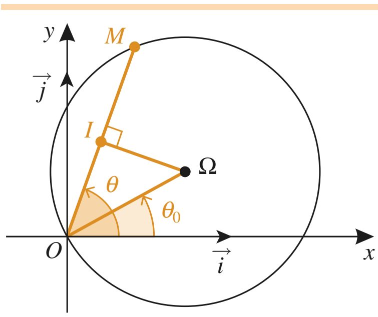
$$r = \frac{y_0}{\sin(\theta - \theta_0)}$$

c'est-à-dire, en posant $\alpha = -\dfrac{\sin\theta_0}{y_0}$, $\beta = \dfrac{\cos\theta_0}{y_0}$:

$$\boxed{r = \frac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta}}$$

Réciproquement, toute équation polaire de ce type représente une droite ne passant pas par l'origine (on peut retrouver y_0 et θ_0 à partir de α et β).

1.6 • Équation polaire d'un cercle passant par l'origine



Doc. 8 Représentation polaire d'un cercle.

Soit C le cercle de centre Ω, de coordonnées polaires (θ_0, R), qui passe par l'origine (*Doc.* 8).
Soit M un point quelconque de C, de coordonnées polaires (θ, r). Calculons l'angle $(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM})$:

$$(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{i}, \overrightarrow{O\Omega}) = \theta - \theta_0$$

Soit I le milieu de $[OM]$; on a donc $OI = R\,\cos(\theta - \theta_0)$, et par conséquent $OM = 2R\,\cos(\theta - \theta_0)$. Réciproquement, tout point M vérifiant cette relation appartient au cercle C, qui a donc pour équation polaire :

$$r = 2R\,\cos(\theta - \theta_0)$$

c'est-à-dire, en posant $\alpha = 2R\cos\theta_0$, $\beta = 2R\sin\theta_0$:

$$r = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$$

Réciproquement, toute équation polaire de ce type représente un cercle passant par l'origine (on peut retrouver R et θ_0 à partir de α et β).

2 Produit scalaire

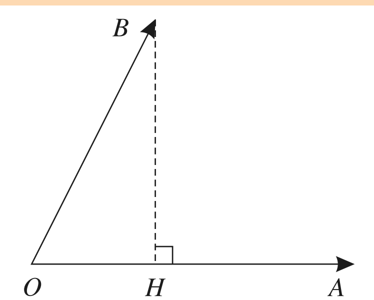
2.1 • Définition

On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u},\vec{v})$$

où $(\vec{u},\vec{v})$ représente l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans le cas où l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, cet angle peut être choisi arbitrairement ; on a dans ce cas $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$).

2.2 • Interprétation en terme de projection



Doc. 9 Produit scalaire.

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Soit O, A, B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) (*Doc.* 9). En orientant cette droite dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OA}$, on a : $\|\vec{u}\| = \overline{OA}$ et $\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) = \overline{OH}$; d'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{OA}\cdot\overline{OH}$$

Bien entendu, cette relation reste vraie si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul. Comme les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ jouent le même rôle, on peut énoncer :

Le produit scalaire de deux vecteurs est le produit des mesures algébriques de leurs projetés orthogonaux sur le support de l'un d'entre eux.

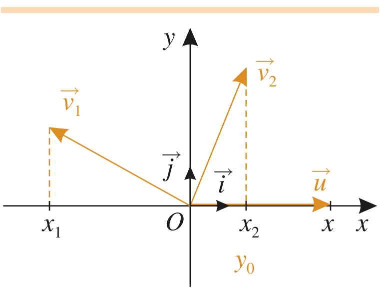
2.3 • Symétrie

Remarquons que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{v},\vec{u})$, et par conséquent :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

On dit que le produit scalaire est **symétrique**.

2.4 • Bilinéarité



Doc. 10 Linéarité du produit scalaire par rapport au deuxième vecteur.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ trois vecteurs, α et β deux réels (*Doc.* 10). Démontrons que :

$$\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \beta\,\vec{u}\cdot\vec{v}_2$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$, cette égalité est évidente.

Si $\vec{u} \neq 0$, considérons le vecteur $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ (vecteur unitaire colinéaire à $\vec{u}$ de même sens), et le vecteur $\vec{j}$ image de $\vec{i}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

La base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormale. Considérons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans cette base :

$$\vec{u}=(x,0) \text{ où } x=\|\vec{u}\| \quad ; \quad \vec{v}_1=(x_1,y_1) \quad ; \quad \vec{v}_2=(x_2,y_2)$$

Les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2$ sont donc : $(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)$.
Appliquons le résultat du paragraphe 2.2, en projetant orthogonalement tous les vecteurs sur le support de $\vec{u}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}_1=xx_1 \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{v}_2=xx_2 \quad ; \quad \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=x(\alpha x_1+\beta x_2)$$

d'où :

$$\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v}_1+\beta\,\vec{u}\cdot\vec{v}_2$$

On dit que l'application $\vec{v}\mapsto\vec{u}\cdot\vec{v}$ est **linéaire**. Comme le produit scalaire est symétrique, pour tout vecteur $\vec{v}$ fixé, l'application $\vec{u}\mapsto\vec{u}\cdot\vec{v}$ est également linéaire, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$(\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2)\cdot\vec{v}=\alpha\,\vec{u}_1\cdot\vec{v}+\beta\,\vec{u}_2\cdot\vec{v}$$

En définitive, on dit que le produit scalaire est **bilinéaire**.

Pour s'entraîner : ex. 3 à 4

APPLICATION 2

Linéarité d'une application ; premiers exemples

Soit E l'ensemble des vecteurs du plan. On dit qu'une application f de E dans E (ou dans $\mathbb{R}$) est linéaire si pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de E et tous réels α et β :

$$f(\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v})=\alpha\,f(\vec{u})+\beta\,f(\vec{v})$$

Nous venons de rencontrer deux exemples avec les applications $\vec{v}\mapsto\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\mapsto\vec{u}\cdot\vec{v}$ de E dans $\mathbb{R}$.
Donnons trois exemples d'applications linéaires de E dans E :

- L'homothétie vectorielle de rapport k : $\vec{u}\mapsto k\,\vec{u}$; elle est linéaire car : $k\,(\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v})=\alpha\,k\,\vec{u}+\beta\,k\,\vec{v}$.
- La projection sur la droite D parallèlement à la droite D', sécante avec D en O. En choisissant un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D et D', l'image du vecteur $\vec{u}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}$ est $x\,\vec{\imath}$. On vérifie facilement que cette application est linéaire.
- La rotation vectorielle d'angle ω ; à tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, elle associe le vecteur d'affixe $z'=r\,\mathrm{e}^{i(\theta+\omega)}=\mathrm{e}^{i\omega}z$. Elle est linéaire car :

$$\mathrm{e}^{i\omega}(\alpha\,z_1+\beta\,z_2)=\alpha\,\mathrm{e}^{i\omega}\,z_1+\beta\,\mathrm{e}^{i\omega}\,z_2$$

Il est clair que la composée de deux applications linéaires est linéaire : par exemple, une similitude directe vectorielle, composée d'une rotation et d'une homothétie vectorielles, est linéaire.

La notion d'application linéaire est extrêmement importante. Nous l'étudierons de façon plus approfondie dans le chapitre 12 : *Espaces vectoriels*.

2.5 • Expression dans une base orthonormale

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormale, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : (x, y) et (x', y'). Calculons le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath})\cdot(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath})$$

On peut développer en utilisant la bilinéarité du produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\,\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} + xy'\,\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + yx'\,\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath} + yy'\,\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$$

Comme la base est orthonormale, $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = 1$, $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = 1$, $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0$; d'où :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$

On en déduit l'expression de la norme d'un vecteur :

$$\|\,\vec{u}\,\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarque *: Dans une base non orthonormale, on obtiendrait des résultats plus compliqués faisant intervenir les valeurs des produits scalaires des vecteurs de base entre eux.*

On obtient également la distance de deux points du plan, en fonction de leurs coordonnées dans un repère orthonormal :

$$AB = \|\,\overrightarrow{AB}\,\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2.6 • Expression en termes de nombres complexes

Identifions les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec les nombres complexes :

$$z = x + i\,y \quad ; \quad z' = x' + i\,y'$$

On a : $\bar{z}z' = (x - i\,y)(x' + iy') = (xx' + yy') + i\,(xy' - yx')$; d'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \operatorname{Re}\,(\bar{z}z')$$

3 Déterminant

3.1 • Définition

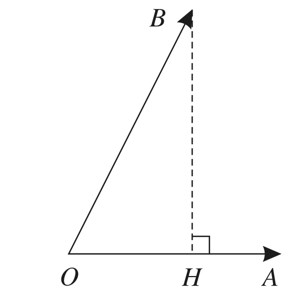
Le plan est supposé orienté. On appelle **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le réel :

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \|\,\vec{u}\,\|\,\|\,\vec{v}\,\|\ \sin(\vec{u},\vec{v})$$

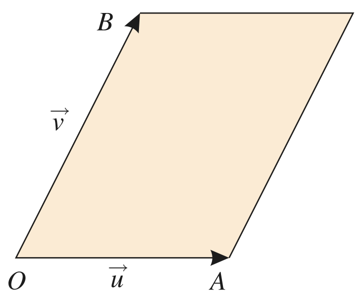
où $(\vec{u},\vec{v})$ représente l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans le cas où l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, cet angle peut être choisi arbitrairement ; on a dans ce cas $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v}) = 0$).

Remarque *: Cette définition dépend de l'orientation choisie dans le plan. Si on avait choisi l'orientation contraire, on aurait obtenu un déterminant opposé pour les mêmes vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Notons que $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v}) = 0$ si et seulement si l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ est égal à 0 modulo π, c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



Doc. 11 Projection.



Doc. 12 Aire du parallélogramme.

3.2 • Interprétation en terme d'aire

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Soit O, A, B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) (*Doc.* 11). On a : $\| \vec{u} \| = OA$ et $\| \vec{v} \| \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{HB}$, en orientant la droite (HB) dans le sens directement orthogonal à (OA). D'où :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = OA \cdot \overline{HB}$$

On remarque que $|\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})|$ est égal au double de l'aire du triangle (OAB), c'est-à-dire à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*Doc.* 12). Le signe du déterminant dépend de l'orientation de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$:
– positif si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est de sens direct ;
– négatif si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est de sens rétrograde.
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, le déterminant est nul, tout comme l'aire du parallélogramme qui est alors aplati. On peut donc énoncer :

> Le déterminant de deux vecteurs est égal à l'aire du parallélogramme qu'ils déterminent, affectée d'un signe correspondant à l'orientation de leur angle.

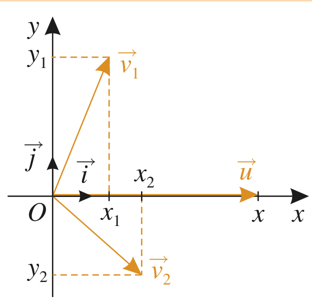
3.3 • Antisymétrie

Remarquons que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = -\sin(\vec{v}, \vec{u})$, et par conséquent :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{u})$$

On dit que le déterminant est **antisymétrique**.

3.4 • Bilinéarité



Doc. 13 Linéarité du déterminant par rapport au deuxième vecteur.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ trois vecteurs, α et β deux réels (*Doc.* 13). Démontrons que :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \beta\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$, cette égalité est évidente.

Si $\vec{u} \neq 0$, considérons le vecteur $\vec{\imath} = \dfrac{\vec{u}}{\| \vec{u} \|}$ (vecteur unitaire colinéaire à $\vec{u}$ de même sens), et le vecteur $\vec{\jmath}$ image de $\vec{\imath}$ par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormale directe. Considérons les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans cette base :

$$\vec{u} = (x, 0) \text{ où } x = \| \vec{u} \| \quad ; \quad \vec{v}_1 = (x_1, y_1) \quad ; \quad \vec{v}_2 = (x_2, y_2)$$

Les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ sont donc : $(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$.
Appliquons le résultat du paragraphe 3.2 :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}_1) = xy_1 \quad ; \quad \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}_2) = xy_2 \quad ; \quad \mathrm{Det}(\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = x(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

d'où :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}_1) + \beta\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

L'application $\vec{v} \mapsto \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ est linéaire. Comme le déterminant est antisymétrique, pour tout vecteur $\vec{v}$ l'application $\vec{u} \mapsto \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ est également linéaire (écrivez ce que cela signifie) ; en définitive, le déterminant est bilinéaire.

Pour s'entraîner : ex. 5

3.5 • Expression dans une base orthonormale directe

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormale directe, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : (x, y) et (x', y'). Calculons le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}, x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath})$$

On peut développer en utilisant la bilinéarité du déterminant :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = xx'\ \mathrm{Det}(\vec{\imath}, \vec{\imath}) + xy'\ \mathrm{Det}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) + yx'\ \mathrm{Det}(\vec{\jmath}, \vec{\imath}) + yy'\ \mathrm{Det}(\vec{\jmath}, \vec{\jmath})$$

Comme la base est orthonormale directe,

$$\mathrm{Det}(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = 0, \quad \mathrm{Det}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = 1, \quad \mathrm{Det}(\vec{\jmath}, \vec{\imath}) = -1, \quad \mathrm{Det}(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}) = 0\,;$$

d'où :

$$\boxed{\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'}$$

Notation : on écrit ce déterminant sous la forme :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Remarque *: Dans une base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *quelconque, orthonormale ou non, on obtiendrait :* $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = (xy' - x'y)\,\mathrm{Det}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *c'est-à-dire un résultat proportionnel à* $(xy' - x'y)$. *On a donc toujours l'équivalence :*

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ colinéaires} \iff xy' - x'y = 0$$

Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une base orthonormale pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs.

3.6 • Expression en termes de nombres complexes

Identifions les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec les nombres complexes :

$$z = x + i\,y \quad ; \quad z' = x' + i\,y'$$

On a : $\bar{z}z' = (x - i\,y)(x' + iy') = (xx' + yy') + i\,(xy' - yx')$; d'où :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Im}\,(\bar{z}z')$$

4 Droites du plan

4.1 • Utilisation du produit scalaire et du déterminant

Le produit scalaire et le déterminant constituent deux outils essentiels pour exprimer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :

- orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\quad xx' + yy' = 0$ (base orthonormale) ;
- colinéaires : $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, $\quad xy' - x'y = 0$ (base quelconque).

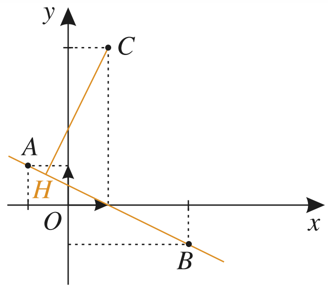
Par exemple, on exprimera l'alignement de trois points A, B, C par :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

APPLICATION 3

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(-1,1)$, $B(3,-1)$, $C(1,4)$; déterminer le point H projeté orthogonal de C sur la droite (AB) (Doc. 14).



Doc. 14

Le point H cherché, de coordonnées (x,y), est défini par :

$$\begin{cases} A, B, H \text{ alignés :} & \operatorname{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = 0, \\ (CH) \text{ orthogonale à} (AB) : & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0. \end{cases}$$

Soit analytiquement :

$$\begin{cases} 4(y-1) + 2(x+1) = 0 \\ 4(x-1) - 2(y-4) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

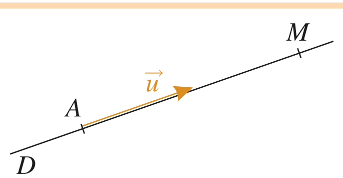
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

Ce système a une solution unique :

$$(x,y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

$$H = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

4.2 • Représentation paramétrique d'une droite



Doc. 15 Repère d'une droite.

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons la droite D passant par le point $A(x_A, y_A)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}(\alpha, \beta)$ (*Doc.* 15). Un point M de coordonnées (x,y) appartient à la droite D si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, soit :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha\, t \\ y = y_A + \beta\, t \end{cases}$$

La droite D est décrite comme une courbe paramétrée ; ce système est appelé **représentation paramétrique** de D.

Réciproquement, tout système de cette forme représente une droite, dont on connaît un point $A(x_A, y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

Remarque *: En limitant les variations de t, on décrit une partie de la droite D :*

- *$t \geqslant 0$: demi-droite fermée d'origine A dirigée par $\vec{u}$;*
- *$t \in [0,1]$: segment $[AB]$ où $B = A + \vec{u}$ (unique point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$).*

4.3 • Équation cartésienne d'une droite

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on peut aussi exprimer que M appartient à D par $\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{ce qui équivaut à : } \quad \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$$

$$\text{ou encore : } \quad \beta x - \alpha y = \beta x_A - \alpha y_A$$

Remarque *: Cette équation équivaut à* $\operatorname{Det}(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) = C^{te}$; *les droites dirigées par* $\vec{u}$ *sont les lignes de niveau de l'application* $M \mapsto \operatorname{Det}(\overrightarrow{OM}, \vec{u})$.

En posant $a = \beta, b = -\alpha, c = -\beta x_A + \alpha y_A$, cette équation s'écrit :

$$ax + by + c = 0$$

Elle est appelée **équation cartésienne** de D ; elle caractérise l'appartenance d'un point à D, c'est-à-dire que :

$$M(x, y) \in D \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ représente une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.

Remarque *: L'équation cartésienne d'une droite est unique à un facteur multiplicatif près, c'est-à-dire que si* $ax + by + c = 0$ *est une équation de* D, *toute équation de* D *est de la forme* $kax + kby + kc = 0$, *où* k *est un réel non nul.*

APPLICATION 4

Équation cartésienne d'une droite passant par deux points donnés

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *écrire des équations cartésiennes des côtés du triangle* ABC, *où* $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(1, 4)$.

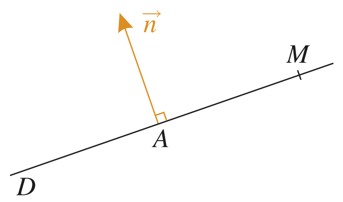
Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\iff \operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \in (BC) &\iff \operatorname{Det}(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ y+1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 5x + 2y - 13 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \in (AC) &\iff \operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 3x - 2y + 5 = 0 \end{aligned}$$

4.4 • Droite définie par un point et un vecteur normal



Doc. 16 Vecteur normal à une droite.

Choisissons cette fois un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormal, et considérons la droite D passant par le point $A(x_A, y_A)$ et orthogonale au vecteur non nul $\vec{n}(a, b)$ ($\vec{n}$ est appelé **vecteur normal** à D) (*Doc.* 16). Un point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite D si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

c'est-à-dire :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

On retrouve l'équation cartésienne de D :

$$ax + by + c = 0, \quad \text{où} \quad c = -ax_A - by_A$$

Réciproquement, toute équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$ représente une droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$.

Remarque *: Cette équation équivaut à $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = C^{te}$; les droites de vecteur normal $\vec{n}$ sont les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}$.*

APPLICATION 5

Orthocentre d'un triangle

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, écrire des équations cartésiennes des hauteurs du triangle ABC, où $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(1, 4)$. Vérifier qu'elles sont concourantes. Déterminer l'orthocentre du triangle.

La hauteur issue de A est la droite passant par A, de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$; elle a pour équation :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff -2(x + 1) + 5(y - 1) = 0$$
$$\iff -2x + 5y - 7 = 0$$

De même, la hauteur issue de B a pour équation :

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff 2(x - 3) + 3(y + 1) = 0$$
$$\iff 2x + 3y - 3 = 0$$

et la hauteur issue de C :

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff 4(x - 1) - 2(y - 4) = 0$$
$$\iff 2x - y + 2 = 0$$

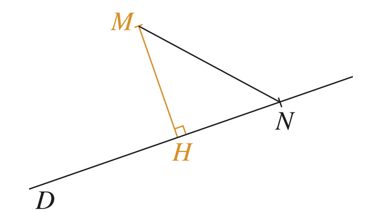
On remarque qu'en retranchant membre à membre la première équation de la seconde, on obtient deux fois la troisième ; donc tout point qui appartient aux deux premières hauteurs appartient nécessairement à la troisième : elles sont concourantes.

En résolvant le système, on obtient les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC :

$$H = \left(-\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right)$$

Pour s'entraîner : ex. 6

4.5 • Distance d'un point à une droite



Doc. 17 Distance d'un point à une droite

Soit D une droite du plan. Pour tout point M du plan, on appelle distance de M à D la plus petite distance entre M et un point de D. Elle est notée $d(M,D)$ (*Doc.* 17).

Soit H le projeté orthogonal de M sur D. Pour tout point N de D :

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 \geqslant MH^2$$

Le minimum de la distance MN est donc MH :

$$d(M,D) = HM$$

Comme de plus, $MN = MH \iff HN = 0$, ce minimum est atteint uniquement lorsque $N = H$.

Calculons cette distance dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. La droite D est déterminée par un point $A(x_A,y_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a,b)$. Elle a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$.

On a :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = \pm \parallel \overrightarrow{HM} \parallel \parallel \vec{n} \parallel$$

On en déduit :

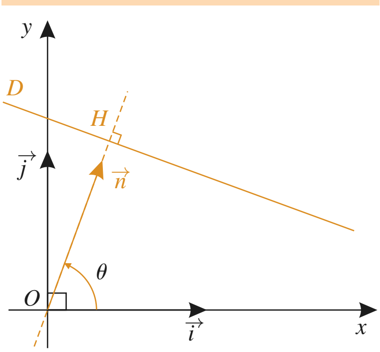
$$d(M,D) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\parallel \vec{n} \parallel}$$

Or $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a(x-x_A)+b(y-y_A) = ax+by+c$, d'où :

$$d(M,D) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Pour s'entraîner : ex. 7

4.6 • Équation normale d'une droite



Doc. 18 Représentation normale d'une droite.

Le repère étant toujours orthonormal, on peut choisir de décrire une droite D par un point et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$ (*Doc.* 18). Si $\parallel \vec{n} \parallel = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Une équation cartésienne de D est alors :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff (x-x_A)\cos\theta + (y-y_A)\sin\theta = 0$$

soit :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = p$$

où $p = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}$ pour tout point M de D.

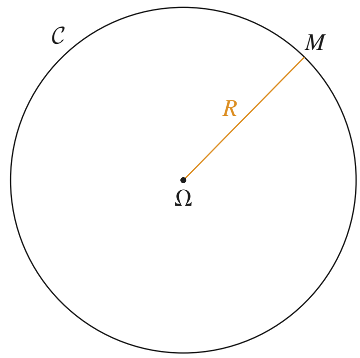
En particulier pour le point H, projeté orthogonal de O sur D : $p = \overrightarrow{OH}\cdot\vec{n} = \overline{OH}$: le couple (p,θ) est un couple de coordonnées polaires de H (on a donc $|p| = OH = d(O,D)$).

Cette équation est appelée **équation normale** de la droite D.

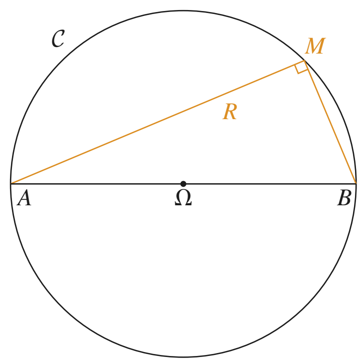
La distance d'un point M à la droite D s'exprime facilement à l'aide de cette équation normale :

$$d(M,D) = |x\cos\theta + y\sin\theta - p|$$

5 Cercles



Doc. 19 Cercle.



Doc. 20 Diamètre d'un cercle.

5.1 • Équation cartésienne d'un cercle

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a, b)$, de rayon R est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\| \overrightarrow{\Omega M} \|^2 = R^2$ (*Doc.* 19) ; il a donc pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

C'est-à-dire : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, où $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Pour s'entraîner : ex. 8

5.2 • Cercle donné par un diamètre

Soit $[AB]$ un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, de rayon R (*Doc.* 20) ; pour tout point M du plan, on peut écrire :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}) = \overrightarrow{M\Omega}^2 - \overrightarrow{\Omega A}^2 = \overrightarrow{M\Omega}^2 - R^2$$

D'où :

$$M \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Le cercle $\mathcal{C}$ est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
Si dans un repère orthonormal, les points A et B ont respectivement pour coordonnées (a, a'), (b, b'), le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$(x - a)(x - b) + (y - a')(y - b') = 0$$

APPLICATION 6

Lieu des points M tels que l'angle de droites (MA, MB) soit constant

Rappel : Le plan est supposé orienté. Étant donné deux droites D et D', on appelle mesure de l'angle (D, D') toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{u}\,')$ où $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont deux vecteurs non nuls appartenant respectivement à D et D'. Il y a deux mesures possibles de l'angle (D, D') modulo 2π, donc une seule modulo π ; il existe une mesure et une seule de l'angle de droites (D, D') dans l'intervalle $[0, \pi[$.

Étant donné deux points A et B distincts, déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $(MA, MB) = \alpha$, où $\alpha \in [0, \pi[$.

Si $\alpha = 0$, l'ensemble cherché est la droite (AB), privée des points A et B.

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B.

Supposons désormais que $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Pour tout point M du plan, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \| \overrightarrow{AM} \| \, \| \overrightarrow{BM} \| \, \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \\ \operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \| \overrightarrow{AM} \| \, \| \overrightarrow{BM} \| \, \sin(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \end{cases}$$

d'où, en supposant A, B, M non alignés :

$$\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}}{\operatorname{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})} = \frac{\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})}{\sin(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})}$$

L'angle de droites (MA, MB) est égal à α modulo π si et seulement si :

$$\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}}{\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

($\tan \alpha$ existe car $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et il est non nul car $\alpha \in]0, \pi[$).

Choisissons un repère orthonormal direct d'origine O, milieu de $[AB]$, de premier vecteur de base $\overrightarrow{OB}$. Le point M de coordonnées (x, y) appartient à l'ensemble E si et seulement si :

$$\frac{(x+1)(x-1)+y^2}{(x+1)y-(x-1)y} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

c'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 - 1 = \frac{2y}{\tan \alpha}$$

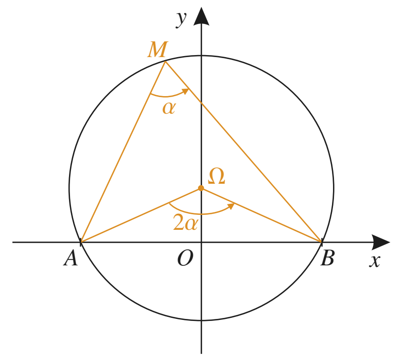
ce qui équivaut à :

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{\tan \alpha}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

L'ensemble E est donc un cercle de centre $\Omega(0, \frac{1}{\tan \alpha})$, de rayon $R = \frac{1}{\sin \alpha}$, privé des points A et B.

Remarque *: Cette solution englobe le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{2}$ où l'on retrouve le cercle de diamètre $[AB]$.*

On peut montrer que $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2\alpha$ (théorème de l'angle inscrit), ce qui permet une construction simple du point Ω et donc de l'ensemble E (*Doc.* 21).



Doc. 21

Pour s'entraîner : ex. 9

APPLICATION 7

Ensemble des points M tels que $MB = kMA$

A et B étant deux points distincts du plan et k un réel strictement positif, étudier l'ensemble E_k des points M du plan tels que $\frac{MB}{MA} = k$.

L'ensemble E_1 est bien sûr la médiatrice de $[AB]$. Supposons désormais que $k \neq 1$.

$$\frac{MB}{MA} = k \iff \overrightarrow{MB}^2 - k^2\overrightarrow{MA}^2 = 0$$

$$\iff (\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MA}) = 0$$

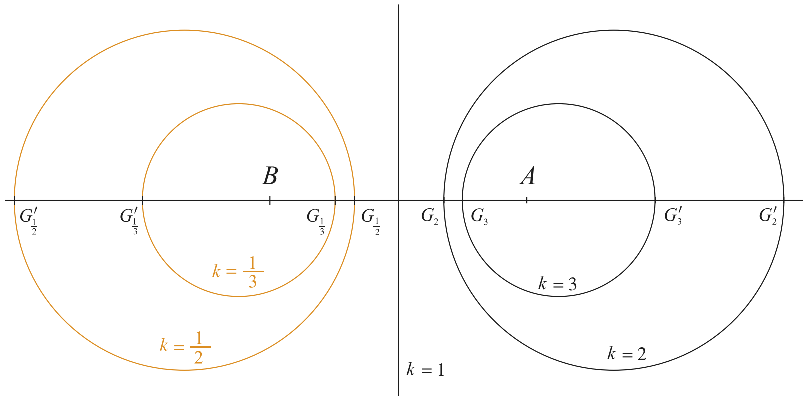
Soit G_k et G'_k les barycentres respectifs des systèmes $((A, k), (B, 1))$ et $((A, -k), (B, 1))$.

$$\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MA} = (1+k)\overrightarrow{MG_k} \quad ;$$

$$\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MA} = (1-k)\overrightarrow{MG'_k}$$

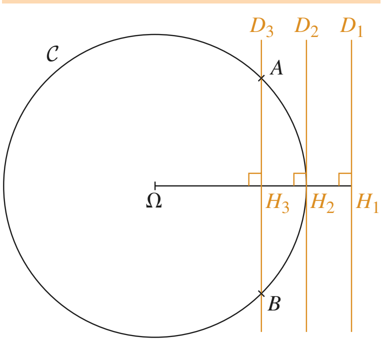
E_k est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MG_k} \cdot \overrightarrow{MG'_k} = 0$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[G_k G'_k]$.

La figure (*Doc.* 22) montre les lignes de niveau obtenues pour $k \in \{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$. Les lignes de niveau correspondant à deux valeurs inverses sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[AB]$.



Doc. 22

5.3 • Intersection d'un cercle et d'une droite



Doc. 23 Intersection d'un cercle et d'une droite

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω, de rayon R, et D une droite quelconque du plan. Désignons par H le projeté orthogonal de Ω sur D. Pour tout point M de D : $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$. Ce point appartient aussi à $\mathcal{C}$ si et seulement si : $HM^2 = R^2 - \Omega H^2$ (*Doc.* 23).

L'intersection $\mathcal{C} \cap D$ dépend donc de la distance $\Omega H = d(\Omega, D)$:

- si $d(\Omega, D) > R$: $\mathcal{C} \cap D = \varnothing$;
- si $d(\Omega, D) = R$, $\mathcal{C} \cap D = \{H\}$: D est tangente à $\mathcal{C}$;
  Par définition, $(\Omega H) \perp D$: la tangente à un cercle est orthogonale au rayon correspondant ;
- si $d(\Omega, D) < R$, $\mathcal{C} \cap D = \{A, B\}$, où A et B sont les deux points de D tels que $HA = HB = \sqrt{R^2 - d(\Omega, D)^2}$: D est sécante à $\mathcal{C}$.

APPLICATION 8

Équation de la tangente à un cercle en un point donné

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega(a, b)$, de rayon R, et $H = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}$. Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, où $c = a^2 + b^2 - R^2$. Déterminer une équation de la droite D tangente à $\mathcal{C}$ en H.

D est la droite passant par H, de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega H}$:

$$M(x, y) \in D$$

$$\iff \overrightarrow{\Omega H} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$$

$$\iff (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

C'est-à-dire :

$$x_0 x + y_0 y - ax - by - x_0^2 - y_0^2 + ax_0 + by_0 = 0$$

Comme $H \in \mathcal{C}$:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0,$$

on peut écrire :

$$x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$$

L'équation de la tangente en H à $\mathcal{C}$ est obtenue à partir de celle de $\mathcal{C}$ en « dédoublant » les termes x^2, y^2 en x_0x, y_0y, et $2ax$, $2by$ en $a(x+x_0)$, $b(y+y_0)$.

5.4 • Paramétrages d'un cercle

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega(a, b)$, de rayon R. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, c'est-à-dire s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $x - a = R\cos\theta$, $y - b = R\sin\theta$. Le cercle $\mathcal{C}$ peut donc être représenté paramétriquement par :

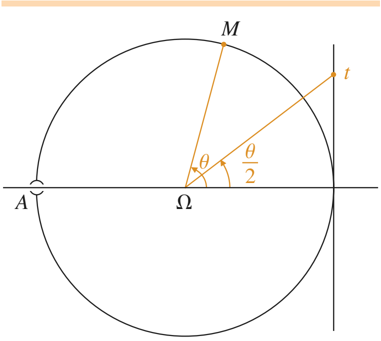
$$\begin{cases} x(\theta) = a + R\cos\theta \\ y(\theta) = b + R\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Ce paramétrage revient à décrire le cercle d'un mouvement uniforme. Il est périodique de période 2π. Le cercle est décrit tout entier pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

Une autre possibilité est intéressante :

Pour $\theta \neq \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, posons : $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$; on a :

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\tan\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos\theta = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2} = \cos^2\dfrac{\theta}{2}\left(1 - \tan^2\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$



Doc. 24 Paramétrage rationnel d'un cercle privé d'un point.

On peut donc paramétrer le cercle, privé du point $A = \Omega - R\vec{\imath}$ (*Doc.* 24), par :

$$\begin{cases} x(t) = a + R\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = b + R\,\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ce paramétrage, qui n'est plus périodique, décrit le cercle une seule fois ; le point A est la limite du point $M(t)$ lorsque t tend vers $\pm\infty$.

Ce paramétrage a l'avantage par rapport au précédent de ne faire intervenir que des fonctions rationnelles (quotients de polynômes), ce qui peut être utile, par exemple dans des calculs de primitives.

MÉTHODE

Pour exprimer que deux vecteurs sont orthogonaux, on écrit que leur produit scalaire est nul.

Pour exprimer que deux vecteurs sont colinéaires, on écrit que leur déterminant est nul.

Pour représenter paramétriquement une droite D, on choisit un point A et un vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ non nul et on écrit :

$$M \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha\, t \\ y = y_A + \beta\, t \end{cases}$$

Pour trouver une équation cartésienne d'une droite D, on peut :

- choisir un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$, et écrire :

$$M \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

- choisir un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a, b)$, et écrire :

$$M \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by + c = 0$$

  si $\| \vec{n} \| = 1$, il existe un réel θ tel que $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$; on obtient l'équation normale de la droite :

$$x \cos\theta + y \sin\theta = p$$

Pour trouver une équation cartésienne d'un cercle C de centre Ω de rayon R, on écrit :

$$M \in C \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega M^2 = R^2$$

Pour trouver une équation cartésienne de la tangente au cercle C au point $M_0(x_0, y_0)$, on remplace dans l'équation de C :

- x^2 par $x_0 x$,
- y^2 par $y_0 y$, (principe du dédoublement)
- $2x$ par $x + x_0$,
- $2y$ par $y + y_0$.

Exercice résolu

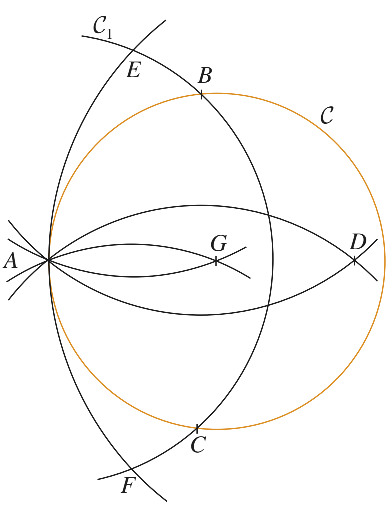
PROBLÈME DE NAPOLÉON

Le problème suivant fut résolu par Napoléon Bonaparte lorsqu'il était élève au collège de Brienne : construire le centre d'un cercle donné avec seulement un compas (on s'interdit l'usage de la règle). On demande de justifier la solution suivante : un point A étant choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on construit un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A coupant $\mathcal{C}$ en deux points B et C. Les cercles de centres B et C passant par A se recoupent en un point D. Le cercle de centre D passant par A coupe $\mathcal{C}_1$ en E et F. Les cercles de centres E et F passant par A se recoupent en un point G. Montrer que G est le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Conseils

Choisir un repère et calculer les coordonnées de tous les points.

Utiliser la symétrie de la figure.



Doc. 25.

Solution

Choisissons un repère orthonormal de centre O, centre du cercle $\mathcal{C}$. Ce cercle a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Soit A le point de coordonnées $(-R, 0)$. La figure étant symétrique par rapport à l'axe (Ox), les points A, D, G appartiennent à (Ox), et nous n'aurons à calculer que leurs abscisses. Le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A de rayon r a pour équation :

$$(x + R)^2 + y^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 + 2Rx + R^2 - r^2 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Les coordonnées des points B et C vérifient les équations **(1)** et **(2)**, d'où $2Rx + 2R^2 - r^2 = 0$

$$x_B = x_C = \frac{r^2 - 2R^2}{2R}$$

Comme D est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) :

$$x_D = 2x_B - x_A = \frac{r^2 - R^2}{R}$$

Le cercle de centre D passant par A a pour rayon $R + x_D = \dfrac{r^2}{R}$; une équation cartésienne de ce cercle est :

$$\left(x - \frac{r^2 - R^2}{R}\right)^2 + y^2 = \frac{r^4}{R^2}$$

c'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 - \frac{2(r^2 - R^2)}{R}x + R^2 - 2r^2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Les coordonnées des points E et F vérifient les équations **(2)** et **(3)**, d'où : $\left(2R + \dfrac{2(r^2 - R^2)}{R}\right)x + r^2 = 0$, et par conséquent :

$$x_E = x_F = -\frac{R}{2}$$

Le point G est le symétrique de A par rapport à la droite (EF) :

$$x_G = 2x_E - x_A = 0$$

On en conclut que le point G a pour coordonnées $(0, 0)$; c'est bien le centre du cercle $\mathcal{C}$ (*Doc.* 25).

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a. Pour toute base orthonormale $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, il existe une orientation du plan pour laquelle cette base est directe.

b. Si (r,θ) est un couple de coordonnées polaires d'un point M, $r = OM$.

c. L'équation polaire $r = \sin\theta$ représente une droite.

d. Le déterminant de deux vecteurs est nul si et seulement si ils sont colinéaires.

e. Le système $x = 2 - t ; y = 1 + t$ est la représentation paramétrique d'une droite.

f. Toute droite du plan possède une équation de la forme $y = ax + b$.

g. La tangente en O au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ a pour équation $-2x + y = 0$.

Géométrie du triangle

2 Soit A, B, C, trois points non alignés du plan E et trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$, distincts de A, B, C.

1) Démontrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \qquad \text{(théorème de Ménélaüs)}$$

2) Trouver une condition analogue pour que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes (théorème de Ceva).

3 ABC étant un triangle équilatéral, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

4 ABC étant un triangle non équilatéral, on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Déterminer la nature de l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$$

Démontrer que E contient le centre du cercle circonscrit ainsi que le centre de gravité du triangle ABC. En déduire un troisième point remarquable de cet ensemble.

5 ABC étant un triangle quelconque et α,β,γ trois réels strictement positifs, soit G le barycentre du système $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$.

1) Montrer que les aires des triangles GBC, GCA et GAB sont proportionnelles à α,β et γ.

2) Trouver (α,β,γ) pour que G soit le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

3) Même question pour le centre du cercle circonscrit à ABC.

Droites du plan

6 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On donne un triangle par les équations de ses côtés :

$$\begin{cases} x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = p_1 \\ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 = p_2 \\ x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 = p_3 \end{cases}$$

Écrire les équations des trois hauteurs du triangle et vérifier qu'elles sont concourantes.
(On ne calculera les coordonnées d'aucun point...)

7 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Étudier l'ensemble des points équidistants des droites d'équation :

$$D_1 : \quad x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = p_1$$
$$D_2 : \quad x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 = p_2$$

Cercles

8 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(1,0)$ de rayon 1, et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre $\Omega'(0,1)$ de rayon $\sqrt{2}$. Soit A et B les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

1) Déterminer une équation de la droite (AB).

2) Quelle est l'équation générale d'un cercle passant par A et B ?

3) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle $(AB\Omega')$.

9 Soit ABC un triangle, H et H' les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C.

1) Montrer que les points B, C, H, H' sont cocycliques.

2) En déduire que le triangle AHH' est semblable à ABC.

Exercice posé aux oraux des concours

10 (CCP 2006)

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé. Soit M_0 le point de coordonnées (x_0, y_0).

1) Calculer les coordonnées du symétrique M_1 de M_0 par rapport à la droite Δ d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$.

2) Déterminer la courbe Γ décrite par M_0 lorsque les trois points symétriques de M_0 par rapport aux deux axes de coordonnées et à Δ sont alignés.

5 Courbes paramétrées

INTRODUCTION

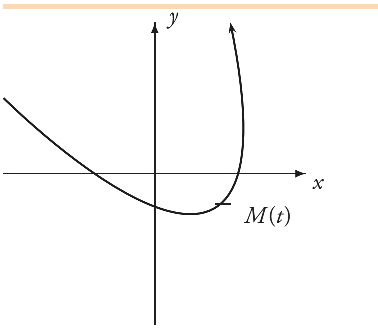
En mécanique, la trajectoire d'un point soumis à diverses contraintes est donnée par la position du point en fonction du temps ou d'un autre paramètre réel. Dans certains cas, il peut être pratique d'utiliser les coordonnées polaires (ρ, θ), *et en particulier de décrire* ρ *en fonction de* θ : *équation polaire de la courbe.*
Nous reviendrons à la fin de cet ouvrage sur les propriétés métriques de ces courbes : longueur, courbure.

OBJECTIFS

- Étude d'une courbe définie paramétriquement par une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- Étude d'une courbe définie par une équation polaire.

1 Courbes planes paramétrées

1.1 • Définition



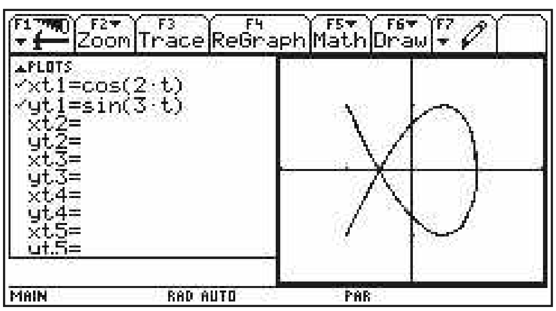
Doc. 1 Courbe paramétrée.

On appelle **courbe paramétrée** du plan P une fonction de $\mathbb{R}$ dans P : $t \mapsto M(t)$ (*Doc.* 1).
Si le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la donnée d'une courbe paramétrée revient à la donnée d'une fonction vectorielle $\vec{f}$, telle que $\vec{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ ou de deux fonctions numériques $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ représentant les coordonnées de $M(t)$.

En interprétant le paramètre réel t comme le temps, une courbe paramétrée représente le mouvement d'un point dans le plan.

L'ensemble des points du plan atteints par le mouvement est appelé **support** ou **trajectoire**.

$$\mathcal{C} = \{M \in P\ ,\ \exists t \in \mathbb{R} \quad M = M(t)\}$$



Pour tracer une courbe paramétrée avec votre TI92/Voyage 200, passer en MODE `Graph PARAMETRIC`.

Il faut bien comprendre qu'une courbe paramétrée ne se résume pas à son support. Un même support peut être décrit par divers **paramétrages**. Une courbe paramétrée n'est pas une courbe… , mais un mouvement sur une courbe.

Par ailleurs, si l'on n'impose rien à la fonction $\vec{f}$, le support n'a pas nécessairement l'allure que l'on attend d'une « courbe ». Il existe par exemple une courbe paramétrée (appelée *courbe de Péano*) dont le support est l'intérieur d'un carré !

1.2 • Dérivabilité

Par définition, la fonction vectorielle $\vec{f}$ tend vers le vecteur $\vec{\ell}$ si $\|\vec{f} - \vec{\ell}\|$ tend vers 0 ; cela équivaut au fait que les fonctions coordonnées de $\vec{f}$ tendent vers les coordonnées de $\vec{\ell}$.
Nous en déduisons :

- Une fonction vectorielle $\vec{f}$ est continue au point $t = t_0$ si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont ;
- Une fonction vectorielle $\vec{f}$ est dérivable au point $t = t_0$ si le quotient $\dfrac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$, défini pour $t \neq t_0$, admet une limite $\vec{\ell}$ quand $t \to t_0$; cette valeur est appelée dérivée de $\vec{f}$ en t_0, notée $\vec{f}\,'(t_0)$.

  Dans l'interprétation cinématique, $\dfrac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$ représente le vecteur vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t. La limite $\vec{f}\,'(t_0)$, si elle existe, est appelée **vecteur vitesse** à l'instant t_0.
  D'après ce qui précède, $\vec{f}$ est dérivable au point $t = t_0$ si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont et $\vec{f}\,'(t_0)$ a pour coordonnées $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$;
- Plus généralement, $\vec{f}$ est k fois dérivable sur I si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont.

Si f est deux fois dérivable, $\overrightarrow{f}''(t_0)$ est appelé **vecteur accélération** à l'instant t_0.

- On dit que $\overrightarrow{f}$ est de **classe C^k** si elle est k fois dérivable et si sa dérivée k-ième est continue. $\overrightarrow{f}$ est de classe C^k sur I si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont.

  Dans la pratique, on étudiera le plus souvent des courbes paramétrées de classe C^k avec $k \geqslant 1$.

On peut étendre aux fonctions vectorielles dérivables les opérations sur les dérivées ; en particulier :

Théorème 1

Si $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ sont deux fonctions vectorielles dérivables sur un intervalle I :

1) $(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g})' = \overrightarrow{f}' \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}'$

2) Si $\overrightarrow{f} \neq 0$: $\quad \| \overrightarrow{f} \|' = \dfrac{\overrightarrow{f}' \cdot \overrightarrow{f}}{\| \overrightarrow{f} \|}$

3) $\operatorname{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})' = \operatorname{Det}(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}) + \operatorname{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}')$

Démonstration

Choisissons un repère orthonormal direct et désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2) les fonctions coordonnées respectives des fonctions $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}$.

1) $\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g} = x_1 x_2 + y_1 y_2$; d'où :

$$(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g})' = x_1' x_2 + x_1 x_2' + y_1' y_2 + y_1 y_2' = \overrightarrow{f}' \cdot \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{g}'$$

2) $\| \overrightarrow{f} \| = \sqrt{\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{f}}$, d'où : $\| \overrightarrow{f} \|' = \dfrac{2\overrightarrow{f}' \cdot \overrightarrow{f}}{2\sqrt{\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{f}}} = \dfrac{\overrightarrow{f}' \cdot \overrightarrow{f}}{\| \overrightarrow{f} \|}$

3) $\operatorname{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$; d'où :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})' = x_1' y_2 + x_1 y_2' - x_2' y_1 - x_2 y_1' = \operatorname{Det}(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}) + \operatorname{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}')$$

1.3 • Point régulier – Tangente

Soit $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{f}(t)$ une courbe paramétrée de classe C^1.

Le point $M(t_0)$ est dit **régulier** si $\overrightarrow{f'}(t_0) \neq \vec{0}$, c'est-à-dire si le vecteur vitesse ne s'annule pas en t_0.

La courbe paramétrée est dite **régulière** si tous ses points sont réguliers. On rencontrera le plus souvent des courbes paramétrées **régulières par arcs**, c'est-à-dire régulières sur une réunion finie d'intervalles.

Soit $M(t_0)$ un point régulier et $M(t)$ un point de la courbe paramétrée, distinct de $M(t_0)$. La sécante $\big(M(t_0)M(t)\big)$ est dirigée par tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$, en particulier $\dfrac{1}{t - t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ qui a pour limite le vecteur non nul $\overrightarrow{f'(t_0)}$.

La droite passant par $M(t_0)$, dirigée par $\overrightarrow{f'}(t_0)$ est la position limite de la sécante $\big(M(t_0)M(t)\big)$ quand $t \to t_0$, elle est appelée **tangente** à la courbe au point $M(t_0)$.

Pour s'entraîner : ex. 2, 3

1.4 • Point stationnaire

Doc. 2 Le panneau STOP du code de la route impose un point stationnaire à la marche de tout véhicule.

Un point non régulier, c'est-à-dire en lequel $\overrightarrow{f'}(t_0) = \vec{0}$ (le vecteur vitesse s'annule), est dit **stationnaire**. C'est un point d'arrêt sur la trajectoire.

En un point stationnaire, la courbe peut ou non posséder une tangente. On cherchera si le quotient $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ admet une limite quand t tend vers t_0 ; si cette limite existe, ce sera le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point $M(t_0)$.

2 Étude générale d'une courbe paramétrée

2.1 • Intervalle d'étude

Soit à étudier la courbe paramétrée du plan définie par les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$. On cherche d'abord l'ensemble de définition D_f, qui est l'intersection des ensembles de définition de $x(t)$ et $y(t)$.

S'il existe une période commune $T \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $t \in D_f$:

$$t - T \in D_f \quad , \quad t + T \in D_f \quad , \quad x(t+T) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t+T) = y(t)$$

la courbe est entièrement décrite sur un intervalle d'amplitude T.

Il se peut également qu'un changement de paramètre $t \mapsto \varphi(t)$ induise une transformation géométrique simple. Par exemple :

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à l'axe Ox.
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à l'axe Oy.
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à l'origine.
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à la première bissectrice.
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) + \alpha \\ y(\varphi(t)) = y(t) + \beta \end{cases}$: translation de vecteur (α, β).

Dans ce cas on peut restreindre l'étude à un intervalle I qui complété par l'application φ redonnera l'ensemble de définition entier : $I \cup \varphi(I) = D_f$.
Par exemple, si $\varphi(t) = -t$, il suffit d'étudier la courbe sur $\mathbb{R}_+ \cap D_f$.

2.2 • Variations de $x(t)$ et $y(t)$

Il convient ensuite d'étudier les variations des deux fonctions numériques $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ (supposées dérivables) et de dresser un tableau de variation commun avec des lignes successives pour :

- les valeurs remarquables de t ;
- le signe de $x'(t)$;
- le sens de variation de $x(t)$ et ses limites ;
- le sens de variation de $y(t)$ et ses limites ;
- le signe de $y'(t)$;
- éventuellement les valeurs de $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, qui représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe.

2.3 • Branches infinies

La courbe présente une branche infinie en $t_0 \in \mathbb{R}$, ou lorsque t tend vers $t_0 = \pm\infty$, si $\lim\limits_{t \to t_0} \| \overrightarrow{OM}(t) \| = +\infty$, c'est-à-dire si l'une au moins des coordonnées tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers t_0.

Si $x \to \pm\infty$ et $y \to y_0$, il y a une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.

Si $y \to \pm\infty$ et $x \to x_0$, il y a une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

Si x et y tendent vers l'infini et si le quotient $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers une limite a, finie ou infinie, on dit que la droite vectorielle d'équation $y = ax$ (axe Oy si $a = \pm\infty$) est une **direction asymptotique**.
Dans ce cas, si $a \neq 0$ et si la différence $y(t) - a\,x(t)$ tend vers une limite finie b, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote**. Si cette différence tend vers $\pm\infty$, la courbe présente une **branche parabolique** de direction $y = ax$.

2.4 • Exemple d'étude d'une courbe paramétrée

Soit la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2} \qquad y(t) = \frac{t^3}{1-t^2}$$

La courbe est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$.
$\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} \quad x(-t) = x(t) \quad y(-t) = -y(t)$: la courbe est symétrique par rapport à Ox ; il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$.
Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables et :

$$x'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \qquad y'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$$

D'où le tableau de variation :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$x(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Point stationnaire en $t = 0$:

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{\frac{t^3}{1-t^2}}{\frac{1}{1-t^2} - 1} = t \quad ; \quad \lim_{t \to 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$$

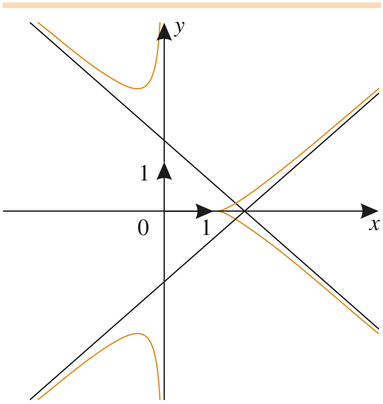
La tangente est horizontale, les arcs de la courbe correspondant à $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ respectivement sont symétriques par rapport à Ox, donc situés de part et d'autre de la tangente en $t = 0$, on dit qu'il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

Branches infinies : quand t tend vers $+\infty$, x tend vers 0 et y tend vers $-\infty$; l'axe (Oy) est asymptote.

Lorsque t tend vers 1, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t^3$; $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$; il y a une direction asymptotique de coefficient directeur 1.

$$y(t) - x(t) = \frac{t^3 - 1}{1 - t^2} = -\frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \quad ; \quad \lim_{t \to 1} \Big(y(t) - x(t)\Big) = -\frac{3}{2}$$

La droite d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique (*Doc.* 2).



Doc. 3

Pour s'entraîner : ex. 5

APPLICATION 1

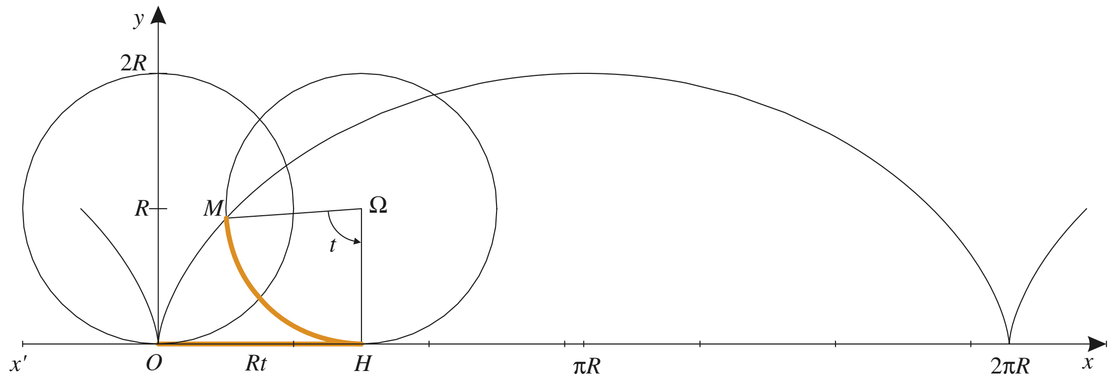
Cycloïde

On appelle cycloïde la courbe décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite D (pensez à un point marqué sur un pneu de vélo).
Déterminer une représentation paramétrique de la cycloïde. Étudier et tracer cette courbe.

Soit R le rayon du cercle. Choisissons pour origine O le point de contact du cercle avec la droite à l'instant initial, pour vecteur $\vec{\imath}$ le vecteur unitaire de la droite D dans le sens du mouvement, et pour vecteur $\vec{\jmath}$ l'image de $\vec{\imath}$ par la rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

Lorsque le cercle a tourné d'un angle t et se trouve en contact avec D en H, le point du cercle qui était initialement en O se trouve en M. Le roulement se fait sans glissement si et seulement si la longueur du segment $[OH]$ est égale à celle de l'arc $\widehat{HM}$, c'est-à-dire Rt (*Doc.* 3). Les coordonnées de M sont donc :

$$\begin{cases} x(t) = Rt + R\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - t\right) \\[2ex] y(t) = R + R\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - t\right) \end{cases}$$



Doc. 4

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Ces formules définissent la cycloïde comme une courbe paramétrée sur $\mathbb{R}$. On remarque que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi R \quad \text{et} \quad y(t + 2\pi) = y(t)$$

ce qui signifie que la cycloïde est invariante par la translation de vecteur $2\pi R\,\vec{\imath}$ et qu'il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.

D'autre part,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(-t) = -x(t) \quad \text{et} \quad y(-t) = y(t)$$

La cycloïde est symétrique par rapport à l'axe Oy ; il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

x	0		π
x'	0	$+$	$2R$
x	0	$\nearrow$	πR
y	0	$\nearrow$	$2R$
y'	0	$+$	0

$$\begin{aligned} x'(t) &= R(1 - \cos t) \geqslant 0 \\ y'(t) &= R \sin t \geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{sur } [0, \pi].$$

Il y a un point stationnaire pour $t = 0$. Remarquons que pour $t \in \,]0, \pi[$:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{1 + \cos t}{\sin t}$$

Ce quotient tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs positives. Il s'ensuit que la tangente au point $M(t)$ tend vers l'axe Oy quand t tend vers 0. Nous démontrerons plus tard dans le chapitre 18 que dans ce cas l'axe Oy est tangent à la courbe au point $M(0)$. La symétrie par rapport à l'axe (Oy) permet de reconnaître un point de rebroussement de première espèce.

Nous pouvons donc construire l'arc correspondant à l'intervalle $[0, \pi]$, puis compléter la courbe par la symétrie et les translations étudiées ci-dessus.

Pour s'entraîner : ex. 6, 7

3 Courbes en coordonnées polaires

3.1 • Représentation polaire d'une courbe paramétrée

Soit P un plan euclidien orienté, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Une courbe paramétrée de P peut être représentée par des coordonnées polaires

$(\rho(t), \theta(t))$ fonctions du paramètre réel t,

$$\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{f}(t) = \rho(t)\,\vec{u}\left(\theta(t)\right) \quad \text{où} \quad \vec{u}(\theta(t)) = \cos\theta(t)\,\vec{\imath} + \sin\theta(t)\,\vec{\jmath}$$

ce qui équivaut formellement à la représentation cartésienne :

$$x(t) = \rho(t)\,\cos\theta(t) \qquad , \qquad y(t) = \rho(t)\,\sin\theta(t)$$

On peut donc théoriquement se ramener à l'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes, mais les propriétés de certaines courbes sont plus clairement mises en évidence par l'usage des coordonnées polaires.

3.1 • Expression de la vitesse

Utilisons le repère polaire $\left(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\right)$ où $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$. Notons que les fonctions $\theta \mapsto \vec{u}(\theta)$ et $\theta \mapsto \vec{v}(\theta)$ sont dérivables et que :

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}\,\theta}(\theta) = \vec{v}(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,\theta}(\theta) = -\vec{u}(\theta)$$

On en déduit que si les fonctions $t \mapsto \rho(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ sont dérivables, la courbe paramétrée correspondante est dérivable et :

$$\overrightarrow{f'}(t) = \rho'(t)\,\vec{u}(\theta(t)) + \rho(t)\,\theta'(t)\,\vec{v}(\theta(t))$$

3.2 • Expression de l'accélération

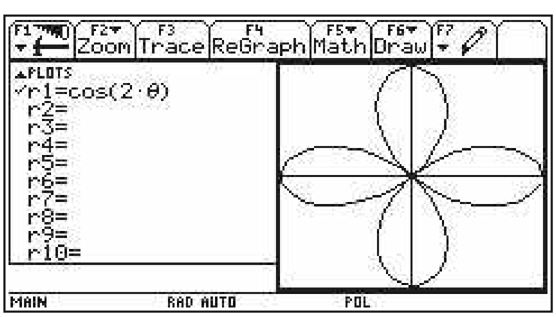
De même, si les fonctions $t \mapsto \rho(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ sont deux fois dérivables, la courbe paramétrée correspondante est deux fois dérivable et :

$$\overrightarrow{f''}(t) = \rho''(t)\,\vec{u}(\theta(t)) + 2\rho'(t)\,\theta'(t)\,\vec{v}(\theta(t)) + \rho(t)\,\theta''(t)\,\vec{v}(\theta(t)) - \rho(t)\,\theta'(t)^2\,\vec{u}(\theta(t))$$

soit :

$$\overrightarrow{f''}(t) = \left[\rho''(t) - \rho(t)\,\theta'(t)^2\right]\,\vec{u}(\theta(t)) + \left[2\rho'(t)\,\theta'(t) + \rho(t)\,\theta''(t)\right]\,\vec{v}(\theta(t))$$

3.2 • Courbe définie par l'équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$



TI92/Voyage 200. Pour tracer une courbe définie par une équation polaire, passez en MODE `Graph POLAR`.

Le cas le plus simple est celui où le paramètre est θ lui-même. On peut se figurer le mouvement comme celui d'un « radar » qui tourne autour de l'origine et qui dans chaque direction repère les points par leur rayon polaire $\rho(\theta)$.

$$\overrightarrow{OM(\theta)} = \overrightarrow{f}(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$$

Si la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est de classe C^2, les formules précédentes donnent :

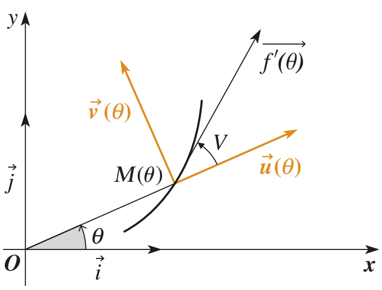
$$\overrightarrow{f'}(\theta) = \rho'(\theta)\,\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\,\vec{v}(\theta)$$

$$\overrightarrow{f''}(\theta) = \left(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\right)\,\vec{u}(\theta) + 2\rho'(\theta)\,\vec{v}(\theta)$$

On peut en déduire quelques propriétés très particulières de ce type de représentation :

- Caractérisons la tangente en un point régulier par l'angle $V = (\vec{u}(\theta), \overrightarrow{f'}(\theta))$ (*Doc.* 4) :

$$\boxed{\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}} \qquad (\text{si } \rho'(\theta) = 0 \quad V = \pm\frac{\pi}{2})$$



Doc. 5 Tangente en coordonnées polaires.

- Le point $(\theta, M(\theta))$ est stationnaire si et seulement si $\rho(\theta) = 0$ et $\rho'(\theta) = 0$. Dans cette représentation, les points stationnaires sont nécessairement à l'origine !
- Si $\rho(\theta_0) = 0$, $\quad \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \dfrac{\overrightarrow{OM(\theta)}}{\rho(\theta)} = \vec{u}(\theta_0)$. À un passage à l'origine, qu'il soit régulier ou stationnaire, la tangente est toujours dirigée par le vecteur $\vec{u}(\theta_0)$.

3.3 • Plan d'étude d'une courbe définie par une équation polaire

Soit une courbe paramétrée définie par l'équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$.

3.1 • Périodicité

Il faut bien distinguer les périodes de la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$ et les périodes de la courbe paramétrée $\theta \mapsto M(\theta)$, qui ne peuvent être que des multiples de π (rappelons que les points de coordonnées polaires $\big(\theta, \rho(\theta)\big)$ et $\big(\theta + \pi, -\rho(\theta)\big)$ sont confondus.

■ Si T est une période quelconque de la fonction ρ, c'est-à-dire si :

$$\forall \theta \in D \quad \theta - T \in D\,,\ \theta + T \in D \quad \text{et} \quad \rho(\theta + T) = \rho(\theta)$$

la courbe est invariante par la rotation de centre O d'angle T.
En particulier si $T = \pi$, la courbe est invariante par la symétrie centrale de centre O.

■ Supposons qu'il existe une période de la fonction ρ de la forme $T_1 = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Alors T_1 est aussi une période de la courbe paramétrée. Le point $M(\theta)$ revient à la même place après k tours autour de l'origine.

■ Soit k le plus petit entier strictement positif tel que $T_1 = 2k\pi$ soit une période de la fonction ρ.

- Si k est pair, T_1 est la plus petite période strictement positive de la courbe paramétrée.
- Si k est impair et si :

$$\forall \theta \in D \quad \theta - k\pi \in D\,,\ \theta + k\pi \in D \quad \text{et} \quad \rho(\theta + k\pi) = -\rho(\theta)$$

alors la plus petite période strictement positive de la courbe paramétrée est $\dfrac{T_1}{2} = k\pi$: le point $M(\theta)$ revient à la même place après k demi-tours autour de l'origine.

En particulier si :
$\forall \theta \in D$, $\theta - \pi \in D$, $\theta + \pi \in D$ et $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, alors π est la plus petite période de la courbe paramétrée.

3.2 • Symétries

Supposons qu'il existe une valeur θ_0 telle que :

- $\forall \theta \in D \quad \theta_0 - \theta \in D \quad$ et $\quad \rho(\theta_0 - \theta) = \rho(\theta)$
  la courbe est invariante par la réflexion dont l'axe est dirigé par le vecteur $\vec{u}\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right)$.
- $\forall \theta \in D \quad \theta_0 - \theta \in D \quad$ et $\quad \rho(\theta_0 - \theta) = -\rho(\theta)$
  la courbe est invariante par la réflexion dont l'axe est dirigé par le vecteur $\vec{u}\left(\dfrac{\theta_0}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Comme dans le cas d'une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes, on cherche un intervalle d'étude suffisant pour reconstituer toute la courbe par les différentes symétries ou rotations trouvées.

3.3 • Étude du signe de la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$

Le sens de variation de la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$ n'est pas absolument indispensable ; en revanche, il est essentiel d'étudier le signe de cette fonction et de repérer ses annulations, qui correspondent à des passages à l'origine.
On fera donc un tableau de *signe* de $\rho(\theta)$.

θ	0		θ_0		π
ρ		$+$	0	$-$	

La dérivée $\rho'(\theta)$ peut être utile pour déterminer la tangente en des points particuliers, grâce à la formule $\tan V = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.

3.4 • Branches infinies

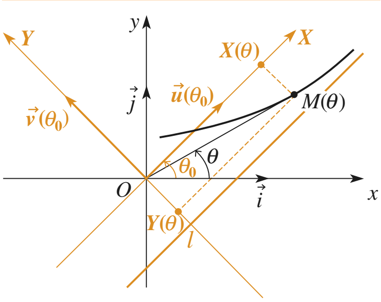
Soit θ_0 une valeur telle que $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$. Les coordonnées de $M(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$ sont :

$$X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \quad ; \quad Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$

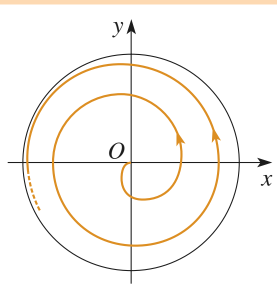
Il est clair que $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} X(\theta) = \pm\infty$.

- Supposons que $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} Y(\theta) = l$.
  La courbe possède alors une asymptote d'équation $Y = l$ dans le repère $(O, \vec{u}(\theta_0), \vec{v}(\theta_0))$ (*Doc.* 5).
- Supposons que $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} Y(\theta) = \pm\infty$. La courbe possède alors une branche parabolique de direction $\vec{u}(\theta_0)$.

Si $\rho(\theta)$ admet une limite finie r quand θ tend vers $\pm\infty$, la courbe est asymptote au cercle de centre O de rayon $|r|$ (voir *exercice* 8.**f**) (*Doc.* 6).



Doc. 6 Asymptote en coordonnées polaires.



Doc. 7 Cercle asymptote.

3.4 • Exemple de courbe définie par une équation polaire

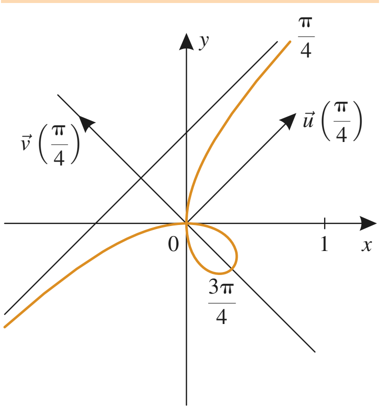
$$\rho(\theta) = \frac{\sin\theta\,\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

La courbe paramétrée est définie pour $\theta \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

$\forall\theta \quad \rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$: la courbe est entièrement décrite sur un intervalle d'amplitude π.

$\forall\theta \quad \rho\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = -\rho(\theta)$: la courbe est symétrique par rapport à la seconde bissectrice. Il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

$$\rho'(\theta) = -\frac{(\sin^3\theta + \cos^3\theta)}{(\sin\theta - \cos\theta)^2}$$



Doc. 8

Signe de $\rho(\theta)$:

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
$\rho(\theta)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Branche infinie : $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \rho(\theta) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \sin\theta \cos\theta \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

La courbe (*Doc.* 7) présente donc une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ dans le repère $\left(O, \vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right), \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

En $\frac{\pi}{2}$, passage à l'origine avec une tangente dirigée par $\vec{u}\,(\frac{\pi}{2})$ (c'est-à-dire verticale).

En $\frac{3\pi}{4}$, $\rho'(\theta) = 0$, la tangente est perpendiculaire à (OM).

Pour s'entraîner : ex. 8, 9

APPLICATION 2

Limaçons de Pascal

Soit C le cercle de centre $I(1,0)$ et de rayon 1. Une droite D passant par O recoupe le cercle C en un point P (éventuellement confondu avec O si D est tangente à C). On construit sur D deux points M et N distincts tels que $PM = PN = a$, où a est un réel strictement positif fixé.

***1)** Déterminer une équation polaire de l'ensemble Γ_a décrit par les points M et N.*

***2)** Étudier Γ_a en discutant suivant les valeurs de a.*

***3)** Tracer Γ_a pour $a \in \{1,2,3,4,5\}$.*

***4)** Déterminer le lieu des points à tangente verticale de Γ_a lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^*$.*

1) Le cercle C a pour équation polaire $\rho = 2\cos(\theta)$, les points M et N vérifient donc : $\rho_M = 2\cos\theta + a$ et $\rho_N = 2\cos\theta - a$. On observe que $\rho_M(\theta + \pi) = -\rho_N(\theta)$; les points $M(\theta + \pi)$ et $N(\theta)$ sont donc confondus. Les points M et N décrivent la même courbe Γ_a, d'équation polaire $\rho = 2\cos\theta + a$.

2) La période est 2π, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$. La courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox, et il suffit de faire l'étude sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Signe de ρ :

- si $a > 2$, ρ est toujours strictement positif ;
- si $a = 2$, ρ est positif et s'annule pour $\theta = \pi$;
- si $a < 2$, ρ s'annule pour :

$$\theta = \alpha = \text{Arccos}\,(-\frac{a}{2}) \quad (\alpha > \frac{\pi}{2})$$

θ	0		α		π
ρ		$+$	0	$-$	

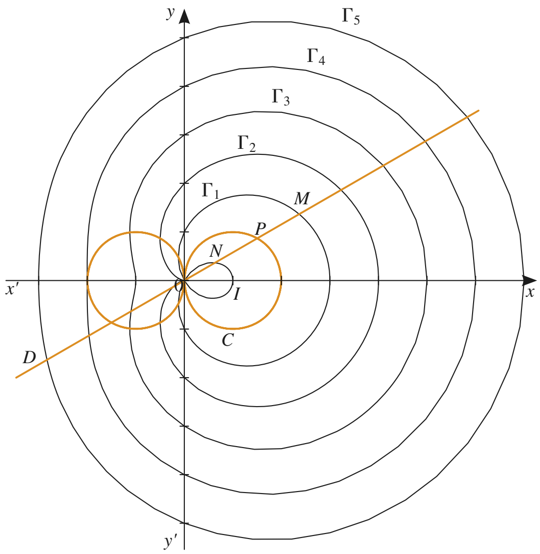
3) Figure : *Document* 8.

4) Points à tangente verticale. Revenons en coordonnées cartésiennes :

$$x(\theta) = (2\cos\theta + a)\cos\theta \qquad y(\theta) = (2\cos\theta + a)\sin\theta$$

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= -2\sin\theta\cos\theta - (2\cos\theta + a)\sin\theta \\ &= -\sin\theta(4\cos\theta + a) \end{aligned}$$

L'unique point stationnaire, obtenu pour $a = 2$ et $\theta = \pi$ n'a pas une tangente verticale. En dehors de ce cas, la tangente est verticale si et seulement si $x'(\theta) = 0$. $x'(\theta)$ s'annule pour $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ ou



Doc. 9

si $a < 4$, pour $\theta = \text{Arccos}\left(-\dfrac{a}{4}\right)$. L'ensemble des points à tangente verticale est donc l'axe Ox privé de l'origine, et l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que :

$$x = -\frac{a^2}{8} \qquad y^2 = \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{a^2}{16}\right)$$

soit : $y^2 = -2x\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)$.

L'équation cartésienne de cet ensemble est :

$$x^2 + y^2 + 2x = 0.$$

On reconnaît le cercle de centre $(-1, 0)$ de rayon 1 (privé lui aussi de l'origine).

MÉTHODE

Pour étudier une courbe définie paramétriquement :

- on détermine l'ensemble de définition ;
- on étudie la périodicité et les symétries éventuelles qui permettent de déterminer un intervalle d'étude à partir duquel on pourra reconstituer toute la courbe ;
- on étudie les variations des fonctions coordonnées sur l'intervalle d'étude ;
- on dresse un tableau de variation conjoint des deux fonctions coordonnées ;
- on repère les points stationnaires ;
- on étudie les branches infinies, et en particulier les éventuelles asymptotes ;
- on trace la partie de courbe correspondant à l'intervalle d'étude, que l'on complète par les symétries ou autres transformations trouvées (voir *exercice* 5).

Pour étudier une courbe définie par une équation polaire :

- on détermine l'ensemble de définition ;
- on étudie les périodes de la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$, d'où l'on déduit les éventuelles périodes de la courbe paramétrée, et les invariances par rotation ;
- on étudie les symétries ; on en déduit un intervalle d'étude à partir duquel on pourra reconstituer toute la courbe ;
- on étudie le **signe** de la fonction $\theta \mapsto \rho(\theta)$, de préférence à ses variations ;
- on repère les passages à l'origine ;
- on étudie les branches infinies, en particulier les éventuelles asymptotes et les branches spirales ;
- on trace la partie de courbe correspondant à l'intervalle d'étude, que l'on complète par les symétries ou autres transformations trouvées (voir *exercice* 8).

Exercice résolu

ASTROÏDE

On considère la courbe Γ *définie paramétriquement par :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

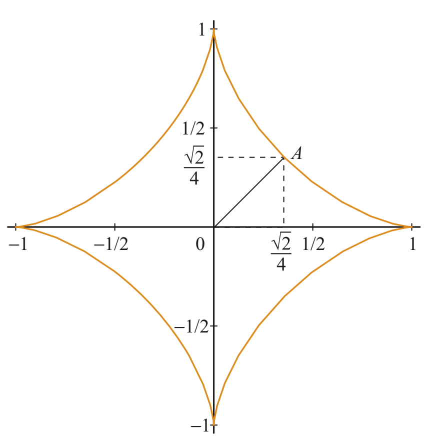
1 *Étudier et tracer* Γ.

2 *Pour tout point* $M(t)$ *de* Γ *non situé sur l'un des axes de coordonnées, on considère* $P(t)$ *et* $Q(t)$, *points d'intersection de la tangente à* Γ *en* $M(t)$ *avec* Ox *et* Oy *respectivement.*

Montrer que $\|\overrightarrow{P(t)Q(t)}\|$ *est une constante que l'on déterminera.*

Conseils

La période et les symétries permettent de ramener l'intervalle d'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$!



Doc. 10

Solution

1) $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t) = \cos^3 t\,\vec{\imath} + \sin^3 t\,\vec{\jmath}$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, de plus $M(t+2\pi) = M(t)$, la courbe est fermée et entièrement décrite quand t varie dans un intervalle d'amplitude 2π.

Recherchons d'éventuelles symétries permettant de limiter le domaine d'étude :

- $\overrightarrow{OM(-t)} = x(t)\,\vec{\imath} - y(t)\,\vec{\jmath}$, les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe Ox, l'étude de la courbe se fera pour $t \in [0, \pi]$, et l'on complètera par cette symétrie ;
- $\overrightarrow{OM(\pi - t)} = -x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$, les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe Oy, l'étude de la courbe se fera pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et l'on complètera par cette symétrie ;
- $\overrightarrow{OM(\frac{\pi}{2} - t)} = y(t)\,\vec{\imath} + x(t)\,\vec{\jmath}$, les points $M(t)$ et $M(\frac{\pi}{2} - t)$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, l'étude de la courbe se fera pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, et l'on complètera par cette symétrie.

$\vec{f}'(t) = -3\sin t\cos^2 t\,\vec{\imath} + 3\cos t\sin^2 t\,\vec{\jmath}$, d'où le tableau de variation pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$:

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

Le point $M(0)$ est stationnaire ; $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$. Ce point présente donc une tangente horizontale, la symétrie par rapport à Ox permet de reconnaître un point de rebroussement de première espèce (*Doc.* 9).

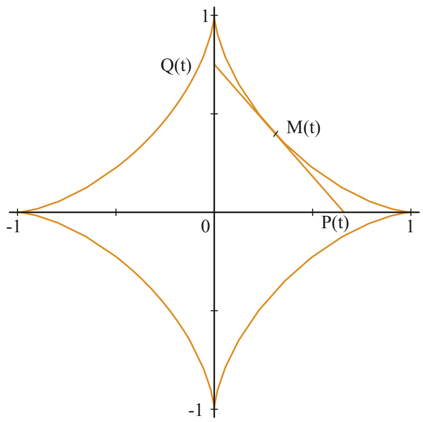
Trouver une équation cartésienne de la tangente en $M(t)$.

2) La tangente en $M(t)$, $t \neq k\dfrac{\pi}{2}$ a pour équation :

$$\frac{x-\cos^3 t}{-\cos t}=\frac{y-\sin^3 t}{\sin t}$$

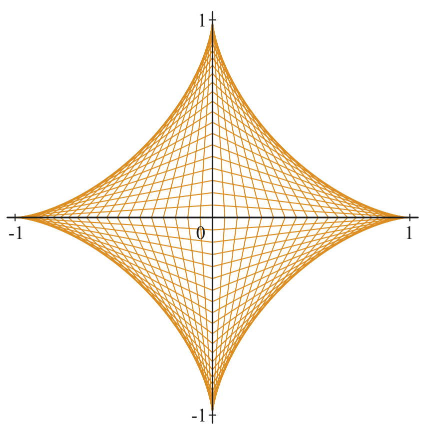
c'est-à-dire : $x\sin t + y\cos t - \sin t\cos t = 0$.

Le point $P(t)$, intersection de cette tangente avec l'axe Ox a pour coordonnées : $(\cos t, 0)$; le point $Q(t)$, intersection de la tangente avec l'axe Oy a pour coordonnées : $(0, \sin t)$. D'où $\|\overrightarrow{P(t)Q(t)}\| = 1$. Le segment de tangente découpé par les axes a une longueur constante (*Doc.* 10).



Doc. 11

En superposant des segments de longueur 1 s'appuyant sur les axes, on voit apparaître une astroïde sans l'avoir dessinée ! On dit que cette courbe est l'enveloppe de ces segments (*Doc.* 11) .



Doc. 12

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une courbe de classe C^1 est toujours régulière.

b) La tangente en un point $M(t_0)$ est la position limite de la sécante $(M(t_0)M(t))$ quand t tend vers t_0.

c) En un point qui n'est pas régulier, la courbe ne possède pas de tangente.

d) $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\,\vec{u}$, avec $\vec{u}$ unitaire, entraîne que $\rho(\theta) = \|\overrightarrow{OM(\theta)}\|$.

e) Une courbe paramétrée définie par une équation polaire de classe C^1 ne peut avoir de point stationnaire qu'à l'origine.

f) La période d'une courbe paramétrée définie par une équation polaire est un multiple de 2π.

Courbes paramétrées

2 Une courbe paramétrée $(I, \vec{f})$ possède un point double s'il existe $(t_0, t_1) \in I^2$ tel que $M(t_0) = M(t_1)$.

Montrer que la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

admet un point double. Déterminer les deux tangentes correspondantes.

3 On considère la courbe Γ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$$

Déterminer une droite tangente à Γ en un point et normale à Γ en un autre point.

4 On considère la courbe Γ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{1}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Déterminer la condition d'alignement de trois points de Γ. En déduire l'existence d'un point double que l'on déterminera.

5 Étudier et tracer les courbes paramétrées définies par :

a) $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = 2t^2 - t^4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = \cos t + \cos 3t \\ y(t) = \sin t + \sin 3t \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2+t^3}{1+t^2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \dfrac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \end{cases}$

6 **Épicycloïdes.** Soit C un cercle fixe de centre O, de rayon R, et n un entier naturel non nul. Soit C' un cercle de rayon $\dfrac{R}{n}$ qui roule sans glisser à l'extérieur du cercle C.

Déterminer une représentation paramétrique de la courbe décrite par un point de C'.

Étudier et tracer les courbes correspondant à :

- $n = 1$ (Cardioïde)
- $n = 2$ (Néphroïde)

7 **Hypocycloïdes.** Reprendre l'exercice précédent lorsque le cercle C' est à l'intérieur du cercle C.

Étudier et tracer les courbes correspondant à :

- $n = 2$
- $n = 3$

Courbes définies par une équation polaire

8 Étudier et tracer les courbes définies par l'équation polaire :

a) $\rho(\theta) = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ **b)** $\rho(\theta) = \cos\dfrac{3}{2}\theta + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\rho(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$ **d)** $\rho(\theta) = \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \cos\theta}$

e) $\rho(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{1 - 2\cos\theta}$ **f)** $\rho(\theta) = \dfrac{\theta}{\theta - \pi}$

9 **Lemniscate de Bernoulli.** On considère les points $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$. Déterminer une équation polaire de l'ensemble C des points M du plan tels que $MF \cdot MF' = 1$. Étudier et tracer cette courbe.

10 Soit la droite D d'équation $x = -1$ et le cercle C de centre $I(1,0)$ et de rayon 1. Une droite Δ passant par O coupe D en P et C en Q. Déterminer l'ensemble Γ décrit par le point M, milieu de $[PQ]$.

Exercices posés aux oraux des concours

11 (Centrale-Supelec 2006)

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on donne le cercle unité C : $x^2 + y^2 = 1$, deux points $A(0,1)$, $B(-1,0)$, et leurs symétriques A' et B' par rapport à O.

1) Montrer que $\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$ est un paramétrage injectif de C privé du point B. Interprétation géométrique du paramètre t ?

2) Soit $M_0(t_0)$ un point de C différent de A, B, A', B'. Soit $M_1(t_1)$ le point de C tel que la tangente en M_0 à C, l'axe des abscisses et la droite (AM_1) soient concourantes. Trouver le paramètre t_1 de M_1 en fonction de t_0.
On recommence la construction en remplaçant M_0 par M_1 pour obtenir un point M_2, puis de proche en proche un point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12 (TPE 2006)

Construire la courbe d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{3} - 2\cos\theta}.$$

Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

6 Coniques

INTRODUCTION

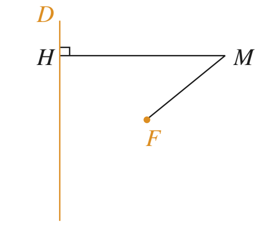
Étudiées par Apollonius, mathématicien grec de l'École d'Alexandrie (200 ans av. J.-C.), *comme sections d'un cône par un plan, les coniques ressurgissent au* XVII^{e} *siècle lorsque Kepler découvre que ce sont les trajectoires naturelles des planètes et comètes. Cette découverte, qui heurte les conceptions anciennes faisant de la droite et du cercle les seules figures parfaites dignes de guider la marche des astres, est à l'origine de la théorie de la gravitation de Newton et marque un tournant capital dans l'histoire des sciences.*

OBJECTIFS

- Étude des différents types de coniques : ellipse, parabole, hyperbole, notamment en vue de leur utilisation en Physique.
- Mise en œuvre des connaissances acquises sur les courbes paramétrées : équation polaire, tangente.
- Reconnaître une conique donnée par son équation cartésienne dans un repère orthonormal quelconque.

1 Coniques définies par foyer et directrice

1.1 • Définition



Doc. 1 Foyer et directrice.

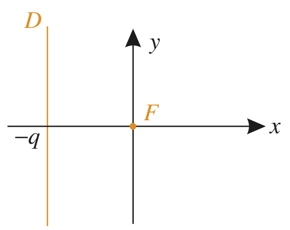
Soit dans le plan P une droite D et un point F n'appartenant pas à D. Soit e un réel strictement positif. On appelle **conique** de **foyer** F, de **directrice** D et d'**excentricité** e l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de P tels que :

$$\frac{MF}{d(M,D)} = e$$

C'est-à-dire $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur D (*Doc.* 1).

Remarque *: Cette définition ne faisant intervenir que des rapports de distance, elle est invariante par similitude : l'image d'une conique par une similitude est une conique de même excentricité.*

1.2 • Équation cartésienne dans un repère orthonormal



Doc. 2 Repère d'origine F.

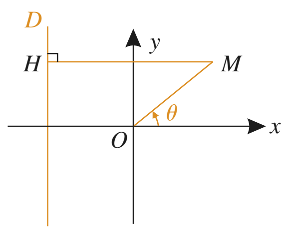
Afin d'écrire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$, choisissons un repère orthonormal d'origine F, l'axe des ordonnées étant parallèle à D, de sorte que l'équation de D soit $x = -q$ (*Doc.* 2).

$$M(x,y) \in \mathcal{C} \iff MF^2 = e^2 MH^2 \iff x^2 + y^2 = e^2(x+q)^2$$

On pose $p = eq$ (p est appelé **paramètre** de la conique). L'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit :

$$\boxed{x^2 + y^2 = (ex+p)^2}$$

1.3 • Équation polaire d'une conique de foyer *O*



Doc. 3 Représentation polaire d'une conique.

Si le point M de la conique a pour coordonnées polaires (ρ, θ), on a : $MO = \rho$ et $MH = \rho\cos\theta + q$ (*Doc.* 3). D'où :

$$M \in \mathcal{C} \iff \rho = e\left(\rho\cos\theta + \frac{p}{e}\right) = e\rho\cos\theta + p$$

La conique $\mathcal{C}$ a donc pour équation polaire :

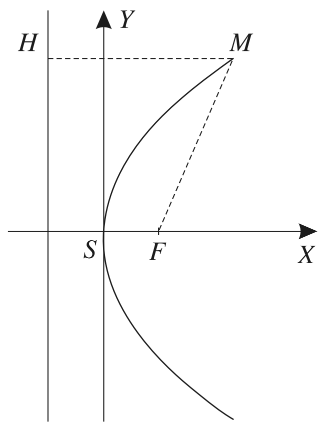
$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}}$$

Remarque *: Si on change l'orientation de l'axe* Ox*, cela revient à changer* θ *en* $\theta + \pi$*. L'équation polaire devient :*

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

2 Parabole

2.1 • Équation réduite



Doc. 4 Parabole.

On appelle **parabole** une conique d'excentricité $e = 1$. Son équation dans le repère choisi au §1.2 est : $x^2 + y^2 = (x + p)^2$, c'est-à-dire : $y^2 = 2px + p^2$.

Effectuons un changement de repère en choisissant pour nouvelle origine le point $S(-\frac{p}{2}, 0)$ (**sommet** de la parabole) (*Doc.* 4). Les coordonnées (X, Y) de M dans le nouveau repère sont données par : $\begin{cases} X = x + \dfrac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}$.

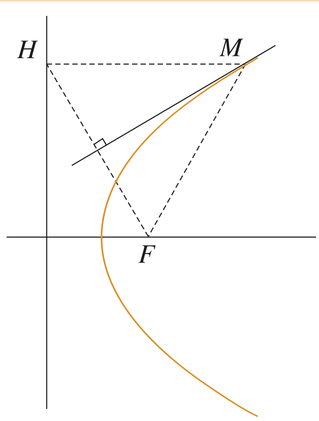
L'équation de la parabole devient :

$$\boxed{Y^2 = 2pX} \qquad \text{(\textbf{équation réduite} de la parabole)}$$

2.2 • Paramétrage de la parabole

On peut choisir Y comme paramètre : $\begin{cases} X(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ Y(t) = t \end{cases}$

2.3 • Tangente à la parabole



Doc. 5 Tangente à la parabole.

Soit M un point quelconque de la parabole de foyer F, de directrice D, et H le projeté orthogonal de M sur D (*Doc.* 5). La parabole étant supposée paramétrée, dérivons la relation : $\overrightarrow{FM}^2 = \overrightarrow{HM}^2$:

$$2\overrightarrow{FM} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = 2\overrightarrow{HM} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{H}}{\mathrm{d}t} \right)$$

Or $\overrightarrow{HM} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{H}}{\mathrm{d}t} = 0$, d'où $\overrightarrow{FH} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = 0$.

La tangente en M à la parabole est orthogonale à (FH) : c'est la médiatrice de $[FH]$. C'est ce qui permet d'expliquer les propriétés d'un miroir parabolique : un rayon lumineux issu du foyer se réfléchit sur le miroir (localement assimilable à sa tangente) suivant une parallèle à l'axe de la parabole (phare) ; dans l'autre sens, les rayons lumineux parallèles à l'axe sont concentrés au foyer (antenne, téléscope, four solaire...).

Antenne parabolique.

Si la parabole est représentée par son équation réduite $y^2 = 2px$, un point $N(x, y)$ appartient à la tangente en $M(x_0, y_0)$ si et seulement si : $NH^2 = NF^2$, soit :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

ce qui équivaut à : $yy_0 = p(x + x_0)$. On retrouve le même principe de « dédoublement » déjà rencontré pour les cercles.

Pour s'entraîner : ex. 5

3 Ellipse

3.1 • Équation réduite

On appelle **ellipse** une conique d'excentricité $e < 1$. Son équation dans le repère choisi au §1.2 est : $x^2 + y^2 = (ex + p)^2$, c'est-à-dire :

$$(1 - e^2)\left(x^2 - \frac{2ep}{1 - e^2}x\right) + y^2 = p^2$$

Effectuons un changement de repère en choisissant pour nouvelle origine le point $O(\frac{ep}{1 - e^2}, 0)$. Les coordonnées (X, Y) de M dans le nouveau repère sont données par : $\begin{cases} X = x - \dfrac{ep}{1 - e^2} \\ Y = y \end{cases}$. L'équation de l'ellipse devient :

$$(1 - e^2)X^2 + Y^2 = p^2 + \frac{e^2p^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2}$$

Posons $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$. L'équation de l'ellipse s'écrit :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$ (**équation réduite** de l'ellipse)

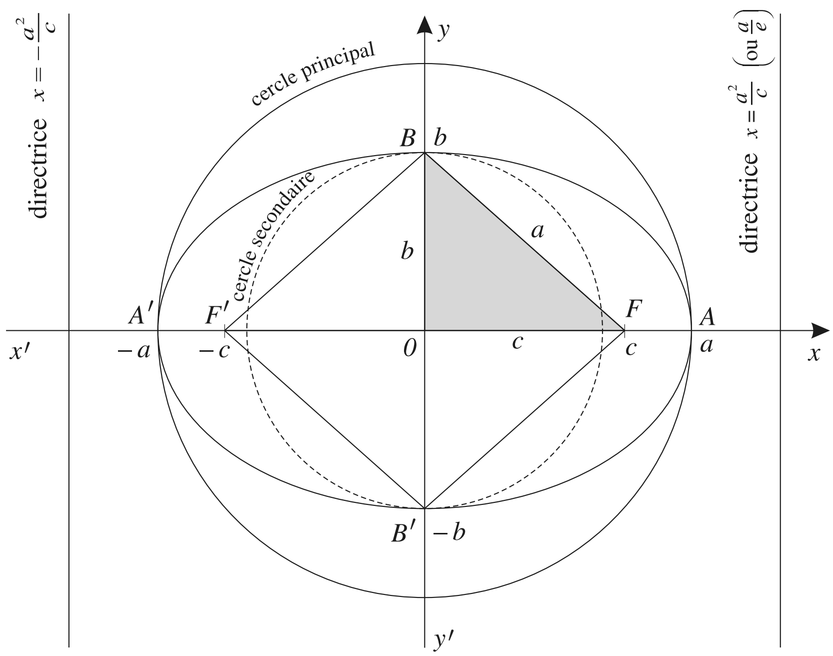
À RETENIR

$MF + MF' = 2a$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$e = \dfrac{c}{a}$



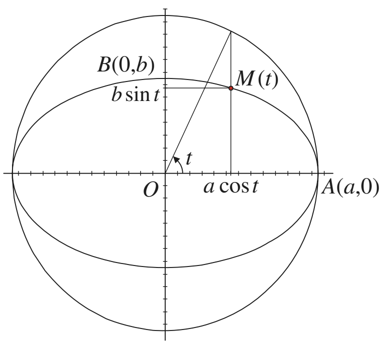
Doc. 6 Ellipse. Sur cette figure, $e = \dfrac{3}{4}$.

On remarque que l'ellipse a deux axes de symétrie (*Doc.* 6). Il existe donc un deuxième foyer F' et une deuxième directrice D', symétriques des premiers par rapport à l'axe OY. Les foyers ont pour coordonnées $(ea, 0)$ et $(-ea, 0)$; les directrices ont pour équations $X = \dfrac{a}{e}$ et $X = -\dfrac{a}{e}$.

- a est appelé **demi-grand axe**.
- b est appelé **demi-petit axe** (on vérifie que $b < a$).
- $OF = c = ea$ est appelé **demi-distance focale**.

On remarque que $a^2 = b^2 + c^2$, c'est-à-dire que le triangle (OBF) est rectangle en O.

3.2 • Paramétrage de l'ellipse



Doc. 7 Cercle principal d'une ellipse.

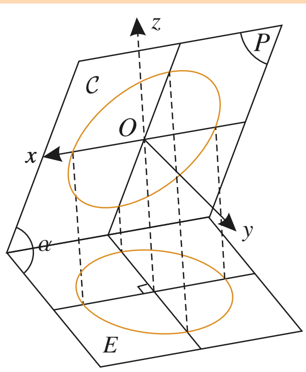
L'ellipse $\mathcal{C}$ est l'image du cercle de centre O de rayon a (appelé **cercle principal** de l'ellipse) (*Doc.* 7) par l'application affine définie analytiquement par : $\begin{cases} X' = X \\ Y' = \dfrac{b}{a}Y \end{cases}$.

Cette application est appelée **affinité orthogonale** d'axe (OX) et de rapport $\dfrac{b}{a}$.

On en déduit un paramétrage simple de l'ellipse :

$$\begin{cases} X(t) = a\cos t \\ Y(t) = b\sin t \end{cases}$$

3.3 • Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan



Doc. 8 Projection d'un cercle sur un plan.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O, de rayon R, dans le plan P contenant l'axe Ox et faisant un angle α avec l'axe Oy (*Doc.* 8).

Le cercle $\mathcal{C}$ est l'intersection de P et de la sphère de centre O de rayon R ; il a donc pour équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = y\tan\alpha \end{cases}$$

On en déduit : $x^2 + y^2(1 + \tan^2\alpha) = R^2$, soit :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2\cos^2\alpha} = 1$$

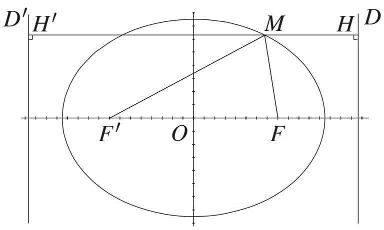
La projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur un plan parallèle à (xOy) est donc une ellipse de demi-grand axe R et de demi-petit axe $R\cos\alpha$. On en déduit que sa demi-distance focale est $c = R\sin\alpha$, et son excentricité : $e = \dfrac{c}{a} = \sin\alpha$.

Ceci explique pourquoi un cercle de l'espace est vu en perspective sous forme d'une ellipse ; on pense par exemple aux anneaux de Saturne.

Photo infrarouge de Saturne par le téléscope spatial Hubble (NASA).

Pour s'entraîner : ex. 2

3.4 • Définition bifocale de l'ellipse



Doc. 9 Propriété bifocale de l'ellipse.

Projetons un point M de l'ellipse orthogonalement sur chacune des directrices D et D' en H et H' (*Doc.* 9). Du fait de la définition d'une conique :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{MF'}{MH'} = e \quad ; \quad \text{d'où} \quad MF + MF' = e(MH + MH')$$

Comme $M \in [HH']$, $MH + MH' = HH' = \dfrac{2a}{e}$. D'où :

$$\forall M \in \mathcal{C} \quad MF + MF' = 2a$$

Nous admettrons que réciproquement, tout point vérifiant cette relation appartient à l'ellipse $\mathcal{C}$ (on peut le vérifier analytiquement).

Une ellipse est donc l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Ce principe sert aux jardiniers à tracer de belles plates-bandes elliptiques.

3.5 • Tangente à l'ellipse

Soit E l'ellipse définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$; considérons le point M_0 de E de coordonnées $x_0 = a \cos t_0$, $y_0 = b \sin t_0$. La tangente à E au point M_0 est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = (-a \sin t_0, b \cos t_0) = \left(-\frac{ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}\right)$$

Son équation cartésienne est donc :

$$\frac{bx_0}{a}(x - x_0) + \frac{ay_0}{b}(y - y_0) = 0$$

ce qui équivaut à : $\dfrac{bxx_0}{a} + \dfrac{ayy_0}{b} = \dfrac{bx_0^2}{a} + \dfrac{ay_0^2}{b}$, ou encore à :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

comme M_0 appartient à E, $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$; l'équation de la tangente est donc :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

On retrouve encore le principe de « dédoublement », comme pour le cercle et la parabole.

APPLICATION 1

Propriété géométrique de la tangente à l'ellipse

Supposons l'ellipse paramétrée, et dérivons la relation :

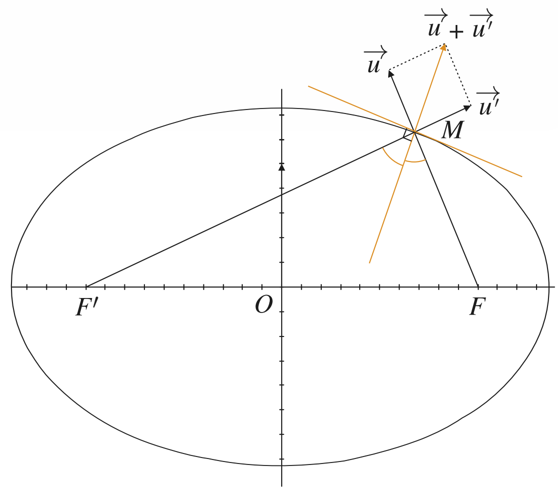
$$\sqrt{\overrightarrow{FM}^{\,2}} + \sqrt{\overrightarrow{F'M}^{\,2}} = 2a :$$

$$\frac{\overrightarrow{FM} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}}{\| \overrightarrow{FM} \|} + \frac{\overrightarrow{F'M} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}}{\| \overrightarrow{F'M} \|} = 0$$

Posons $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\| \overrightarrow{FM} \|}$ et $\vec{u'} = \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\| \overrightarrow{F'M} \|}$ (ce sont des vecteurs unitaires des droites (FM) et $(F'M)$). On a :

$$(\vec{u} + \vec{u'}) \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = 0$$

La tangente en M à l'ellipse est orthogonale à $\vec{u} + \vec{u'}$: c'est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$ (*Doc.* 10).



Doc. 10

4 Hyperbole

4.1 • Équation réduite

On appelle **hyperbole** une conique d'excentricité $e > 1$ (*Doc.* 11). Son équation dans le repère choisi au §1.2 est : $x^2 + y^2 = (ex + p)^2$, c'est-à-dire :

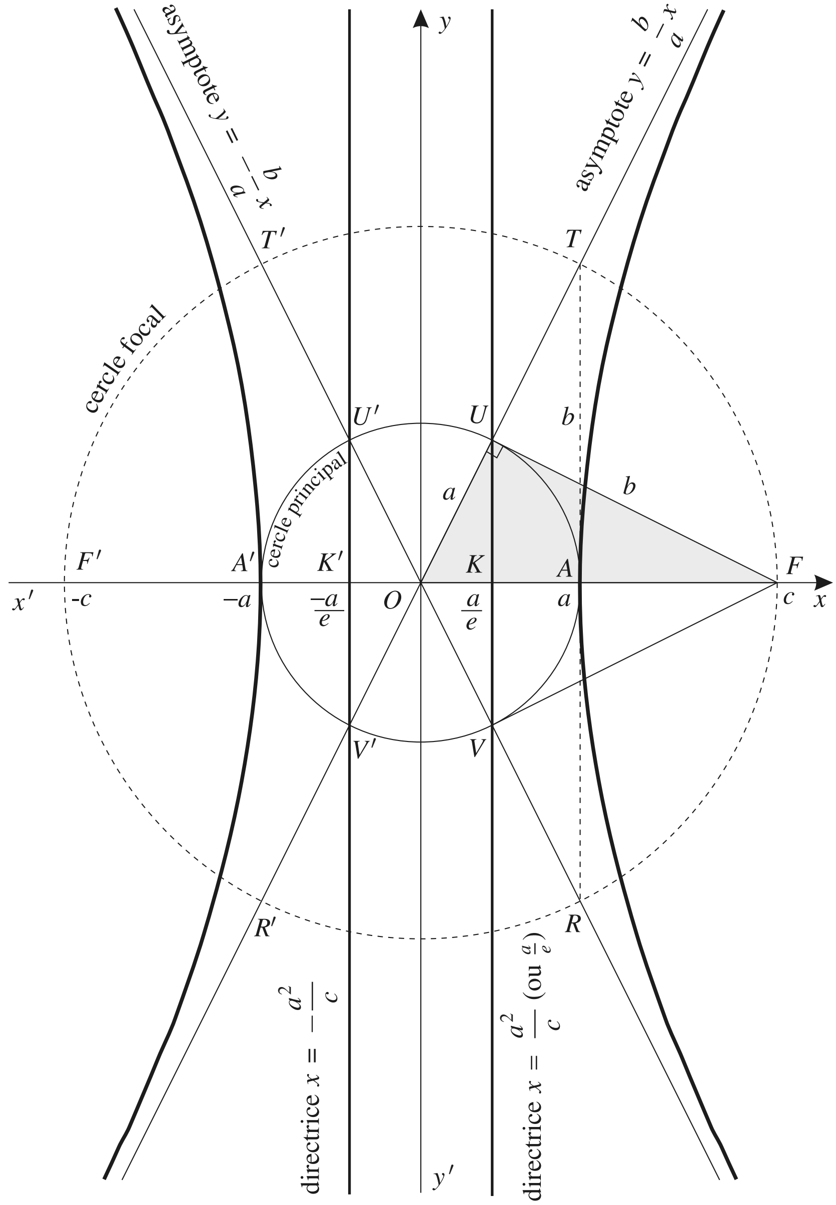
$$(e^2 - 1)\left(x^2 + \frac{2ep}{e^2 - 1}x\right) - y^2 = -p^2$$

Effectuons un changement de repère en choisissant pour nouvelle origine le point $O(-\dfrac{ep}{e^2 - 1}, 0)$. Les coordonnées (X, Y) de M dans le nouveau repère sont données par : $\begin{cases} X = x + \dfrac{ep}{e^2 - 1} \\ Y = y \end{cases}$. L'équation de l'hyperbole devient :

$$(e^2 - 1)X^2 - Y^2 = -p^2 + \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1} = \frac{p^2}{e^2 - 1}$$

Posons $a = \dfrac{p}{e^2 - 1}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$. L'équation de l'hyperbole s'écrit :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$ (**équation réduite** de l'hyperbole)



Doc. 11 Hyperbole. Sur cette figure $e = \sqrt{5}$.

Comme pour l'ellipse, on remarque que l'hyperbole a deux axes de symétrie. Il existe donc un deuxième foyer F' et une deuxième directrice D', symétriques des premiers par rapport à l'axe OY. Les foyers ont pour coordonnées $(ea, 0)$ et $(-ea, 0)$; les directrices ont pour équations $X = \frac{a}{e}$ et $X = -\frac{a}{e}$. En posant $c = OF = ea$, on remarque que $a^2 + b^2 = c^2$.

L'hyperbole a de plus deux asymptotes, d'équations $Y = \pm\frac{b}{a}X$. Ces asymptotes coupent les tangentes aux sommets A et A' de l'hyperbole en des points de coordonnées $(\pm a, \pm b)$, qui appartiennent donc au cercle de centre O de rayon c (appelé **cercle focal**).

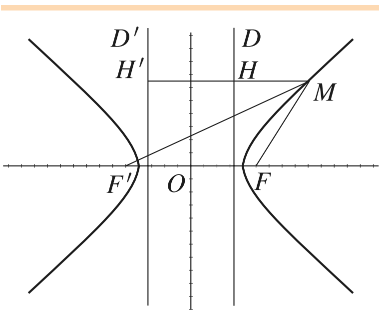
On peut montrer par ailleurs que les asymptotes coupent les directrices en quatre points U, U', V, V' appartenant au cercle de centre O de rayon a (appelé **cercle principal**).

4.2 • Paramétrage de l'hyperbole

On peut s'inspirer du paramétrage de l'ellipse en remplaçant les fonctions circulaires par les fonctions hyperboliques :

$$\begin{cases} X(t) = \pm a \operatorname{ch} t \\ Y(t) = b \operatorname{sh} t \end{cases}$$

4.3 • Définition bifocale de l'hyperbole



Doc. 12 Propriété bifocale de l'hyperbole.

Projetons un point M de l'hyperbole orthogonalement sur chacune des directrices D et D' en H et H' (*Doc.* 12). Du fait de la définition d'une conique,

$$\frac{MF}{MH} = \frac{MF'}{MH'} = e \quad ; \quad \text{d'où} \quad |MF - MF'| = e|MH + MH'|$$

Comme M est à l'extérieur du segment $[HH']$, $|MH - MH'| = HH' = \dfrac{2a}{e}$.
D'où :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{C} \quad |MF - MF'| = 2a}$$

Nous admettrons que réciproquement, tout point vérifiant cette relation appartient à l'hyperbole $\mathcal{C}$ (on peut le vérifier analytiquement).

Une hyperbole est donc l'ensemble des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante. On retrouve ce principe dans les figures d'interférence de deux ondes (fentes de Young). Il est utilisé dans certains procédés de radio-navigation.

4.4 • Tangente à l'hyperbole

Soit H la demi-hyperbole définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = a \operatorname{ch} t \\ y(t) = b \operatorname{sh} t \end{cases}$; considérons le point M_0 de H de coordonnées $x_0 = a \operatorname{ch} t_0$, $y_0 = b \operatorname{sh} t_0$. la tangente à H au point M_0 est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = (a \operatorname{sh} t_0, b \operatorname{ch} t_0) = \left(\frac{a y_0}{b}, \frac{b x_0}{a} \right)$$

Son équation cartésienne est donc :

$$\frac{b x_0}{a}(x - x_0) - \frac{a y_0}{b}(y - y_0) = 0$$

ce qui équivaut à : $\dfrac{b x x_0}{a} - \dfrac{a y y_0}{b} = \dfrac{b x_0^2}{a} - \dfrac{a y_0^2}{b}$, ou encore à :

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

comme M_0 appartient à H, $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$; l'équation de la tangente est donc :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Il en est de même pour la tangente à l'autre branche, symétrique de H par rapport à l'axe Oy.
On retrouve toujours le principe de « dédoublement ».

APPLICATION 2

Propriété géométrique de la tangente à l'hyperbole

Supposons l'hyperbole paramétrée (*Doc.* 13), et dérivons la relation :

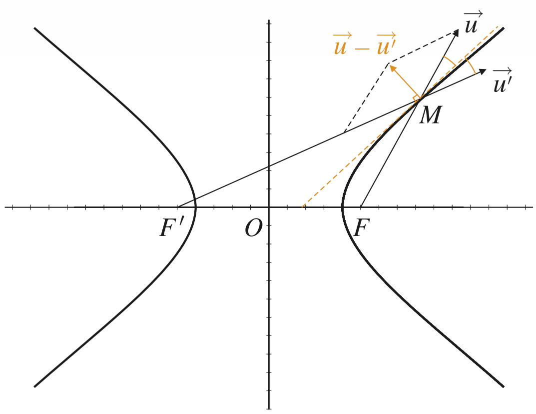
$$\sqrt{\overrightarrow{FM}^{\,2}} - \sqrt{\overrightarrow{F'M}^{\,2}} = 2\varepsilon a$$

($\varepsilon = \pm 1$ suivant la branche de l'hyperbole sur laquelle est situé le point M) :

$$\frac{\overrightarrow{FM} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}}{\|\overrightarrow{FM}\|} - \frac{\overrightarrow{F'M} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} = 0$$

Posons $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|}$ et $\vec{u'} = \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$

(ce sont des vecteurs unitaires des droites (FM) et $(F'M)$). La tangente en M à l'hyperbole est orthogonale à $\vec{u} - \vec{u'}$: c'est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.



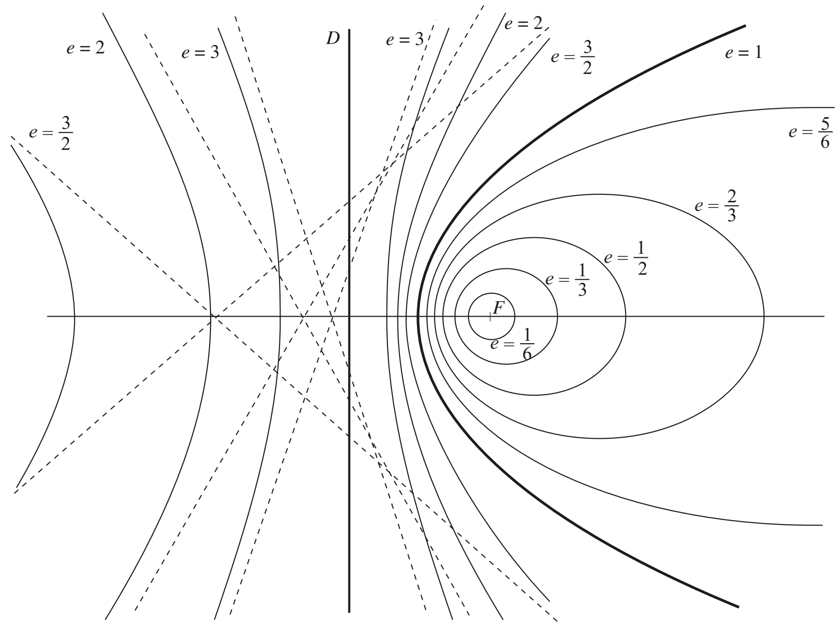
Doc. 13 Tangente à l'hyperbole.

Pour s'entraîner : ex. 6, 7

5 Retour au cas général

Pour obtenir les équations réduites des différentes coniques, nous avons été amenés à effectuer un changement de repère dépendant de la valeur de l'excentricité e. Représentons maintenant toutes les coniques trouvées dans le repère initial (*Doc.* 14). On voit qu'une parabole peut être considérée comme le cas limite d'une ellipse ou d'une hyperbole dont le deuxième foyer serait rejeté à l'infini.

Pour s'entraîner : ex. 3, 4



Doc. 14 Coniques de directrices D et de foyer F.

6 Réduction de l'équation cartésienne d'une conique

6.1 • Sans termes du premier degré

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, considérons l'ensemble de points $\mathcal{E}$ défini par l'équation cartésienne :

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

Effectuons un changement de repère par rotation :

$$\begin{cases} \vec{I} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{J} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

De l'égalité $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = X\vec{I} + Y\vec{J}$, on déduit :

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

L'équation de $\mathcal{E}$ devient :

$$a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + b(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) \\ + c(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 = 1$$

En développant cette expression, on obtient $AX^2 + BXY + CY^2 = 1$, où :

$$\begin{cases} A = a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \\ B = -2a\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta - b\sin^2\theta + 2c\sin\theta\cos\theta \\ C = a\sin^2\theta - b\cos\theta\sin\theta + c\cos^2\theta \end{cases}$$

soit en particulier : $B = (c - a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta$

On peut toujours trouver θ pour que $B = 0$:

– si $a = c$, $\theta = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$;

– si $a \neq c$, $\theta = \dfrac{1}{2}\text{Arctan}\,\dfrac{b}{a-c}$.

Dans ce cas, l'équation de $\mathcal{E}$ devient : $AX^2 + CY^2 = 1$.

- Si A ou C est nul, $\mathcal{E}$ est soit vide, soit la réunion de deux droites parallèles.
- Si A et C sont strictement négatifs, $\mathcal{E}$ est vide.
- Si A et C sont strictement positifs, $\mathcal{E}$ est une ellipse (si $A = C$, il s'agit d'un cercle).
- Si A et C sont non nuls et de signe contraire, $\mathcal{E}$ est une hyperbole.

La nature de $\mathcal{E}$ pouvait-elle être prévue au départ ?
Remarquons que les coefficients A, B, C vérifient :

$$\begin{cases} A + C = a + c \\ A - C = (a-c)\cos 2\theta + b\sin 2\theta \\ B = -(a-c)\sin 2\theta + b\cos 2\theta \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$B^2 + (A-C)^2 - (A+C)^2 = b^2 + (a-c)^2 - (a+c)^2$$

c'est-à-dire : $$B^2 - 4AC = b^2 - 4ac$$

Le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ est invariant dans le changement de repère.

Lorsqu'on a choisi $B = 0$, $\Delta = -4AC$. On en conclut que la nature de $\mathcal{E}$ dépend du signe de Δ :

- Si $\Delta = 0$, $\mathcal{E}$ est soit vide, soit la réunion de deux droites parallèles.
- Si $\Delta < 0$, $\mathcal{E}$ est soit vide, soit une ellipse (éventuellement un cercle).
- Si $\Delta > 0$, $\mathcal{E}$ est une hyperbole.

APPLICATION 3

Exemple de réduction de l'équation d'une conique

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit E l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que : $x^2 - xy + y^2 = 1$. Reconnaître l'ensemble E grâce à un changement de repère. Tracer E.

Considérons le repère $R' = (O, \vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$, défini par : $\vec{\imath}\,' = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{\jmath}\,' = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans le repère R et (x', y') dans le repère R', on peut écrire :

$$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = x'(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + y'(-\vec{\imath} + \vec{\jmath})$$
$$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (x' - y')\vec{\imath} + (x' + y')\vec{\jmath}$$

D'où, d'après l'unicité des coordonnées d'un point :

$$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

L'équation de l'ensemble E dans le repère R' est donc :

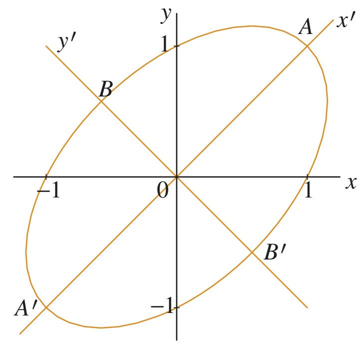
$$(x'-y')^2-(x'-y')(x'+y')+(x'+y')^2=1$$

ce qui équivaut à :

$$x'^2+3y'^2=1$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de demi-grand axe $a=1$, de demi-petit axe $b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, dans le repère R'.

Pour tracer E (*Doc.* 15), on peut placer les sommets A, A', B, B' de l'ellipse dans le repère R', et utiliser quelques points remarquables dans le repère R : $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$.



Doc. 15

6.2 • Avec des termes du premier degré

Soit maintenant $\mathcal{E}$ l'ensemble défini par l'équation cartésienne :

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

La méthode précédente conduit à une équation de la forme :

$$AX^2+CY^2+DX+EY+f=0$$

- Si $A\neq 0$, on peut écrire : $AX^2+DX=A\left(X+\dfrac{D}{2A}\right)^2-\dfrac{D^2}{4A}$.
- Si $C\neq 0$, on peut écrire : $CY^2+EY=C\left(Y+\dfrac{E}{2C}\right)^2-\dfrac{E^2}{4C}$.

Ainsi, si $AC\neq 0$ (c'est-à-dire $\Delta\neq 0$), on peut poser : $X'=X+\dfrac{D}{2A}$, $Y'=Y+\dfrac{E}{2C}$ (ce qui revient à faire un nouveau changement de repère par translation). On aboutit à : $AX'^2+CY'^2=F$

Si $F\neq 0$, on obtient alors les mêmes résultats que précédemment. Seul change le centre de l'ellipse ou de l'hyperbole. Si $F=0$, $\mathcal{E}$ est la réunion de deux droites ou un singleton, ou l'ensemble vide.

- Si $AC=0$ (c'est-à-dire $\Delta=0$) :
- Si $A=0$, l'équation de $\mathcal{E}$ devient : $CY'^2+DX=F$:
  - si $D=0$: $\mathcal{E}$ est soit vide, soit la réunion de deux droites parallèles.
  - si $D\neq 0$, l'équation devient $CY'^2+DX'=0$, où $X'=X-\dfrac{F}{D}$: $\mathcal{E}$ est une parabole, d'axe parallèle à (OX).
- Si $C=0$, l'équation de $\mathcal{E}$ devient : $AX'^2+EY=F$:
  - si $E=0$: $\mathcal{E}$ est soit vide, soit la réunion de deux droites parallèles.
  - si $E\neq 0$, l'équation devient $AX'^2+EY'=0$, où $Y'=Y-\dfrac{F}{E}$: $\mathcal{E}$ est une parabole, d'axe parallèle à (OY).

Pour s'entraîner : ex. 8 et 9

MÉTHODE

- La conique de foyer F, de directrice D, d'excentricité e est l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{d(M,D)} = e$.
- Équation cartésienne dans un repère d'origine F : $x^2 + y^2 = (ex + p)^2$
- Équation polaire : $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$
- $e = 1$. Parabole ; équation réduite : $y^2 = 2px$

  paramétrage : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$
- $e < 1$. Ellipse ; équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

  $c = ea$, $a^2 = b^2 + c^2$.

  paramétrage : $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$
- $e > 1$. Hyperbole ; équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

  $c = ea$, $c^2 = a^2 + b^2$. Asymptotes $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

  paramétrage (demi-hyperbole) : $\begin{cases} x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$
- Pour réduire l'équation générale d'une conique :
  - supprimer les termes en xy grâce à un changement de repère par rotation ;
  - supprimer si possible les termes du premier degré grâce à un changement de repère par translation.

Exercice résolu

UN ENSEMBLE DE POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1,0)$, $B(0,1)$. Soit E l'ensemble des points dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle (OAB) est égale à $\dfrac{1}{3}$.

1. *Montrer que E est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques.*
2. *Montrer que E est tangente aux droites (OA) et (OB).*
3. *Trouver une représentation paramétrique de E dans le repère initial.*

Conseils

Voir au chapitre 4, § 4.5, le calcul de la distance d'un point à une droite.

Les termes du second degré font apparaître un symétrie entre x et y.

Reconnaître une équation de la forme $\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$.

Solution

1) Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. La distance de M à (OA) est $|y|$; la distance de M à (OB) est $|x|$; la distance de M à la droite (AB), d'équation cartésienne $x + y = 1$, est : $\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$. Une équation cartésienne de E est donc :

$$x^2 + y^2 + \frac{(x+y-1)^2}{2} = \frac{1}{3}$$

ce qui équivaut à :

$$2x^2 + 2y^2 + x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = \frac{2}{3}$$

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 2y = -\frac{1}{3}$$

On reconnaît l'équation d'une conique.
Le discriminant est $\Delta = 4(1-9) = -32$; il est strictement négatif : E est une ellipse.

Effectuons un changement de repère par rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

L'équation de E devient :

$$4X^2 + 2Y^2 - 2\sqrt{2}X = -\frac{1}{3}$$

soit, en regroupant les termes en X sous la forme canonique :

$$4\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2\,Y^2 = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{24\left(X - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 12\,Y^2 = 1}$$

E est une ellipse de centre Ω, de coordonnées $(X_\Omega, Y_\Omega) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$ dans le nouveau repère, c'est-à-dire $(x_\Omega, y_\Omega) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ dans l'ancien repère. Son demi-grand axe (sur OY) vaut $a = \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, son demi-petit axe (sur OX) vaut $b = \frac{\sqrt{24}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. Sa demi-distance focale est $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{6}}{12}$; son excentricité est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chercher les points d'intersection de E avec (OA) et (OB).

2) Pour vérifier que E est tangente à (OA) et (OB), on peut utiliser l'ancien repère. L'abscisse du point d'intersection de E avec l'axe (Ox) vérifie l'équation : $3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3} = 0$; le discriminant est nul : l'équation a une solution double $x = \dfrac{1}{3}$. L'ellipse E est donc tangente à (Ox) au point $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$.

Du fait de la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (qui est le petit axe de l'ellipse), E est également tangente à (Oy) au point $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.

Voir au paragraphe 3.2 le paramétrage d'une ellipse.

3) On peut paramétrer E dans le nouveau repère par :

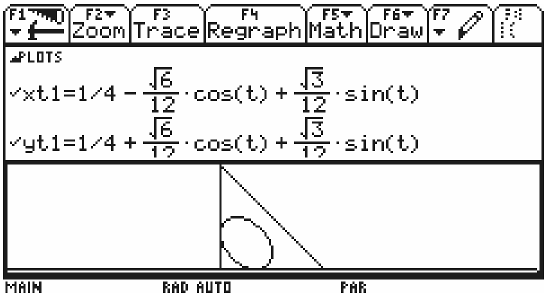
$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cos t \\[2ex] Y(t) = \dfrac{\sqrt{6}}{12} \sin t \end{cases}$$

ce qui donne, dans l'ancien repère :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X(t) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y(t) \\[2ex] y(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X(t) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y(t) \end{cases}$$

soit : $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{12} \cos t + \dfrac{\sqrt{3}}{12} \sin t \\[2ex] y(t) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{12} \cos t + \dfrac{\sqrt{3}}{12} \sin t \end{cases}$$

Ce paramétrage permet de représenter l'ellipse E sur la calculatrice :



Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) L'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$ représente une parabole.

b) L'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ représente une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b.

c) L'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante est une ellipse.

d) Les asymptotes et les tangentes aux sommets d'une hyperbole se rencontrent sur le cercle focal.

e) Toute équation de la forme $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$ représente une conique.

2

On observe un croissant de Lune ; quelle est la nature de la courbe (appelée terminateur) qui sépare la partie éclairée de la partie sombre ?
La lunaison, durée qui sépare deux nouvelles Lunes consécutives, vaut en moyenne $T = 29{,}5$ jours. Déterminer en fonction de l'« âge » t de la Lune (temps écoulé depuis la dernière nouvelle Lune, mesuré en jours), la fraction du disque lunaire éclairée par le soleil.

3

Soit C et C' deux coniques de même directrice D, de foyers correspondants F et F' distincts, d'excentricités e et e' distinctes. Démontrer que les points d'intersection de C et C', s'il en existe, sont cocycliques.

4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble des points F, foyer d'une conique de directrice associée (Ox), passant par les points $A(-1, 2)$ et $B(1, 1)$.

2) Préciser, suivant la position de F sur cet ensemble, la nature de cette conique.

5

Déterminer une parabole P connaissant :

1) Le foyer F, le paramètre p et un point A de P.

2) Le foyer F et deux points A et B de P.

3) La directrice D et deux points A et B de P.

6

Soit A et B deux points distincts du plan, I le milieu de $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MI^2 = MA\,MB$.

7

Soit A, B, C trois points distincts d'une hyperbole équilatère H. Démontrer que l'orthocentre du triangle ABC appartient à H.

8

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des courbes d'équation cartésienne :

a) $x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0$; **b)** $y^2 + 3x - 4y = 2$;

c) $x^2 + xy + y^2 = 1$; **d)** $x^2 + \sqrt{3}\,xy + x = 2$.

9

Déterminer l'ensemble des sommets et des foyers de l'ellipse d'équation :

$$\lambda x^2 + y^2 - 2x = 0 \qquad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercices posés aux oraux des concours

10 (Centrale-Supelec 2006)

On se donne une parabole P de foyer F, de directrice D, et une droite Δ du plan, non perpendiculaire à D. On note Δ' la perpendiculaire à Δ passant par F, A le point d'intersection de Δ et Δ', et B le point d'intersection de D et Δ'. On considère un point M sur Δ et son projeté orthogonal H sur D.
Montrer que M appartient à P si et seulement si $BH^2 = AB^2 - AF^2$.
En déduire l'intersection de P et Δ suivant la position de Δ.

11 (Mines-Ponts 2006)

Soit P une parabole d'axe Δ et de tangente à l'origine D. Soit M et N deux points de la parabole, I le milieu de $[MN]$, J le projeté orthogonal de I sur Δ et K l'intersection de la médiatrice de $[MN]$ avec Δ.
Montrer que $\overrightarrow{JK}$ est constant.

12 (Centrale-Supelec 2006)

Donner l'équation de la normale en un point $M_0(x_0, y_0)$ de la parabole P d'équation $y^2 = 2px$.
Que dire de l'isobarycentre de 3 points de la parabole dont les normales sont concourantes ? Montrer que l'origine et 3 points de la parabole dont les normales sont concourantes sont cocycliques.

7 Géométrie élémentaire de l'espace

INTRODUCTION

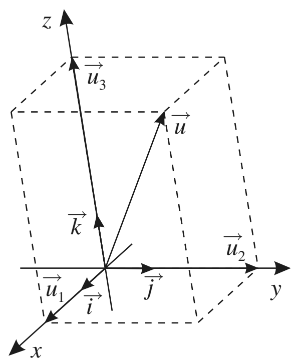
L'étude de la géométrie dans l'espace prépare une étude plus approfondie des espaces vectoriels de dimension finie qui occupera la cinquième partie de cet ouvrage. Elle est également indispensable pour l'étude de nombreux chapitres de Physique : mécanique, électromagnétisme, optique, ainsi que de Sciences de l'Ingénieur.

OBJECTIFS

- Réviser les notions de géométrie dans l'espace étudiées jusqu'en Terminale.
- Introduire des outils nouveaux : produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte, coordonnées cylindriques et sphériques, qui serviront notamment en physique.
- Approfondir la notion de linéarité évoquée dans le chapitre précédent.

1 Modes de repérage dans l'espace

1.1 • Repère cartésien



Doc. 1 Coordonnées dans l'espace.

Un **repère cartésien** de l'espace est la donnée d'un point O appelé **origine** du repère et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, appelés **vecteurs de base**. On note le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ (*Doc.* 1).

Les droites passant par O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont appelées **axes** du repère, et notées (Ox), (Oy), (Oz).

Étant donné un vecteur $\vec{u}$ quelconque de l'espace, soit $\vec{u}_1$ le projeté de $\vec{u}$ sur (Ox) parallèlement au plan (yOz), $\vec{u}_2$ le projeté de $\vec{u}$ sur (Oy) parallèlement à (zOx) et $\vec{u}_3$ le projeté de $\vec{u}$ sur (Oz) parallèlement à (xOy). On a : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$. Comme $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sont respectivement colinéaires à $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, il existe des réels x, y, z tels que :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Le triplet (x, y, z) est unique ; en effet, supposons que :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$$

alors : $(z - z')\vec{k} = (x' - x)\vec{\imath} + (y' - y)\vec{\jmath}$; comme $\vec{k}$ n'est pas dans le plan (xOy), cette égalité entraîne : $z - z' = 0$ et $(x' - x)\vec{\imath} + (y' - y)\vec{\jmath} = 0$, d'où par unicité des coordonnées dans le plan : $x' - x = 0$ et $y' - y = 0$.

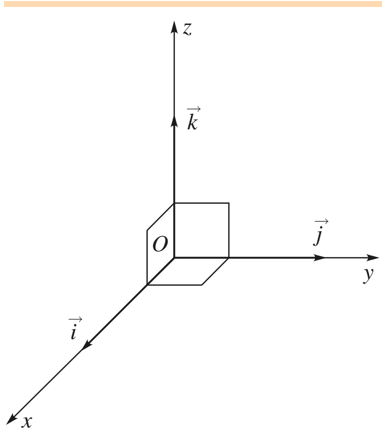
Les réels x, y et z sont appelés **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Étant donné un point M quelconque de l'espace, on appelle coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Remarque : *Comme en géométrie plane, les calculs peuvent être grandement facilités par le choix judicieux d'un repère. Par exemple, dans un problème portant sur un tétraèdre* $(ABCD)$, *on pourra choisir le repère* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

1.2 • Repère orthonormal. Orientation



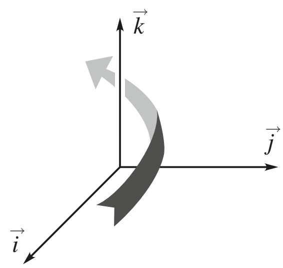
Doc. 2 Repère orthonormal.

Si les vecteurs de base du repère sont unitaires et orthogonaux, le repère est dit **orthonormal** (*Doc.* 2) :

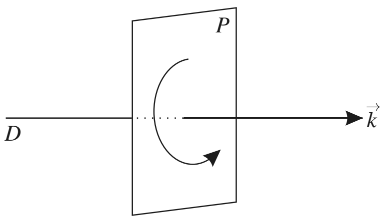
$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad ; \quad \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{\imath} = 0$$

Remarque : *Nous verrons plus loin que les coordonnées dans un repère orthonormal permettent une expression particulièrement simple du produit scalaire de deux vecteurs et de la norme d'un vecteur. En conséquence, on emploiera de préférence ce type de repère dans toutes les questions faisant intervenir des distances et des angles.*

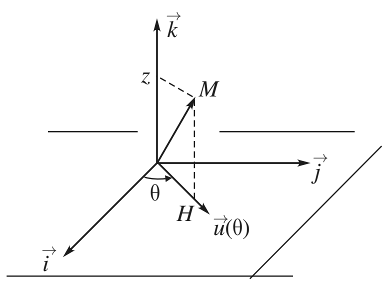
Nous admettrons que deux repères orthonormaux sont toujours image l'un de l'autre par un déplacement de l'espace (composée de translations et de rotations), ou par un antidéplacement (composée d'une symétrie plane et d'un déplacement). On dit que les deux repères ont la même orientation s'il s'agit d'un déplacement,



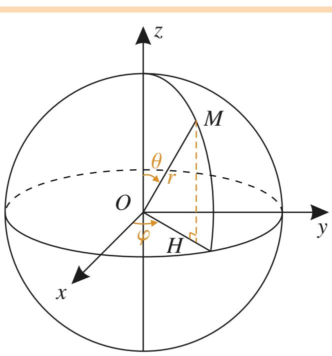
Doc. 3 Sens direct.



Doc. 4 Orientation d'un plan et de sa normale.



Doc. 5 Coordonnées cylindriques.



Doc. 6 Coordonnées sphériques.

ou une orientation contraire s'il s'agit d'un antidéplacement. Il y a donc deux classes de repères orthonormaux.

Orienter l'espace, c'est choisir l'une des classes, dont les éléments seront appelés repères orthonormaux **directs**, les autres étant dits **rétrogrades**.

Il n'existe aucun critère mathématique pour privilégier une orientation plutôt qu'une autre ; ce choix ne peut être qu'arbitraire. En général, on convient de dire que le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est direct si lorsqu'on tourne de $\vec{\imath}$ vers $\vec{\jmath}$, on progresse dans le sens de $\vec{k}$ en vissant (*Doc.* 3) (pensez à un tournevis, un tire-bouchon ou un robinet que l'on ferme). Ces conventions sont souvent utilisées en physique (électromagnétisme) et en chimie (molécules chirales).

Il est important de remarquer que l'orientation de l'espace n'induit pas d'orientation particulière d'un plan de cet espace. Pour orienter un plan P, il suffit d'orienter une droite D orthogonale à P, en choisissant un vecteur $\vec{k}$ unitaire de D (il y a deux possibilités) ; une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de P sera dite directe si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est directe dans l'espace. On dit alors qu'on a orienté le plan P par le vecteur normal $\vec{k}$ (*Doc.* 4).

1.3 • Coordonnées cylindriques

L'espace étant orienté, soit $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct (*Doc.* 5). On oriente le plan (xOy) par le vecteur normal $\vec{k}$. Pour tout point M de l'espace, de coordonnées (x, y, z), on peut représenter en coordonnées polaires le projeté orthogonal H de M sur le plan (xOy) : $\overrightarrow{OH} = r\,\vec{u}(\theta)$, où $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$, d'où :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + z\,\vec{k} = r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}$$

On dit que (r, θ, z) est un triplet de **coordonnées cylindriques** du point M.

Remarque *: Comme les coordonnées polaires dans le plan, les coordonnées cylindriques d'un point de l'espace ne sont pas uniques.*

On privilégiera l'emploi de coordonnées cylindriques dans tout problème où une droite particulière joue un rôle remarquable (par exemple en physique, étude du champ électrique créé par un fil rectiligne uniformément chargé).

On peut facilement exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point en fonction de coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

1.4 • Coordonnées sphériques

L'espace étant orienté, soit $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct. On oriente le plan (xOy) par le vecteur normal $\vec{k}$. Pour tout point M de l'espace, on considère le point H, projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) (*Doc.* 6). Soit :

- r la distance OM : $r = \| \overrightarrow{OM} \|$;
- θ une mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$ (on notera que cet angle n'est pas orienté, car on n'a pas défini d'orientation du plan (zOM)) ; θ est appelée **colatitude** de M ;

- φ une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OH})$ (si M appartient à (Oz), φ peut être quelconque) ; φ est appelée **longitude** de M.

On dit que (r, θ, φ) est un triplet de **coordonnées sphériques** du point M. On a :

$$\overrightarrow{OH} = r \sin\theta \ \vec{u}(\varphi) \quad ; \quad \overrightarrow{HM} = r \cos\theta \ \vec{k}$$

d'où :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Remarque : *On privilégiera l'emploi de coordonnées sphériques dans tout problème où un point central joue un rôle remarquable, par exemple en navigation maritime ou aérienne, ou en astronomie. Dans ces applications, on préfère souvent utiliser la* ***latitude*** $\lambda = \dfrac{\pi}{2} - \theta$.

Pour s'entraîner : ex. 2. et exercice résolu

2 Produit scalaire

2.1 • Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Ils appartiennent nécessairement à un même plan P. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leur produit scalaire dans le plan P, c'est-à-dire le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \ \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

On remarque que cette définition ne nécessite pas de choisir une orientation du plan P, ni même de l'espace tout entier.

Comme en géométrie plane, on montre que le produit scalaire de l'espace est une application bilinéaire symétrique.

APPLICATION 1

Linéarité d'une application ; approfondissement

Revenons sur la notion d'application linéaire, évoquée dans l'*Application* 2 du chapitre 4 : *Géométrie Élémentaire du Plan*. Soit E l'ensemble des vecteurs de l'espace. On dit qu'une application f de E dans E (ou dans l'ensemble des vecteurs d'un plan, ou dans $\mathbb{R}$) est linéaire si pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de E et tous réels α et β :

$$f(\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}) = \alpha\, f(\vec{u}) + \beta\, f(\vec{v})$$

Soit $b = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de E ; montrons que l'application f est linéaire si et seulement si pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}) = x\, f(\vec{\imath}) + y\, f(\vec{\jmath}) + z\, f(\vec{k}) \qquad \textbf{(1)}$$

- Si f est linéaire, elle vérifie par définition l'égalité **(1)**.
- Si f vérifie l'égalité **(1)**, alors pour tous vecteurs $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, $\vec{v} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$ de E et

tous réels α et β :

$$\begin{aligned} f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= (\alpha x + \beta x')f(\vec{\imath}) \\ &\quad + (\alpha y + \beta y')f(\vec{\jmath}) + (\alpha z + \beta z')f(\vec{k}) \\ &= \alpha\left(xf(\vec{\imath}) + yf(\vec{\jmath}) + zf(\vec{k})\right) \\ &\quad + \beta\left(x'f(\vec{\imath}) + y'f(\vec{\jmath}) + z'f(\vec{k})\right) \\ &= \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) \end{aligned}$$

f est linéaire.

Ainsi, une application linéaire f est entièrement déterminée par les trois images $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, $f(\vec{k})$. Si l'ensemble d'arrivée est E, il suffit de connaître les coordonnées de ces vecteurs, que l'on peut disposer en colonnes dans un tableau, appelé **matrice** de f dans la base b :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{array} \\ M_b(f) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples :

- Homothétie h de rapport k.

$$\begin{aligned} h(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) &= kx\vec{\imath} + ky\vec{\jmath} + kz\vec{k} \\ &= x\,h(\vec{\imath}) + y\,h(\vec{\jmath}) + z\,h(\vec{k}) \end{aligned}$$

donc h est linéaire ; sa matrice est :

$$M_b(h) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Projection p sur le plan xOy parallèlement à Oz.

$$\begin{aligned} p(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \\ &= x\,p(\vec{\imath}) + y\,p(\vec{\jmath}) + z\,p(\vec{k}) \end{aligned}$$

donc p est linéaire ; sa matrice est :

$$M_b(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rotation r d'axe Oz d'angle θ.

$$\begin{aligned} r(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) &= (x\cos\theta - y\sin\theta)\,\vec{\imath} \\ &\quad + (x\sin\theta + y\cos\theta)\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \\ &= x\,r(\vec{\imath}) + y\,r(\vec{\jmath}) + z\,r(\vec{k}) \end{aligned}$$

donc r est linéaire ; sa matrice est :

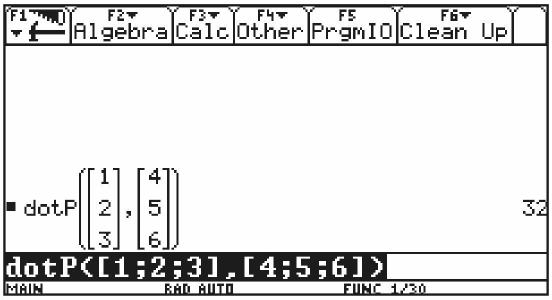
$$M_b(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la composée de deux applications linéaires est linéaire. Nous verrons dans le chapitre 24 : *Matrices* comment calculer la matrice de la composée.

2.2 • Expression dans une base orthonormale

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormale, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : (x, y, z) et (x', y', z'). Calculons le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k})$$



La fonction dotP calcule le produit scalaire de deux vecteurs représentés en ligne ou en colonne.

On peut développer grâce la bilinéarité du produit scalaire et utiliser le fait que la base est orthonormale, c'est-à-dire que le produit scalaire de deux vecteurs de base distincts est nul, tandis que le produit scalaire d'un vecteur de base par lui-même est égal à 1. On obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On en déduit l'expression de la norme d'un vecteur :

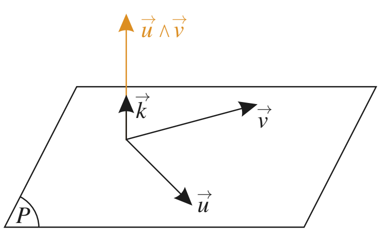
$$\| \vec{u} \| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

On obtient également la distance de deux points de l'espace, en fonction de leurs coordonnées dans un repère orthonormal :

$$AB = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

3 Produit vectoriel

3.1 • Définition



Doc. 7 Produit vectoriel.

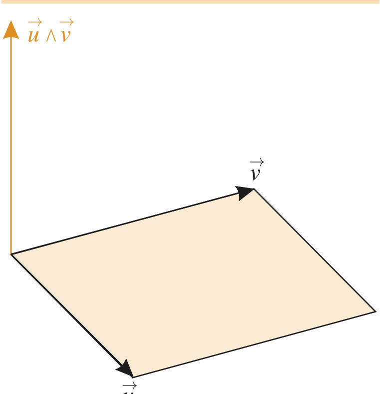
L'espace étant orienté, soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. Soit P un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Orientons le plan P en choisissant un vecteur normal unitaire $\vec{k}$ (*Doc.* 7). Ceci permet de définir le déterminant $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$.

On appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})\, \vec{k}$$

Remarque : *Cette définition dépend de l'orientation choisie dans l'espace. Si on avait choisi l'orientation contraire, on aurait obtenu un produit vectoriel opposé pour les mêmes vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

En revanche, le résultat ne dépend pas de l'orientation choisie dans le plan P, *car en choisissant l'orientation contraire,* $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$ *et* $\vec{k}$ *sont tous deux changés en leur opposé.*



Doc. 8 Norme du produit vectoriel.

La norme du produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par :

$$\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = |\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

C'est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*Doc.* 8).
Il en résulte que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

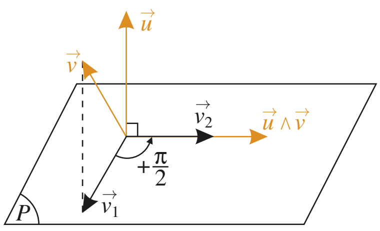
3.2 • Antisymétrie

Le déterminant de deux vecteurs est antisymétrique :
$\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{u}) = -\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v})$. Par conséquent :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

On dit que le produit vectoriel est antisymétrique.

3.3 • Bilinéarité



Doc. 9 Linéarité du produit vectoriel par rapport au deuxième vecteur.

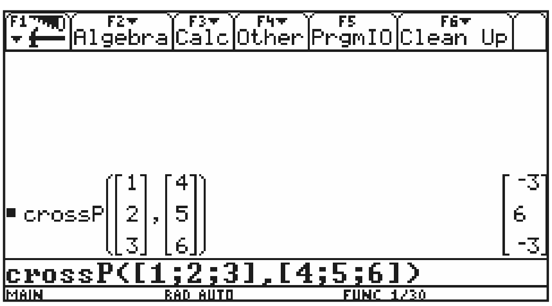
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul donné. Pour tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace, on peut obtenir le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ en composant les applications suivantes (*Doc.* 9) :

- projection sur un plan orthogonal à $\vec{u}$, ce qui donne un vecteur $\vec{v}_1$ de norme $\| \vec{v} \| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;
- rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ dans ce plan orienté par le vecteur normal $\vec{u}$, ce qui donne un vecteur $\vec{v}_2$ de même norme directement orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- homothétie de rapport $\| \vec{u} \|$, ce qui donne un vecteur $\vec{v}_3$ de norme $\| \vec{u} \| \, \| \vec{v} \| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ directement orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Ces trois applications sont linéaires (voir Application 1). Il en résulte que l'application $\vec{v} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est linéaire, comme composée d'applications linéaires. Ce résultat reste bien sûr valable si le vecteur $\vec{u}$ est nul.

Du fait de l'antisymétrie, pour tout vecteur $\vec{v}$ fixé, l'application $\vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est également linéaire. Le produit vectoriel est donc une application bilinéaire.

3.4 • Expression dans une base orthonormale directe



La fonction crossP calcule le produit vectoriel de deux vecteurs représentés en ligne ou en colonne.

L'espace étant orienté, soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormale directe, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives : (x, y, z) et (x', y', z'). Calculons le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}) \wedge (x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k})$$

On peut développer grâce à la bilinéarité du produit vectoriel en éliminant tous les produits d'un vecteur de base par lui-même :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = xy'\,\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} + xz'\,\vec{\imath} \wedge \vec{k} + yx'\,\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} + yz'\,\vec{\jmath} \wedge \vec{k} + zx'\,\vec{k} \wedge \vec{\imath} + zy'\,\vec{k} \wedge \vec{\jmath}$$

et utiliser les relations :

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = \vec{\imath} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{\imath} = -\vec{\imath} \wedge \vec{k} = \vec{\jmath}$$

d'où :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\,\vec{\imath} + (zx' - z'x)\,\vec{\jmath} + (xy' - x'y)\,\vec{k}$$

soit, en utilisant la notation des déterminants de 2 vecteurs :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Remarque : *Attention au signe de la deuxième coordonnée. On passe d'une coordonnée à la suivante par une permutation circulaire sur les lettres* x, y *et* z.

APPLICATION 2

Formule du double produit vectoriel

Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u}$$

Il existe une base orthonormale directe dans laquelle les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont :

$$\vec{u} = (a, 0, 0) \quad \vec{v} = (b, c, 0) \quad \vec{w} = (d, e, f).$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ac \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ac \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ace \\ acd \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u} = ad \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} - (bd + ce) \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -ace \\ acd \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité cherchée.

Pour s'entraîner : ex. 3

4 Produit mixte ou déterminant de trois vecteurs

4.1 • Définition

L'espace étant orienté, on appelle **produit mixte** (ou **déterminant**) des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ le réel :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

On peut aussi le noter $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

Remarque *: Cette définition dépend de l'orientation choisie dans l'espace. Si on avait choisi l'orientation contraire, on aurait obtenu un produit mixte opposé pour les mêmes vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

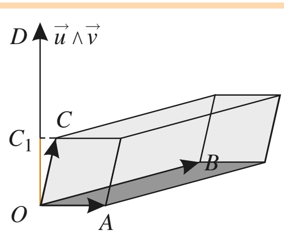
Notons que $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ si et seulement si $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$, c'est-à-dire si $\vec{w}$ appartient à un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$: le déterminant de trois vecteurs est nul si et seulement si ces trois vecteurs sont coplanaires.

4.2 • Interprétation géométrique

Supposons $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires. Soit O, A, B, C quatre points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, et D le point tel que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OD}$. Soit C_1 le projeté orthogonal de C sur la droite (OD) (*Doc.* 10). On peut alors interpréter géométriquement le produit scalaire de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \overline{OD} \cdot \overline{OC_1}$$

En valeur absolue, c'est le produit de l'aire d'une face du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ par la hauteur correspondante ; c'est donc le volume de ce parallélépipède.



Doc. 10 Produit mixte.

Le signe du déterminant est celui du produit $\overline{OD} \cdot \overline{OC_1}$:

- positif si $\vec{w}$ est du même côté que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par rapport au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ (on dit dans ce cas, par extension, que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe) ;
- négatif si $\vec{w}$ est du côté opposé à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par rapport au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ (on dit dans ce cas, par extension, que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est rétrograde).

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, leur déterminant est nul, tout comme le volume du parallélépipède. On peut donc énoncer :

Le produit mixte, ou déterminant, de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est égal au volume du parallélépipède qu'ils déterminent, affecté d'un signe correspondant à l'orientation du triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

4.3 • Antisymétrie

L'échange de deux vecteurs parmi $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne modifie pas le volume du parallélépipède qu'ils déterminent, mais change seulement le signe du déterminant :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= -\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})\\ \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= -\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})\\ \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= -\mathrm{Det}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})\end{aligned}$$

On dit que le produit mixte (ou déterminant) est antisymétrique.

Le déterminant de trois vecteurs est invariant par une permutation circulaire de ces trois vecteurs.

En composant deux de ces échanges, le signe reste invariant :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \mathrm{Det}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

4.4 • Trilinéarité

Le produit vectoriel et le produit scalaire étant bilinéaires, il est clair que l'application : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est linéaire par rapport à chacune des trois variables ; on dit que le produit mixte (ou déterminant) est **trilinéaire**.

Pour s'entraîner : ex. 4 et 5

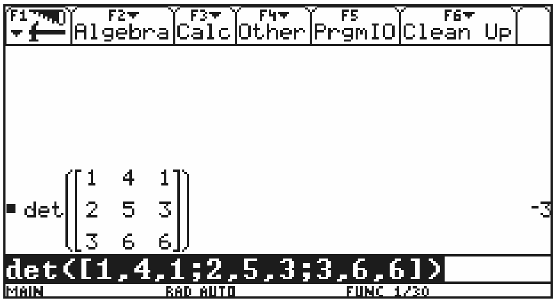
4.5 • Expression dans une base orthonormale directe

L'espace étant orienté, soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormale directe, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de coordonnées respectives : (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z''). Calculons le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\, x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\,,\ x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}\,,\ x''\vec{\imath} + y''\vec{\jmath} + z''\vec{k}\,)$$

Développons grâce à la trilinéarité du produit mixte en éliminant tous les produits mixtes où apparaît plus d'une fois le même vecteur de base :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \;=\; & xy'z''\mathrm{Det}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}) + xz'y''\mathrm{Det}(\vec{\imath}, \vec{k}, \vec{\jmath})\\ & + yx'z''\mathrm{Det}(\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k}) + yz'x''\mathrm{Det}(\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})\\ & + zx'y''\mathrm{Det}(\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}) + zy'x''\mathrm{Det}(\vec{k}, \vec{\jmath}, \vec{\imath})\end{aligned}$$



La fonction det calcule le déterminant de trois vecteurs représentés par une matrice.

Or :

$$\operatorname{Det}(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) = \operatorname{Det}(\vec{\jmath},\vec{k},\vec{\imath}) = \operatorname{Det}(\vec{k},\vec{\imath},\vec{\jmath}) = 1$$

$$\operatorname{Det}(\vec{\imath},\vec{k},\vec{\jmath}) = \operatorname{Det}(\vec{k},\vec{\jmath},\vec{\imath}) = \operatorname{Det}(\vec{\jmath},\vec{\imath},\vec{k}) = -1$$

D'où :

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = xy'z'' - xz'y'' - yx'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x''$$

Notation : on écrit ce déterminant sous la forme :

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

APPLICATION 3

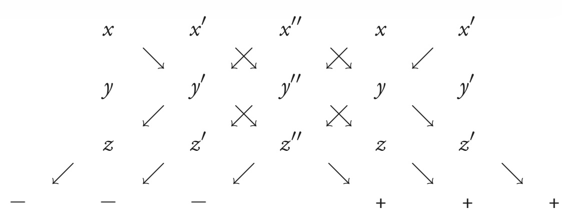
Règle de Sarrus

Comment calculer rapidement un déterminant d'ordre 3 ?

Il y a 3 termes affectés d'un signe $+$ et 3 termes affectés d'un signe $-$:

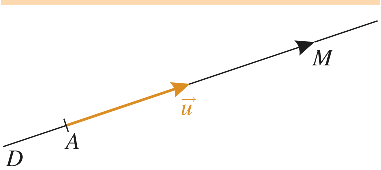
$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - xy''z' - x'yz''$$

Un moyen de retenir ce résultat est de recopier à droite les deux premières colonnes du déterminant. Les 3 termes affectés du signe $+$ sont les produits des coefficients d'une parallèle à la diagonale principale, et les 3 termes affectés du signe $-$ sont les produits des coefficients d'une parallèle à la diagonale secondaire.



5 Droites et plans

5.1 • Représentation paramétrique d'une droite de l'espace



Doc. 11 Repère d'une droite.

L'espace étant rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, considérons la droite D passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ (*Doc.* 11). Un point M de coordonnées (x,y,z) appartient à la droite D si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, soit :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha\, t \\ y = y_A + \beta\, t \\ z = z_A + \gamma\, t \end{cases}$$

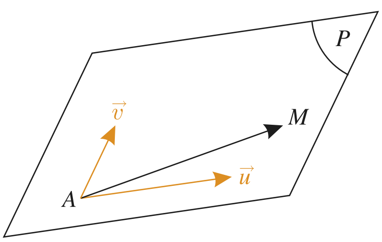
La droite D est décrite comme une courbe paramétrée ; ce système est appelé **représentation paramétrique** de D.

Réciproquement, tout système de cette forme représente une droite, dont on connaît un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Remarque *: En limitant les variations de t, on décrit une partie de la droite D :*

- $t \geqslant 0$: *demi-droite fermée d'origine A dirigée par $\vec{u}$;*
- $t \in [0, 1]$: *segment $[AB]$ où $B = A + \vec{u}$ (unique point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$).*

5.2 • Équation cartésienne d'un plan



Doc. 12 Repère d'un plan.

L'espace étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, considérons le plan P passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ (*Doc.* 12). Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan P si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

ce qui équivaut à :

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)(x - x_A) + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)(y - y_A) + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(z - z_A) = 0$$

En posant : $a = \beta\gamma' - \beta'\gamma$, $b = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha$, $c = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ et $d = -(\beta\gamma' - \beta'\gamma)x_A - (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)y_A - (\alpha\beta' - \alpha'\beta)z_A$, cette équation s'écrit :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Elle est appelée **équation cartésienne** de P ; elle caractérise l'appartenance d'un point à P, c'est-à-dire que :

$$M(x, y, z) \in P \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0$$

Remarque *: Nous vérifierons un peu plus loin la réciproque, c'est-à-dire que toute équation du type $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ représente un plan. Il est important de noter qu'une telle équation ne représente JAMAIS une droite. Une droite peut être définie comme l'intersection de deux plans sécants, donc par un système de DEUX équations du type précédent. En résolvant ce système, on peut calculer deux coordonnées en fonction de la troisième, ce qui revient à une représentation paramétrique de la droite.*

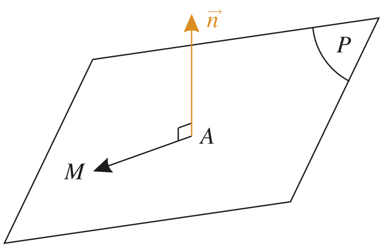
Exemple : Trouver une représentation paramétrique de la droite D, intersection des plans d'équations cartésiennes $x + 2y - 3z + 1 = 0$ et $2x - y + z + 2 = 0$. En résolvant le système en (x, y), où z est fixé, on obtient : $x = 7z + 1$; $y = -11z - 3$. La droite D est donc définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 - 11t \\ z = t \end{cases}$$

c'est-à-dire que D passe par le point $A(1, -3, 0)$, et elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}(7, -11, 1)$.

Pour s'entraîner : ex. 7, 8, 9

5.3 • Plan défini par un point et un vecteur normal



Doc. 13 Vecteur normal à un plan.

Choisissons un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormal, et considérons le plan P passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et orthogonal au vecteur non nul $\vec{n}(a, b, c)$ ($\vec{n}$ est appelé **vecteur normal** à P) (*Doc.* 13).

Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan P si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

c'est-à-dire :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

On retrouve l'équation cartésienne de P : $ax + by + cz + d = 0$, où $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ représente un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

APPLICATION 4

Équation d'un plan passant par trois points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points $A(1, 0, -2)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-1, 1, 0)$.

Orientons l'espace en choisissant la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ directe, et prenons pour vecteur normal à P le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

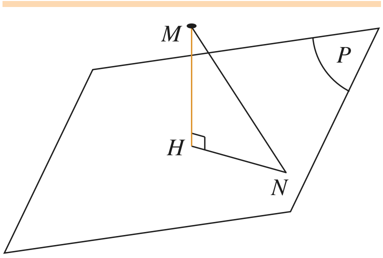
Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan P si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

c'est-à-dire : $(x - 1) - 4y + 3(z + 2) = 0$, soit :

$$x - 4y + 3z + 5 = 0$$

5.4 • Distance d'un point à un plan



Doc. 14 Distance d'un point à un plan.

Soit P un plan. Pour tout point M de l'espace, on appelle distance de M à P la plus petite distance entre M et un point de P. Elle est notée $d(M, P)$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur P (*Doc.* 14). Pour tout point N de P :

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 \geqslant MH^2$$

Le minimum de la distance MN est donc MH ;

$$d(M, P) = HM$$

Comme de plus, $MN = MH \iff HN = 0$, ce minimum est atteint uniquement lorsque $N = H$.

Calculons cette distance dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan P est déterminé par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$. Il a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
On a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = \pm \| \overrightarrow{HM} \| \| \vec{n} \|$$

On en déduit :

$$d(M, P) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{\| \vec{n} \|}$$

Or $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz + d$, d'où :

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Si le plan P est donné par un point et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut orienter l'espace et choisir pour vecteur normal : $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$:

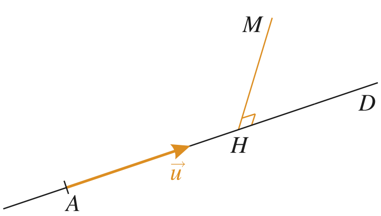
$$d(M, P) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\right|}{\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|} = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})\right|}{\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|}$$

5.5 • Distance d'un point à une droite de l'espace

L'espace est supposé orienté. Soit une droite D définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Soit M un point quelconque de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur D (*Doc.* 15).

On peut écrire : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, d'où $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$
$\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \| = \| \overrightarrow{HM} \| \| \vec{u} \|$, d'où :

$$d(M, D) = \frac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}$$



Doc. 15 Distance d'un point à une droite.

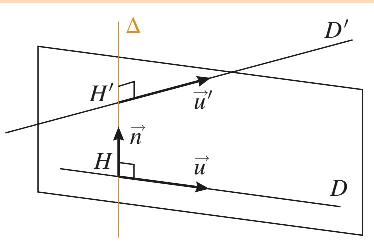
Pour s'entraîner : ex. 11

5.6 • Perpendiculaire commune à deux droites

L'espace est supposé orienté. Soit D et D' deux droites de l'espace, chacune définie par un point et un vecteur directeur : $D = (A, \vec{u})$; $D' = (A', \vec{u}')$. Montrons qu'il existe toujours une droite perpendiculaire à D et à D', et que si D et D' ne sont pas parallèles, cette perpendiculaire commune est unique.

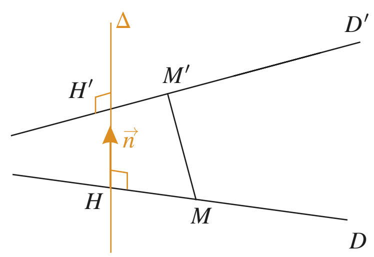
Si D et D' sont parallèles, il existe dans le plan qui les contient une infinité de droites perpendiculaires à D et D'.

Supposons maintenant D et D' non parallèles ; les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, et par conséquent le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$ est non nul, et orthogonal à D et à D'. La réunion des droites dirigées par le vecteur $\vec{n}$ rencontrant D est un plan, qui est sécant avec D' en un point H'. Il existe donc une unique droite Δ dirigée par $\vec{n}$ rencontrant D en un point H et D' en H' (*Doc.* 16).

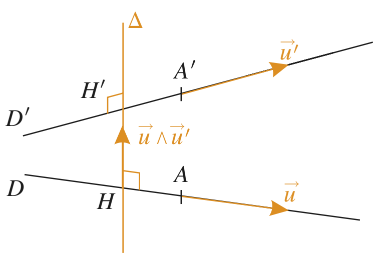


Doc. 16 Perpendiculaire commune.

Remarque *: Si les droites D et D' sont sécantes, les points H et H' sont confondus.*



Doc. 17 Distance de deux droites.



Doc. 18 Expression de la distance de deux droites.

La perpendiculaire commune (*Doc.* 17) permet de calculer la distance des deux droites, c'est-à-dire le minimum de la distance d'un point de D à un point de D' : en effet, quels que soient les points M et M' appartenant respectivement à D et D', on peut écrire :

$$\overrightarrow{MM'}^{\,2} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'})^2 = \overrightarrow{HH'}^{\,2} + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 \geqslant \overrightarrow{HH'}^{\,2}$$

Le minimum de la distance MM' est donc atteint pour $M = H$ et $M' = H'$.

On a alors :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{HH'}) = (\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \overrightarrow{HH'}$$

Les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ et $\overrightarrow{HH'}$ étant colinéaires (*Doc.* 18) :

$$\left|\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'})\right| = \| \vec{u} \wedge \vec{u}' \| \, \| \overrightarrow{HH'} \|$$

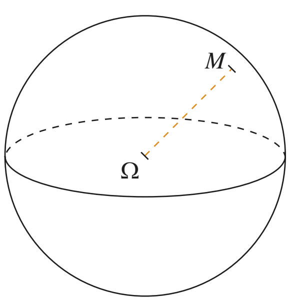
D'où :

$$d(D, D') = \| \overrightarrow{HH'} \| = \frac{\left|\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AA'})\right|}{\| \vec{u} \wedge \vec{u}' \|}$$

Pour s'entraîner : ex. 10

6 Sphères

6.1 • Équation cartésienne d'une sphère



Doc. 19 Sphère.

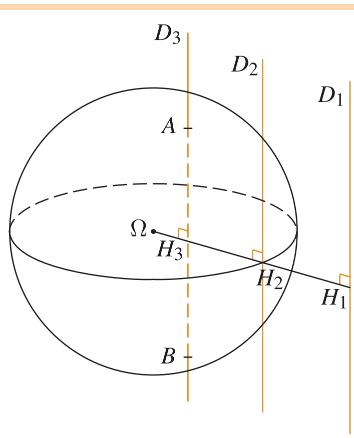
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. La sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(a, b, c)$, de rayon R (*Doc.* 19) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\| \overrightarrow{\Omega M} \|^2 = R^2$; elle a donc pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

C'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad \text{où} \quad d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

6.2 • Intersection d'une sphère et d'une droite



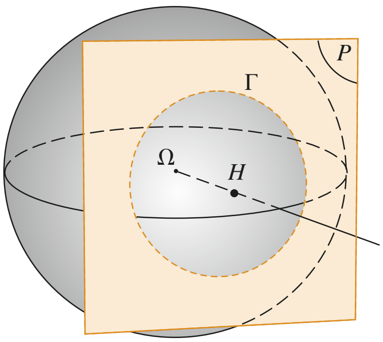
Doc. 20 Intersection d'une sphère et d'une droite

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω, de rayon R, et D une droite quelconque de l'espace. Désignons par H le projeté orthogonal de Ω sur D (*Doc.* 20). Pour tout point M de D : $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2$. Ce point appartient aussi à $\mathcal{S}$ si et seulement si : $HM^2 = R^2 - \Omega H^2$.

L'intersection $\mathcal{S} \cap D$ dépend donc de la distance $\Omega H = d(\Omega, D)$:

- si $d(\Omega, D) > R$: $\mathcal{S} \cap D = \varnothing$.
- si $d(\Omega, D) = R$, $\mathcal{S} \cap D = \{H\}$: D est tangente à $\mathcal{S}$.
  $(\Omega H) \perp D$: la tangente à une sphère est orthogonale au rayon correspondant.
- si $d(\Omega, D) < R$, $\mathcal{S} \cap D = \{A, B\}$, où A et B sont les deux points de D tels que $HA = HB = \sqrt{R^2 - d(\Omega, D)^2}$: D est sécante à $\mathcal{S}$.

6.3 • Intersection d'une sphère et d'un plan



Doc. 21 Intersection d'une sphère et d'un plan.

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω, de rayon R, et P un plan, H le projeté orthogonal de Ω sur P (*Doc.* 21).

L'intersection $\mathcal{S} \cap P$ dépend de la distance $\Omega H = d(\Omega, P)$:

- si $d(\Omega, P) > R$: $\mathcal{S} \cap P = \varnothing$.
- si $d(\Omega, P) = R$, $\mathcal{S} \cap P = \{H\}$: P est tangent à $\mathcal{S}$.
  $(\Omega H) \perp P$: le plan tangent à une sphère est orthogonal au rayon correspondant.
- si $d(\Omega, P) < R$, $\mathcal{S} \cap P$ est le cercle Γ du plan P, de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - \Omega H^2}$: P est sécant à $\mathcal{S}$.

APPLICATION 5

Équation du plan tangent à une sphère en un point donné

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre $\Omega(a, b, c)$, de rayon R, et $H = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{S}$. Une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ est : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, où $d = a^2+b^2+c^2-R^2$. Déterminer une équation du plan P tangent à $\mathcal{S}$ en H.

P est le plan passant par H, de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega H}$; pour tout point $M(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} M \in P \iff & \overrightarrow{\Omega H} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \\ \iff & (x_0 - a)(x - x_0) \\ & + (y_0 - b)(y - y_0) \\ & + (z_0 - c)(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & x_0 x + y_0 y + z_0 z \\ & - ax - by - cz - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 \\ & + ax_0 + by_0 + cz_0 = 0 \end{aligned}$$

Comme $H \in \mathcal{S}$:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + d = 0$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} & x_0 x + y_0 y + z_0 z \\ & - a(x + x_0) - b(y + y_0) \\ & - c(z + z_0) + d = 0 \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent en H à $\mathcal{S}$ est obtenue à partir de celle de $\mathcal{S}$ en « dédoublant » les termes x^2, y^2, z^2 en $x_0 x$, $y_0 y$, $z_0 z$ et $2ax$, $2by$, $2cz$ en $a(x + x_0)$, $b(y + y_0)$, $c(z + z_0)$.

Pour s'entraîner : ex. 13, 14

MÉTHODE

- Pour exprimer que deux vecteurs sont orthogonaux, on écrit que leur produit scalaire est nul.
- Pour exprimer que deux vecteurs sont colinéaires, on écrit que leur produit vectoriel est nul.
- Pour exprimer que trois vecteurs sont coplanaires, on écrit que leur produit mixte est nul.
- Pour représenter une droite, on choisit un point A et un vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ non nul et on écrit :

$$M \in D \iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \begin{cases} x = x_A + \alpha\, t \\ y = y_A + \beta\, t \\ z = z_A + \gamma\, t \end{cases}$$

(*cf. exercice* 12.)

- Pour représenter un plan, on peut :
  - choisir un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ et écrire :

$$M \in P \iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

  (*cf. exercice* 9.)
  - choisir un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$, et écrire :

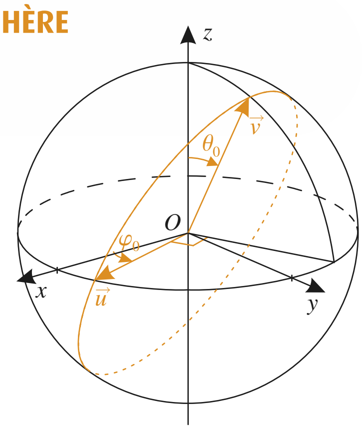
$$M \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$$

- Pour exprimer que trois plans sont parallèles à une même droite, on écrit que leurs vecteurs normaux sont coplanaires.
(*cf. exercices* 7 et 8.)

Exercice résolu

ORTHODROMIES ET LOXODROMIES D'UNE SPHÈRE

1 *Nous admettrons qu'à la surface d'une sphère de centre O de rayon R, le plus court chemin entre deux points est un arc de grand cercle, c'est-à-dire d'un cercle de centre O passant par ces deux points (Doc. 22). En navigation, maritime ou aérienne, cette route idéale est appelée* ***orthodromie****. On demande de représenter une orthodromie en coordonnées sphériques, par une équation reliant la longitude φ et la colatitude θ. On prendra l'intersection de la sphère avec un plan P faisant un angle θ_0 avec l'axe (Oz), et dont l'intersection avec le plan (xOy) fait un angle φ_0 avec (Ox).*



Doc. 22

2 *En pratique, cet itinéraire est difficile à calculer et les navigateurs préfèrent suivre un cap constant, quitte à changer ce cap à intervalles réguliers (par exemple chaque jour pour un navire, ou chaque heure pour un avion). On appelle* ***loxodromie*** *une courbe de la sphère qui coupe chaque méridien (ligne $\varphi = C^{te}$) suivant un angle constant α. On veut représenter une loxodromie par une équation de la forme $\varphi = \phi(\theta)$, où ϕ est une fonction dérivable sur $]0, \pi[$.*

a) *Calculer la dérivée $\phi'(\theta)$.*

b) *En déduire $\phi(\theta)$ (on vérifiera que $\theta \mapsto \ln \tan \dfrac{\theta}{2}$ est une primitive de $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sin\theta}$).*

c) *Que devient la loxodromie lorsqu'on s'approche d'un pôle ?*

d) *Une carte Mercator représente en abscisse la longitude φ, et en ordonnées une fonction de la latitude $\lambda = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, calculée de façon qu'une loxodromie soit représentée sur la carte par une droite. Quelle doit être cette fonction ? Quel est l'intérêt d'une carte Mercator ? Permet-elle de trouver le plus court chemin entre deux points ? Permet-elle de représenter les régions polaires ?*

Conseils

Chercher d'abord une équation cartésienne du plan P.

On peut simplifier par R, qui est non nul.

Considérer la loxodromie comme une courbe paramétrée et chercher sa tangente.

Solution

1) La sphère est représentée en coordonnées sphériques par :

$$\begin{cases} x = R\,\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\,\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\,\cos\theta \end{cases}$$

Le plan P passe par O et il est dirigé par les vecteurs $\vec{u}(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, 0)$ et $\vec{v}(-\sin\varphi_0\sin\theta_0, \cos\varphi_0\sin\theta_0, \cos\theta_0)$; il a donc pour équation cartésienne : $\operatorname{Det}(\overrightarrow{OM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} x & \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0\sin\theta_0 \\ y & \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0\sin\theta_0 \\ z & 0 & \cos\theta_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos\theta_0\sin\varphi_0\,x - \cos\theta_0\cos\varphi_0\,y + \sin\theta_0\,z = 0$$

L'orthodromie, intersection de la sphère et du plan est donc l'ensemble des points vérifiant :

$$\cos\theta_0\sin\varphi_0(\sin\theta\cos\varphi) - \cos\theta_0\cos\varphi_0(\sin\theta\sin\varphi) + \sin\theta_0(\cos\theta) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\cos\theta_0\sin\theta\,(\sin\varphi_0\cos\varphi - \cos\varphi_0\sin\varphi) + \sin\theta_0\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta_0\sin\theta\,\sin(\varphi_0 - \varphi) + \sin\theta_0\cos\theta = 0$$

En excluant les cas $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire que le cercle cherché est un méridien), et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (intersection du cercle cherché avec l'équateur), on peut simplifier l'équation de l'orthodromie :

$$\boxed{\sin(\varphi - \varphi_0)\,\tan\theta = \tan\theta_0}$$

2) a) La loxodromie est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(\theta) = R\,\sin\theta\cos\phi(\theta) \\ y(\theta) = R\,\sin\theta\sin\phi(\theta) \qquad \theta \in\,]0, \pi[\\ z(\theta) = R\,\cos\theta \end{cases}$$

Considérer de même le méridien comme une courbe paramétrée et chercher sa tangente.

Calculer le cosinus de l'angle que font en un point la loxodromie et le méridien.

La tangente au point de paramètre θ est dirigée par le vecteur dérivée première :

$$\vec{V}\begin{cases} x'(\theta) = R\cos\theta\cos\phi(\theta) - R\phi'(\theta)\sin\theta\sin\phi(\theta) \\ y'(\theta) = R\cos\theta\sin\phi(\theta) + R\phi'(\theta)\sin\theta\cos\phi(\theta) \\ z'(\theta) = -R\sin\theta \end{cases}$$

Le carré de la norme de ce vecteur est :

$$\| \vec{V} \|^2 = x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 + z'(\theta)^2 = R^2\left(1 + \phi'(\theta)^2\sin^2\theta\right)$$

Le méridien de longitude φ est représenté paramétriquement par :

$$\begin{cases} x_1(\theta) = R\sin\theta\cos\varphi \\ y_1(\theta) = R\sin\theta\sin\varphi \qquad \theta \in]0,\pi[\\ z_1(\theta) = R\cos\theta \end{cases}$$

(où φ est constant).
La tangente au point de paramètre θ est dirigée par le vecteur dérivée première :

$$\vec{U}\begin{cases} x_1'(\theta) = R\cos\theta\cos\varphi \\ y_1'(\theta) = R\cos\theta\sin\varphi \\ z_1'(\theta) = -R\sin\theta \end{cases}$$

Le carré de la norme de ce vecteur est :

$$\| \vec{U} \|^2 = x_1'(\theta)^2 + y_1'(\theta)^2 + z_1'(\theta)^2 = R^2$$

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = x'(\theta)\,x_1'(\theta) + y'(\theta)\,y_1'(\theta) + z'(\theta)\,z_1'(\theta) = R^2$$

Exprimons que l'angle $(\vec{U},\vec{V})$ est constant et égal à α :

$$\cos(\vec{U},\vec{V}) = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|} = \cos\alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\phi'(\theta)^2\sin^2\theta}} = \cos\alpha$$

d'où, pour $\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}[$:

$$1 + \phi'(\theta)^2\sin^2\theta = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

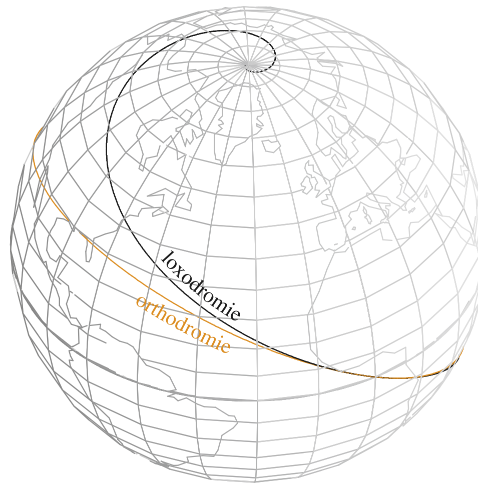
d'où en définitive, pour $\theta \in]0,\pi[$:

$$\boxed{\phi'(\theta) = \pm\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}}$$

b) On vérifie aisément que la dérivée de $\theta \mapsto \ln\tan\frac{\theta}{2}$ est bien $\theta \mapsto \frac{1}{\sin\theta}$.
On en déduit une équation d'une loxodromie :

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\tan\alpha\,\ln\tan\frac{\theta}{2} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1}$$

c) Lorsqu'on s'approche du pôle Nord ($\theta \to 0$), ou du pôle Sud ($\theta \to \pi$), φ tend vers $\pm\infty$: la loxodromie s'enroule en spirale autour du pôle (*Doc.* 23).



Doc. 23

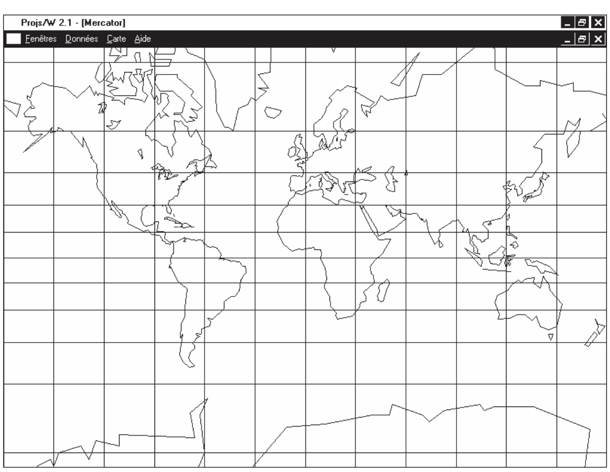
d) Sur une carte Mercator, le point de longitude φ et de latitude $\lambda = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ est représenté par un point de coordonnées $x = \varphi$ et $y = \ln \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\lambda}{2}\right)$.

Ainsi, la loxodromie est représentée par une droite d'équation :

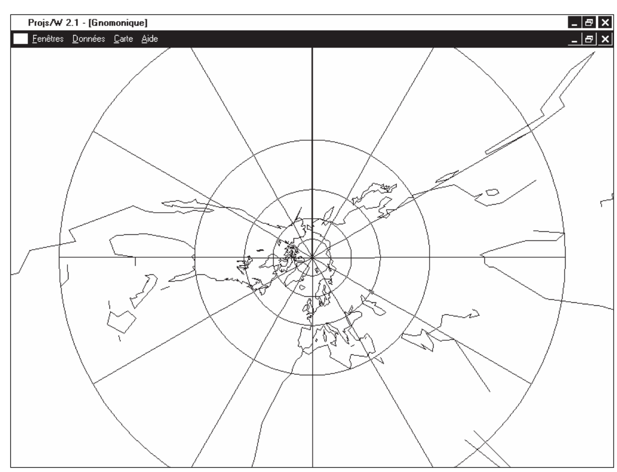
$$x = x_0 + \varepsilon \tan \alpha \, y$$

Cette carte permet de représenter facilement une route à cap constant. En revanche, l'image d'une orthodromie sur la carte de Mercator est une courbe compliquée : cette carte ne se prête pas à la recherche de la route la plus courte (*Doc.* 24). Il existe des cartes, dites gnomoniques, qui représentent les orthodromies comme des droites (*Doc.* 25).

Par ailleurs, la carte de Mercator ne permet pas de représenter les régions polaires, car les pôles y sont rejetés à l'infini.



Doc. 24 Carte Mercator.



Doc. 25 Carte gnomonique.

Sources : http://www.eleves.ens.fr :8080/home/ollivier/carto/
Excellent site, très complet sur la question. On peut en particulier y télécharger un petit logiciel permettant de définir une projection et de visualiser la carte correspondante.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Si on oriente l'espace, on oriente du même coup tous les plans de l'espace.

b) Le produit vectoriel de deux vecteurs est le même quelle que soit l'orientation choisie de l'espace.

c) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 .$$

d) Le déterminant de trois vecteurs est indépendant de l'ordre de ces vecteurs.

e) On peut représenter une droite de l'espace par une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

f) Étant donné deux droites non parallèles D et D', il existe une droite et une seule perpendiculaire à la fois à D et à D'.

g) L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle, un singleton ou l'ensemble vide.

Repérage dans l'espace

2 La Terre étant assimilée à une sphère de centre O de rayon R, calculer la distance à la surface de la Terre entre deux points A et A', de latitudes λ, λ' et de longitudes φ, φ' (attention, contrairement à la colatitude des coordonnées sphériques, la latitude est mesurée à partir de l'équateur).

Indication : Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'}$.
Application : Calculer la distance de Paris ($48°52'$ N, $2°20'$ E) à Rio de Janeiro ($22°53'$ S, $43°12'$ W). On prendra $R = 6380$ km.

Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte

3 Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace :

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} + (\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u} + (\vec{w}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{0}$$

4 Montrer que pour tous vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et $\vec{d}$ de l'espace :

1) $$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\wedge\vec{d}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{aligned}\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\left(\vec{c}\wedge\vec{d}\right) &= \left[\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right]\,\vec{b} - \left[\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right]\,\vec{a} \\ &= \left[\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right]\,\vec{c} - \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\,\vec{d}\end{aligned}$$

5 Soit x_1, x_2, x_3 trois vecteurs de l'espace.

1) Démontrer que :

$$[x_1\wedge x_2\ ,\ x_2\wedge x_3\ ,\ x_3\wedge x_1\ ] = [x_1, x_2, x_3]^2$$

2) On suppose que x_1, x_2, x_3 ne sont pas coplanaires, et on pose :

$$x_1' = \frac{x_2\wedge x_3}{[x_1, x_2, x_3]}\ ;\quad x_2' = \frac{x_3\wedge x_1}{[x_1, x_2, x_3]}\ ;\quad x_3' = \frac{x_1\wedge x_2}{[x_1, x_2, x_3]}$$

a) Calculer les produits scalaires mutuels $x_i'\cdot x_j$ pour tout $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$.

b) Montrer que $[x_1', x_2', x_3'] = \dfrac{1}{[x_1, x_2, x_3]}$.

Droites et plans de l'espace

6 Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace et O un point n'appartenant pas au plan (ABC). Soit A', B', C' les symétriques de O par rapport aux milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

7 Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. Soit $\vec{u}$ un vecteur n'appartenant pas à la direction du plan (ABC). On considère trois points A', B' et C' définis par :

$$\overrightarrow{AA'} = \alpha\vec{u}\quad ,\quad \overrightarrow{BB'} = \beta\vec{u}\quad ,\quad \overrightarrow{CC'} = \gamma\vec{u}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma)\in\mathbb{R}^{*3}$.

Montrer que les trois plans $(A'BC)$, $(B'AC)$ et $(C'AB)$ sont parallèles à une même droite si et seulement si :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

8 L'espace est rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les plans P, P', P'' d'équations respectives :

$$\begin{aligned} P &: \quad ax + y + z + 1 = 0 \\ P' &: \quad x + ay + z + a = 0 \\ P'' &: \quad x + y + az + b = 0 \end{aligned}$$

Déterminer les réels a et b pour que l'intersection de ces trois plans soit une droite. Donner alors une représentation paramétrique de cette droite.

9 L'espace est rapporté au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit D la droite représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Déterminer par son équation cartésienne le plan P contenant la droite D et le point $A(0,-1,4)$.

10 Soit D et D' deux droites fixes non coplanaires et non orthogonales de l'espace. Une droite variable Δ est perpendiculaire à D en M et rencontre D' en M'. On désigne par Φ l'angle des plans (D,M') et (D',M). Montrer que le produit $MM'\tan\Phi$ reste constant lorsque M décrit D.

11 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Déterminer l'ensemble E des points équidistants des droites :

$$D_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Tracer les intersections de E avec les trois plans de coordonnées.
Montrer que par tout point de E il passe deux droites incluses dans E.

12* **1)** Soit D_1 et D_2 deux droites non coplanaires de l'espace. Étudier l'ensemble décrit par le milieu d'un segment $[M_1M_2]$ où $M_1 \in D_1$ et $M_2 \in D_2$.

2) Soit D_1, D_2, D_3 trois droites non coplanaires deux à deux et non parallèles à un même plan. Démontrer qu'il existe un point unique A de E qui pour tout couple $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$ tel que $i \neq j$, A soit le milieu d'un segment joignant un point de D_i et un point de D_j.

Sphères

13 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. À tout réel t, on associe le point $M(t)$ de coordonnées :

$$x(t) = \cos t + \sqrt{3}\sin t + 1 \qquad y(t) = \cos t - \sqrt{3}\sin t + 1$$
$$z(t) = -2\cos t + 1$$

Montrer que lorsque t décrit $]-\pi,\pi]$, le point $M(t)$ décrit un cercle dont on déterminera le plan, le centre et le rayon.

14 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
(*On pourra utiliser la sphère circonscrite à* $OABC$).

8 Vocabulaire relatif aux ensembles, aux applications et aux relations

INTRODUCTION

Les différentes parties des mathématiques ont acquis à la fin du XIX^e^ *siècle un langage commun : celui de la théorie des ensembles. La formalisation des définitions, des théorèmes et des démonstrations permet d'éviter toute ambiguïté, et d'atteindre un haut niveau de rigueur. Cependant, son usage excessif rend les énoncés mathématiques très difficiles à déchiffrer. Nous utiliserons donc ce langage avec modération, chaque fois qu'il permet de préciser et de clarifier une notion, de trancher des cas litigieux, ou de valider une démonstration, mais sans jamais perdre de vue le sens des propositions manipulées.*

OBJECTIFS

- Acquisition du vocabulaire usuel sur les ensembles, les applications, les relations.
- Entraînement à la mise au point et à la rédaction de raisonnements abstraits.

1 Ensembles

1.1 • Ensembles et éléments

La notion d'ensemble est une notion première que nous ne chercherons donc pas à définir. Disons seulement qu'un ensemble est un objet auquel peut *appartenir* ou *ne pas appartenir* un autre objet.

On note : $\begin{cases} x \in E & \text{pour « } x \text{ appartient à } E \text{ »} \\ x \notin E & \text{pour « } x \text{ n'appartient pas à } E \text{ »} \end{cases}$

On appelle **élément** de l'ensemble E un objet qui appartient à E.

On ne peut pas cependant considérer n'importe quelle collection d'objets comme un ensemble sous peine d'aboutir à des contradictions, comme le montre le paradoxe suivant dû au mathématicien anglais Bertrand Russel (1902).

Paradoxe de Russel

Un ensemble peut être ou non élément de lui-même. Supposons que l'on puisse définir l'ensemble E de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Cet ensemble E est-il élément de lui-même ?

- si $E \in E$, il ne satisfait pas à la définition, donc $E \notin E$;
- si $E \notin E$, il satisfait à la définition, donc $E \in E$...

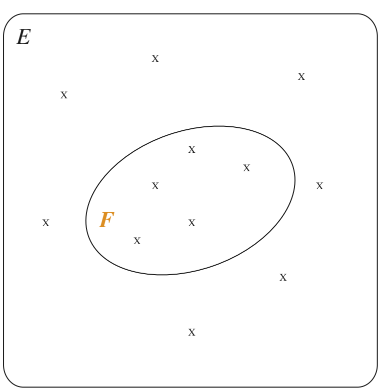
Ce paradoxe est parfois présenté sous forme imagée par l'histoire d'un barbier qui se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ?

Pour échapper à ce type de contradiction, il convient de respecter des règles précises pour définir des ensembles. Certains ensembles sont définis de façon **axiomatique** (par exemple $\mathbb{N}$). D'autres peuvent être **construits** à partir de ceux-là à l'aide d'opérations convenables (par exemple $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$...). Le but de la théorie des ensembles (que nous n'aborderons pas) est de valider les opérations qui ne risquent pas de conduire à des contradictions.

1.2 • Sous-ensembles

Soit E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E si tout élément de F est élément de E.

On note $F \subset E$. On dit aussi que F est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E (*Doc.* 1).



Doc. 1 Sous-ensemble.

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont exactement les mêmes éléments, c'est-à-dire si chacun est inclus dans l'autre :

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Un sous-ensemble de E peut être défini comme l'ensemble des éléments de E vérifiant une certaine proposition.

Exemple : $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \ , \ x \geqslant 0\}$.

En particulier, si cette proposition est impossible, on obtient l'**ensemble vide**, qui doit donc être considéré comme un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. On le note $\varnothing$.

Exemple : $\{x \in \mathbb{R}\ ,\ x > 0 \text{ et } x < 0\} = \varnothing$.

Un ensemble qui possède un unique élément est appelé **singleton**. Il ne faut pas confondre l'élément x et le singleton $\{x\}$. On peut par exemple écrire : $2 \in \mathbb{N}$ ou $\{2\} \subset \mathbb{N}$, mais pas l'inverse.

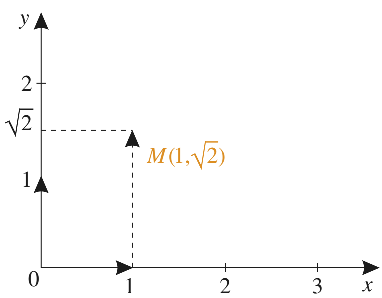
1.3 • Produit cartésien

Soit E et F deux ensembles. On peut construire un nouvel ensemble appelé **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, dont les éléments sont les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F.

$$(x, y) \in E \times F \iff (x \in E \text{ et } y \in F)$$

Si $E = F$, on note $E \times E = E^2$, $E \times E \times E = E^3$ etc.

Par exemple : $(1, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ peut être identifié à un plan muni d'un repère cartésien, le couple (x, y) étant représenté par le point de coordonnées x et y (*Doc.* 2).



Doc. 2 Produit cartésien $\mathbb{R}^2$.

1.4 • Quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un certain ensemble E. La proposition $\forall x \in E\ , P(x)$ signifie que tout élément x de E vérifie la proposition $P(x)$.

$$\forall x \in E\ , P(x) \iff \{x \in E\ , P(x)\} = E$$

La proposition $\exists x \in E\ , P(x)$ signifie qu'il existe au moins un élément x de E qui vérifie la proposition $P(x)$.

$$\exists x \in E\ , P(x) \iff \{x \in E\ , P(x)\} \neq \varnothing$$

À RETENIR

$\forall x \in \varnothing,\ P(x)$
est toujours vrai.
$\exists x \in \varnothing,\ P(x)$
est toujours faux.

Remarque *: Si E est l'ensemble vide, il résulte de la définition que la proposition $\forall x \in \varnothing\ , P(x)$ est toujours vraie, tandis que la proposition $\exists x \in \varnothing\ , P(x)$ est toujours fausse. Cette remarque est très utile pour trancher des cas litigieux dans des définitions ou des théorèmes. Par exemple, nous verrons en analyse qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si :*

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad x \leqslant z \leqslant y \implies z \in I$$

L'ensemble vide est-il un intervalle ? Oui, sans ambiguïté, puisque cette proposition commence par $\forall (x, y) \in \varnothing$...

L'ordre des quantificateurs peut avoir une grande importance. Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels peut être caractérisé par :

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad qx \in \mathbb{Z}$$

(q est le dénominateur d'une fraction représentant x). Mais la proposition $\exists q \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{Q} \quad qx \in \mathbb{Z}$ est absurde, puisqu'elle exprime l'existence d'un dénominateur commun à toutes les fractions... (Dans le premier cas, q dépend de x, ce qui est impossible dans le second cas puisqu'il est cité avant.)

Cependant, on peut permuter deux quantificateurs de même nature puisque $\forall x \in E \quad \forall y \in F$ peut s'écrire $\forall (x, y) \in E \times F$ et $\exists x \in E \quad \exists y \in F$ peut s'écrire $\exists (x, y) \in E \times F$.

1.5 • Négation d'une proposition

On note $\overline{P}$ la négation de la proposition P, c'est-à-dire la proposition qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie. Notons que :

$$\overline{P \text{ ou } Q} \iff \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$$
$$\overline{P \text{ et } Q} \iff \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$$

À RETENIR

Si la proposition P est fausse, l'implication $P \Rightarrow Q$ est nécessairement vraie.

D'autre part, comme l'implication $P \Rightarrow Q$ signifie : $\overline{P}$ ou Q, sa négation est :

$$\overline{P \Rightarrow Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$$

Notons par ailleurs que :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

C'est la **contraposée** de l'implication ; elle peut parfois être plus facile à démontrer que l'implication elle-même. C'est le principe du **raisonnement par l'absurde** : on suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer, et on cherche une contradiction avec l'une des hypothèses.

1.6 • Négation d'une proposition avec des quantificateurs

La proposition $\forall x \in E\ ,\ P(x)$ signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété $P(x)$; sa négation est qu'il en existe au moins un qui ne la vérifie pas :

$$\overline{\forall x \in E\ ,\ P(x)} \iff \exists x \in E\ ,\ \overline{P(x)}$$

La proposition $\exists x \in E\ ,\ P(x)$ signifie qu'au moins un élément de E vérifie la propriété $P(x)$; sa négation est qu'aucun d'entre eux ne la vérifie :

$$\overline{\exists x \in E\ ,\ P(x)} \iff \forall x \in E\ ,\ \overline{P(x)}$$

Ceci permet de former très facilement la négation d'une proposition exprimée à l'aide de quantificateurs. Par exemple, une fonction f est dite bornée sur $\mathbb{R}$ si :

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant m \text{ et } f(x) \leqslant M$$

On en déduit que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) < m \text{ ou } f(x) > M$$

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

2 Ensemble des parties d'un ensemble

2.1 • Ensemble $\mathcal{P}(E)$

Tous les sous-ensembles d'un ensemble E constituent un nouvel ensemble, appelé **ensemble des parties** de E et noté $\mathcal{P}(E)$. Ainsi :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$:

$$\mathcal{P}(E) = \{\, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E \,\}$$

Remarque *: L'ensemble $\mathcal{P}(\varnothing)$ n'est pas vide, puisqu'il contient l'élément $\varnothing$. C'est un singleton : $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.*

2.2 • Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

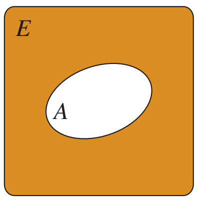
Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. On peut définir de nouvelles parties de E par les opérations suivantes :

Complémentaire

$\complement_E A$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A (équivalent ensembliste de la négation) (*Doc.* 3) :

$$\forall x \in E \qquad x \in \complement_E A \quad \Longleftrightarrow \quad x \notin A$$

Exemple : $\complement_{\mathbb{R}} \{0\} = \mathbb{R}^*$.



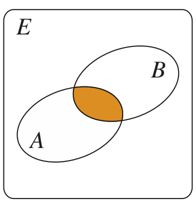
Doc. 3 Complémentaire.

Intersection

$A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B (équivalent ensembliste de la conjonction) (*Doc.* 4) :

$$\forall x \in E \qquad x \in A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ et } x \in B$$

Exemple : $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$



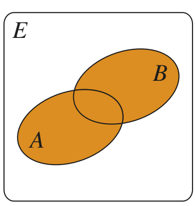
Doc. 4 Intersection.

Réunion

$A \cup B$ est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A ou à B (équivalent ensembliste de la disjonction) (*Doc.* 5) :

$$\forall x \in E \qquad x \in A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ ou } x \in B$$

Exemple : $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$.



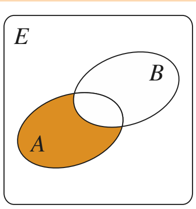
Doc. 5 Réunion.

Différence

$A \backslash B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B (équivalent ensembliste de la négation de l'implication) (*Doc.* 6) :

$$A \backslash B = A \cap \complement_E B$$

Exemple : $\mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^*$.



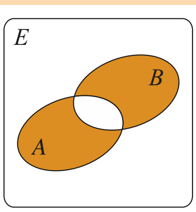
Doc. 6 Différence.

Différence symétrique

$A \bigtriangleup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent soit à A soit à B, mais pas aux deux à la fois (équivalent ensembliste de la disjonction exclusive) (*Doc.* 7) :

$$A \bigtriangleup B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

Exemple : $\mathbb{R}_+ \bigtriangleup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}^*$.



Doc. 7 Différence symétrique.

2.3 • Propriétés

Les propriétés suivantes sont faciles à établir. Leurs démonstrations sont laissées au lecteur. Pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E :

- $A \cap B = B \cap A$;
- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \triangle B = B \triangle A$;
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$;
- $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$;
- $A \subset B \iff \complement_E B \subset \complement_E A$;
- $A \cap B = \varnothing \iff A \subset \complement_E B \iff B \subset \complement_E A$ (les parties A et B sont dites **disjointes**).

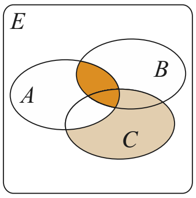
APPLICATION 1

Démontrer une inclusion

Soit A, B, C trois parties d'un même ensemble E. Démontrer que :

$$(A \cap B) \cup (C \cap \complement_E A) \subset (A \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B) \cup (B \cap C)$$

Soit x un élément de $(A \cap B) \cup (C \cap \complement_E A)$. x appartient au moins à l'un des deux ensembles $A \cap B$ ou $C \cap \complement_E A$:



Doc. 8

- Si $x \in A \cap B$:
  - soit $x \in C$, alors $x \in B \cap C$;
  - soit $x \notin C$, alors $x \in A \cap \complement_E C$.
- Si $x \in C \cap \complement_E A$:
  - soit $x \in B$, alors $x \in B \cap C$;
  - soit $x \notin B$, alors $x \in \complement_E A \cap \complement_E B$.

Dans tous les cas :

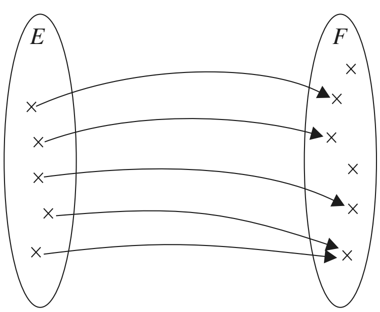
$$x \in (A \cap \complement_E C) \cup (\complement_E A \cap \complement_E B) \cup (B \cap C).$$

Par exemple : l'ensemble des hommes à lunettes et des femmes non fumeuses est inclus dans l'ensemble des hommes fumeurs, des femmes sans lunettes et des non-fumeurs à lunettes.

Pour s'entraîner : ex. 4 à 7

3 Application d'un ensemble dans un autre

3.1 • Définition



Doc. 9 Application de E dans F.

Soit E et F deux ensembles. On appelle **application** de E dans F la donnée des ensembles E, F, et d'une partie Γ de $E \times F$ telle que pour tout élément x de E il existe un élément y et un seul de F tel que $(x, y) \in \Gamma$ (*Doc.* 9).

- E est appelé **ensemble de départ** de l'application.
- F est appelé **ensemble d'arrivée** de l'application.
- Γ est appelé **graphe** de l'application.
- y est appelé **image** de x par l'application. Si on désigne l'application par f, on écrit $y = f(x)$.
- x est **un antécédent** de y par l'application (mais ce n'est pas forcément le seul...).

Notation : $\left| \begin{array}{ccc} E & \overset{f}{\rightarrow} & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$

Remarque : *La donnée des ensembles E et F fait partie de la définition de l'application. Ainsi, deux applications sont égales si et seulement si elles ont **même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe**. Par exemple, les applications :*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

sont différentes : elles n'ont pas du tout les mêmes propriétés (parité, croissance...).

Exemples généraux

- Application identique de E : $\left| \begin{array}{ccc} E & \overset{\mathrm{Id}_E}{\rightarrow} & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$
- Injection canonique de E dans F $(E \subset F)$: $\left| \begin{array}{ccc} E & \overset{j_E}{\rightarrow} & F \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$
- Projections : $\left| \begin{array}{ccc} E \times F & \overset{p_1}{\rightarrow} & E \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} E \times F & \overset{p_2}{\rightarrow} & F \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array} \right.$
- Restriction de f à une partie A de E : $\left| \begin{array}{ccc} A & \overset{f|_A}{\rightarrow} & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$

On dit que f est un **prolongement** de g si g est une restriction de f.

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou mieux F^E. (Cette notation sera expliquée plus loin à propos de la notion de famille.)

3.2 • Composition des applications

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle **application composée** de f et g l'application de E dans G qui à un élément x de E fait correspondre l'image par g de l'image par f de x.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, "g"] & \\ E \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & G \end{tikzcd}$$

Doc. 10 Composée d'applications.

On note cette application $g\circ f$ (*Doc.* 10). Attention à l'ordre qui peut paraître paradoxal, mais qui est en fait très commode, en effet :

$$\forall x \in E \quad g\circ f\ (x) = g[f(x)]$$

Exemples : $f \circ \mathrm{Id}_E = f$; $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.

Théorème 1

Si E, F, G, H sont quatre ensembles et f, g, h trois applications appartenant respectivement à $\mathcal{F}(E,F)$, $\mathcal{F}(F,G)$, $\mathcal{F}(G,H)$:

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$$

Démonstration

Les deux applications $h\circ(g\circ f)$ et $(h\circ g)\circ f$ ont le même ensemble de départ : E, le même ensemble d'arrivée : H, et :

$$\forall x \in E \quad h\circ(g\circ f)\ (x) = h\big(g[f(x)]\big) = (h\circ g)\circ f\ (x)$$

Ces deux applications sont donc égales.

3.3 • Famille d'éléments d'un ensemble

La notion de famille n'est donc pas différente de celle d'application, il s'agit seulement d'utiliser des indices pour représenter les images. Par exemple, une suite numérique est une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle **famille** d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble I, une application de I dans E notée :

$$\left|\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & E \\ i & \mapsto & x_i \end{array}\right.$$

On peut identifier le produit cartésien $E \times E$ avec l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par l'ensemble $\{1,2\}$, et plus généralement le produit cartésien E^n avec l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par $\{1, \cdots, n\}$. Par analogie, quel que soit l'ensemble I, on note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I, ou, ce qui revient au même, l'ensemble des applications de I dans E.

On peut généraliser aux familles de parties d'un ensemble E les notions d'intersection et de réunion :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\, x \in E \ ,\ \forall i \in I \quad x \in A_i \,\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \in E \ ,\ \exists i \in I \quad x \in A_i \,\}$$

4 Injectivité et surjectivité

4.1 • Équation

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On appelle **équation** une égalité de la forme $f(x) = y$, où y est un élément fixé de F ; on appelle **solution** de l'équation tout élément x de E qui vérifie cette égalité, autrement dit tout antécédent de y par f.

Une équation peut avoir une solution unique, par exemple : $3x = 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; plusieurs solutions, par exemple : $x^2 = 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; une infinité de solutions, par exemple : $|x| = -x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; ou encore aucune solution, par exemple : $x^2 = -1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4.2 • Application injective

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est **injective** (ou que c'est une **injection**) si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution x dans E.
À l'aide de quantificateurs, l'injectivité de f s'écrit :

$$\forall (x, x') \in E^2 \qquad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

Exemples :

1) Id_E est injective.

2) Toute application de $\varnothing$ dans F est injective.

3) L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective.

Théorème 2

1) La composée de deux injections est une injection.

2) Si la composée $g \circ f$ est injective, f est injective.

Démonstration

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans G.

1) Supposons f et g injectives. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f\,(x) = g \circ f\,(x')$, c'est-à-dire $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$. Du fait de l'injectivité de g, $f(x) = f(x')$, et, du fait de l'injectivité de f, $x = x'$. Donc $g \circ f$ est injective.

2) Supposons $g \circ f$ injective. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a alors $g \circ f\,(x) = g \circ f\,(x')$ et, du fait de l'injectivité de $g \circ f$, $x = x'$. f est donc injective.

4.3 • Application surjective

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On dit que f est **surjective** (ou que c'est une **surjection**) si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet toujours une solution x dans E.
À l'aide de quantificateurs, la surjectivité de f s'écrit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = y$$

Exemples :

1) Id_E est surjective.

2) Toute application de E dans $\varnothing$ est surjective. (si $E \neq \varnothing$, il n'y en a aucune !)

3) L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective.

Théorème 3

1) La composée de deux surjections est une surjection.

2) Si la composée $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

Démonstration

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans G.

1) Supposons f et g surjectives. Soit $z \in G$. z possède un antécédent y dans F par g, et y possède un antécédent x dans E par f. $g \circ f\,(x) = g(y) = z$; x est donc un antécédent de z par $g \circ f$. Cette application est surjective.

2) Supposons $g \circ f$ surjective. Soit $z \in G$. z possède un antécédent x dans E par $g \circ f$, d'où $z = g \circ f\,(x) = g\big(f(x)\big)$; $f(x)$ est donc un antécédent de z dans F par g. L'application g est surjective.

APPLICATION 2

Équivalence de l'existence d'une injection de *E* dans *F* et d'une surjection de *F* dans *E*

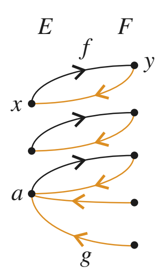
Soit E et F deux ensembles, montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement si il existe une application surjective de F dans E.

Supposons qu'il existe une injection f de E dans F, et considérons un élément y de F :

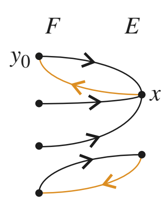
- ou bien l'équation $f(x) = y$ possède une solution unique x ; on note $x = g(y)$;
- ou bien l'équation $f(x) = y$ n'a aucune solution ; on choisit alors un élément quelconque de E, a, et on pose $a = g(y)$.

g ainsi définie est une application de F dans E puisque tout élément de F possède une unique image dans E. Elle est surjective, puisque tout élément de E est l'image par g d'au moins un élément de F (son image par f) (*Doc.* 11).

Réciproquement, supposons qu'il existe une surjection h de F dans E, et considérons un élément x de E : l'équation $h(y) = x$ possède au moins une solution (*Doc.* 12). Choisissons alors l'une de ces solutions y_0, et posons $y_0 = k(x)$. k ainsi définie est une application de E dans F puisque tout élément de E possède une unique image dans F. Elle est injective, en effet $k(x) = k(x') = y_0$ entraîne que x et x' sont images par h d'un même élément de F : $x = x' = h(y_0)$.



Doc. 11



Doc. 12

4.4 • Application bijective

Une application f de E dans F est dite **bijective** (ou on dit que c'est une **bijection**) si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique x dans E.

Exemples :

1) Id_E est bijective.

2) Toute application de $\varnothing$ dans $\varnothing$ est bijective.

3) L'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right.$ est bijective.

ATTENTION

L'application f^{-1} n'existe que pour une application bijective. C'est une faute grave de l'évoquer sans vérifier que l'on a bien affaire à une bijection.

Théorème 4

1) La composée de deux bijections est une bijection.

2) Si la composée $g \circ f$ est bijective, g est surjective et f injective.

3) L'application f de E dans F est bijective si et seulement si il existe une application de F dans E notée f^{-1} telle que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

L'application f^{-1} est appelée **bijection réciproque** de f.

4) Si f et g sont deux bijections, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

1) et **2)** découlent directement des théorèmes **2** et **3**.

3) Si f est bijective, tout élément de F possède un antécédent et un seul par f, ce qui permet de définir de F dans E l'application, notée f^{-1} :

$$\forall y \in E \quad f^{-1}(y) = x \quad \text{où } x \text{ est l'unique solution de l'équation} \quad f(x) = y$$

On a alors de façon immédiate :

$$\forall x \in E \quad f^{-1} \circ f\,(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in F \quad f \circ f^{-1}\,(y) = y$$

4) $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$
$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Une application f de E dans E est dite **involutive** (c'est une **involution**) si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire si f est bijective et si $f^{-1} = f$.

APPLICATION 3

Démontrer l'injectivité ou la surjectivité d'une application

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On considère l'application :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}\right.$$

Démontrer que :

1) *f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.*

2) *f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.*

1) Notons que $f(A \cup B) = (A, B) = f(E)$. Si f est injective, on en déduit $A \cup B = E$.

Réciproquement, supposons que $A \cup B = E$ et montrons l'injectivité de f. Considérons pour cela deux parties X et Y de E telles que $f(X) = f(Y)$, c'est-à-dire $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. On en déduit :

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$$

soit : $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$, d'où en définitive $X = Y$. f est donc injective.

2) Si f est surjective, il existe une partie X de E telle que : $f(X) = (A, \varnothing)$, c'est-à-dire $X \cap A = A$ et $X \cap B = \varnothing$; A est inclus dans X qui est disjoint de B, il est donc lui-même disjoint de B : $A \cap B = \varnothing$.

Réciproquement, supposons que $A \cap B = \varnothing$ et montrons la surjectivité de f. Considérons pour cela un élément (A', B') de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On remarque que :

$$(A' \cup B') \cap A = (A' \cap A) \cup (B' \cap A) = A'$$

et

$$(A' \cup B') \cap B = (A' \cap B) \cup (B' \cap B) = B'$$

c'est-à-dire : $f(A' \cup B') = (A', B')$. L'élément (A', B') a donc un antécédent par f : f est surjective.

Pour s'entraîner : ex. 8 à 11

5 Image directe ou réciproque d'une partie

5.1 • Image d'une partie de l'ensemble de départ

Soit f une application de E dans F, et A une partie de E. On appelle **image** de A par f l'ensemble des images des éléments de A. Par abus de notation, cet ensemble est noté $f(A)$, mais il faut bien garder à l'esprit qu'il ne s'agit pas de l'image d'un élément de E. On a donc par définition :

$$\forall y \in F \quad y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad y = f(x)$$

Exemple : Si f est l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \right.$, $f\big([0, \pi]\big) = [0, 1]$.

La surjectivité d'une application f de E dans F peut s'écrire très simplement : $f(E) = F$.

5.2 • Image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée

Soit f une application de E dans F, et B une partie de F. On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble des antécédents des éléments de B, autrement dit l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B. Par abus de notation, cet ensemble est noté $f^{-1}(B)$, mais f^{-1} ne désigne généralement pas une application, et il faut bien se garder de croire que l'image réciproque par f soit l'image directe par une autre application... (sauf quand f est bijective ; l'image réciproque d'une partie est alors l'image de cette partie par la bijection réciproque). Par définition :

$$\forall x \in E \quad x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Exemple : Si f est l'application $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sin x\end{array}\right.$,

$$f^{-1}\big([0,1]\big) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

Pour s'entraîner : ex. 12, 13

6 Relation d'ordre

6.1 • Relation binaire

On appelle **relation binaire** définie sur un ensemble E la donnée de E et d'une partie quelconque Γ de $E\times E$. On note $x\mathcal{R}y$ pour $(x,y)\in\Gamma$.

Exemples : Dans $\mathbb{Z}$: $|x| = |y|$, $x\neq y$, x divise y, etc.

6.2 • Relation d'ordre

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une **relation d'ordre** si elle est :

- **réflexive** : $\forall x\in E \quad x\mathcal{R}x$;
- **antisymétrique** : $\forall (x,y)\in E^2 \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x=y$;
- **transitive** : $\forall (x,y,z)\in E^3 \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

L'ordre est dit **total** s'il permet de comparer deux éléments quelconques :

$$\forall (x,y)\in E^2 \quad x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x$$

L'ordre est dit **partiel** dans le cas contraire.
Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit **ordonné** (respectivement **totalement ordonné** ou **partiellement ordonné**).

6.3 • Exemples

ensemble	relation	ordre
$\mathbb{R}$	$\leqslant$	total
$\mathcal{P}(E)$	$\subset$	partiel
$\mathbb{N}$	« divise »	partiel

ATTENTION

La relation, dite « d'ordre strict », $x<y$, qui signifie $x\leqslant y$ et $x\neq y$, n'est pas une relation d'ordre (puisqu'elle n'est pas réflexive).

Par analogie avec le premier exemple, une relation d'ordre est souvent notée $\leqslant$ qu'elle soit totale ou partielle. Il faut prendre garde à ne pas céder aux automatismes que pourraient suggérer cette notation : beaucoup de relations d'ordre ont des propriétés très différentes de celles de l'ordre total de $\mathbb{R}$.

Si E est un ensemble ordonné par la relation $\leqslant$, on peut munir le produit cartésien $E\times E$ de l'ordre dit **lexicographique** défini par :

$$(x,y)\leqslant(x',y') \iff x<x' \text{ ou } (x=x' \text{ et } y\leqslant y')$$

On peut généraliser cette définition à l'ensemble E^n. C'est le principe de l'ordre alphabétique appliqué aux suites de lettres de l'alphabet.

6.4 • Vocabulaire lié à l'ordre

Soit E un ensemble ordonné par la relation $\leqslant$, et A une partie de E. On appelle :

- **Majorant** de A un élément de E supérieur ou égal à tous les éléments de A.

$$M \text{ majore } A \iff \forall a \in A \quad a \leqslant M$$

  Une partie est dite **majorée** si elle possède un majorant.

- **Minorant** de A un élément de E inférieur ou égal à tous les éléments de A.

$$m \text{ minore } A \iff \forall a \in A \quad m \leqslant a$$

  Une partie est dite **minorée** si elle possède un minorant.

- **Plus grand élément** de A (ou élément **maximum**) un majorant de A appartenant à A. S'il existe, il est unique. On le note $\max A$.
- **Plus petit élément** de A (ou élément **minimum**) un minorant de A appartenant à A. S'il existe, il est unique. On le note $\min A$.
- **Borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A, s'il existe. Il est alors unique, on le note $\sup A$.
  (Si A possède un plus grand élément, il est nécessairement borne supérieure.)
- **Borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A, s'il existe. Il est alors unique, on le note $\inf A$.
  (Si A possède un plus petit élément, il est nécessairement borne inférieure.)

Les notions de borne supérieure et borne inférieure seront approfondies dans le chapitre sur les nombres réels, dont elles constituent le fondement.

Exemple : Si $E = \mathbb{R}$, la partie $A =]0, 1]$ est minorée (par -1 par exemple) et majorée (par 3 par exemple). Elle admet un plus grand élément : 1, qui est donc aussi sa borne supérieure.

$$\max]0, 1] = \sup]0, 1] = 1$$

A n'admet pas de plus petit élément, mais une borne inférieure : 0.

$$\inf]0, 1] = 0$$

Si E et F sont deux ensembles ordonnés, une application f de E dans F est dite **croissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$$

f est dite **strictement croissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

f est dite **décroissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$$

f est dite **strictement décroissante** si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

APPLICATION 4

Étude d'une relation d'ordre

On munit $\mathbb{R}^2$ *de la relation notée* $\preccurlyeq$ *définie par :*

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'$$

1) *Démontrer que* $\preccurlyeq$ *est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ou partiel ?*

2) *Le disque fermé de centre* O *de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?*

1) La relation $\preccurlyeq$ est :

- réflexive : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x \leqslant x \text{ et } y \leqslant y$$

- antisymétrique : pour tous couples (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$,

$$x \leqslant x',\ y \leqslant y',\ x' \leqslant x,\ y' \leqslant y \implies (x, y) = (x', y')$$

- transitive : pour tous couples (x, y), (x', y') et (x'', y'') de $\mathbb{R}^2$,

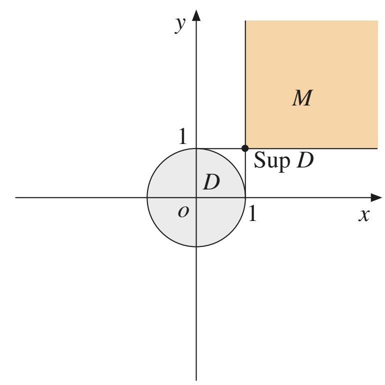
$$x \leqslant x',\ y \leqslant y',\ x' \leqslant x'',\ y' \leqslant y'' \implies x \leqslant x'',\ y \leqslant y''$$

C'est donc une relation d'ordre. L'ordre est partiel : on ne peut pas classer par exemple les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$.

2) Posons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

Supposons que D possède un plus grand élément (x_0, y_0).

$$(1, 0) \in D \quad \text{d'où} \quad x_0 \geqslant 1 \text{ et } y_0 \geqslant 0$$
$$(0, 1) \in D \quad \text{d'où} \quad x_0 \geqslant 0 \text{ et } y_0 \geqslant 1$$



Doc. 13

Les inégalités $x_0 \geqslant 1$ et $y_0 \geqslant 1$ sont incompatibles avec l'inégalité $x_0^2 + y_0^2 \leqslant 1$ qui caractérise l'appartenance de (x_0, y_0) à D. D n'a donc pas de plus grand élément.

L'ensemble des majorants de D est :

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 1\}$$

La borne supérieure de D est le plus petit des majorants de D, c'est-à-dire $(1, 1)$.

Pour s'entraîner : ex. 14 à 16

MÉTHODE

Pour montrer que $E \subset F$:

- on considère un élément quelconque de E et on démontre qu'il appartient à F (*cf. Application* 1 et *exercice* 5).

Pour montrer que $E = F$, on montre les deux inclusions : $E \subset F$ et $F \subset E$ (*cf. exercices* 4, 6 et 7).

Pour montrer que deux applications f et g sont égales, on montre qu'elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F, et que $\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$.

Pour montrer qu'une application f de E dans F est injective, on peut :

- considérer deux éléments x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$ et montrer que $x = x'$ (*cf. Application* 3) ;
- trouver une application g définie sur F telle que $g \circ f$ est injective (*cf. exercice* 10).

Pour montrer qu'une application f de E dans F est surjective, on peut :

- considérer un élément y de F et prouver qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (*cf. Application* 3) ;
- trouver une application g arrivant dans E telle que $f \circ g$ est surjective (*cf. exercice* 10).

Pour montrer qu'une application f de E dans F est bijective, on peut :

- considérer un élément y de F et prouver qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (*cf. Application* 3) ;
- montrer qu'elle est injective et surjective (*cf. exercice* 9) ;
- trouver une application g de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Pour montrer qu'une relation binaire dans E est une relation d'ordre, on montre qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive (*cf. exercices* 14 et 15).

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* \quad x = 0.$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 < 0 \Rightarrow x < 0.$

c) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

d) $\mathbb{R}_+ \triangle \mathbb{R}_- = \mathbb{R}^*$.

e) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

f) Soit $f \in F^E$,
f injective $\iff \forall (x, y) \in E^2 \quad x = y$ ou $f(x) \neq f(y)$.

g) Deux applications f et g de E dans E telles que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ sont bijectives.

h) Si f et g sont bijectives, $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

i) Soit $f \in F^E$. pour tout élément x de E. $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$.

j) Dans $\mathbb{R}^*$, la relation $\dfrac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre.

k) Dans $\mathbb{C}$, la relation $|z| \leqslant |z'|$ est une relation d'ordre.

Quantificateurs

2 Écrire, à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes et leurs négations. Préciser lesquelles sont vraies.

1) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

2) Il existe un entier multiple de tous les autres.

3) Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.

4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

5) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

6) Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

3 Examiner la vérité de la proposition suivante, ainsi que de toutes celles que l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs :

$$\exists x \in \mathbb{R}^* \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \quad \forall z \in \mathbb{R}^* \quad z = xy$$

Parties d'un ensemble

4 Démontrer que pour toutes parties A, B, C d'un même ensemble E :

1) $A \backslash B = \complement_E B \backslash \complement_E A$.

2) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

3) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

5 Démontrer que pour toutes parties A, B et C d'un même ensemble E :

$$(A \cap B \subset A \cap C) \text{ et } (A \cup B \subset A \cup C) \implies B \subset C$$

6 Démontrer que pour toutes parties A, B et C d'un même ensemble E :

$$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C$$

7 Soit E un ensemble, et A, B, C trois parties de E. Démontrer que :

$$A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$$

Applications

8* Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective d'un ensemble E dans l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$.

Indication : Penser à la partie $A = \{x \in E\ ,\ x \notin f(x)\}$.

9 Soit E, F, G, H quatre ensembles et $f \in F^E$, $g \in G^F$, $h \in H^G$ trois applications. Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h le sont aussi.

10 Soit E, F, G trois ensembles et $f \in F^E$, $g \in G^F$ deux applications.

1) Démontrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

2) Démontrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

11* Soit E, F, G, H quatre ensembles tels que H possède au moins deux éléments, et f une application de

F dans G. Montrer que :

$$f \text{ injective} \iff \forall (g,h) \in (F^E)^2 \quad (f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$$

$$f \text{ surjective} \iff \forall (j,k) \in (H^G)^2 \quad (j \circ f = k \circ f \Rightarrow j = k)$$

12 Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit B et B' deux parties de F.

1) Démontrer que :

$$B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$$

2) En déduire que :

$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

3) Démontrer que :

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

4) Démontrer que :

$$f^{-1}(\complement_F B) = \complement_E f^{-1}(B)$$

13 Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A et A' deux parties de E.

1) Démontrer que :

$$A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$$

2) En déduire que :

$$f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$

La réciproque est-elle vraie ?

3) Démontrer que :

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$$

4) Peut-on comparer :

$$f(\complement_E A) \quad \text{avec} \quad \complement_F f(A) \text{ ?}$$

Relations d'ordre

14 Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs O, O' et de rayons respectifs R, R'. On dit que $\mathcal{C}$ est intérieur à $\mathcal{C}'$ si $OO' \leqslant R' - R$.

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre dans l'ensemble des cercles du plan.

15 On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \quad p\mathcal{R}q \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = q$$

1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

2) La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

16 Soit E et F deux ensembles ordonnés, et f une application de E dans F.

1) Montrer que si f est croissante et injective, elle est strictement croissante.

2) Montrer que si f est strictement croissante et que l'ordre de E est total, f est injective.

Donner un contre-exemple dans le cas où l'ordre de E est partiel.

9

Nombres entiers naturels Combinatoire

INTRODUCTION

Le plus simple des ensembles de nombres est l'ensemble des entiers naturels. C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932) *que l'on doit la première axiomatisation de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *en* 1889. *L'une des principales conséquences de ces axiomes est le théorème de récurrence, très utile dans la pratique. Les entiers naturels nous permettront aussi d'étudier les ensembles finis et de traiter les problèmes de dénombrement les concernant.*

OBJECTIFS

- Maîtrise du raisonnement par récurrence.
- Dénombrement des ensembles finis.

1 Ensemble $\mathbb{N}$. Récurrence

1.1 • Propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$

Nous admettrons l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$, non vide, totalement ordonné, vérifiant les propriétés suivantes :

$\mathbb{N}1$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

$\mathbb{N}2$: toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément.

$\mathbb{N}3$: $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

1.2 • Conséquences

Les propriétés suivantes s'en déduisent immédiatement :

- $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, noté 0.
- $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ a un plus petit élément, noté 1, etc.
  On peut ainsi nommer les entiers naturels successifs.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $\{p \in \mathbb{N},\ p > n\}$ a un plus petit élément appelé successeur de n, et noté $n + 1$.
  On a ainsi l'amorce de l'addition de $\mathbb{N}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la partie $\{p \in \mathbb{N},\ p < n\}$ a un plus grand élément appelé prédécesseur de n, et noté $n - 1$.

1.3 • Récurrence

Théorème 1 (théorème de récurrence)
Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n.

S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

1) $P(n_0)$ est vraie ;

2) $\forall n \geqslant n_0, \quad \big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)$,

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Démonstration
Soit F l'ensemble des entiers $n \geqslant n_0$ tels que $P(n)$ soit faux.
Il faut montrer que cet ensemble est vide.
Supposons que $F \neq \varnothing$. Alors F a un plus petit élément n_1 ; donc $n_1 \geqslant n_0$ et $P(n_1)$ est faux.
D'après **1)**, $n_1 \neq n_0$, donc $n_1 > n_0$, et $n_1 - 1 \geqslant n_0$.
Comme $n_1 = \min F$, $n_1 - 1 \notin F$, donc $P(n_1 - 1)$ est vraie, ce qui contredit l'implication $P(n_1 - 1) \Rightarrow P(n_1)$.
En définitive, $F = \varnothing$; donc $\forall n \geqslant n_0 \quad P(n)$ est vraie.

APPLICATION 1

Démontrer que $\forall n \geqslant 4, \quad n^2 \leqslant 2^n$.

1) La propriété est vérifiée pour $n = 4$, car $4^2 = 2^4 = 16$.

2) Soit $n \geqslant 4$ tel que $n^2 \leqslant 2^n$.

En multipliant par 2 les deux membres, on en déduit : $2n^2 \leqslant 2^{n+1}$.

Comparons $(n+1)^2$ et $2n^2$: $(n+1)^2 - 2n^2 = -n^2 + 2n + 1$.
Ce trinôme admet pour racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$; il est positif entre les racines, c'est-à-dire pour les entiers 0, 1, 2 et négatif au delà, c'est-à-dire pour tout entier supérieur ou égal à 3.

Ici $n \geqslant 4$, donc $(n+1)^2 \leqslant 2n^2 \leqslant 2^{n+1}$: la proposition est vérifiée pour $n+1$.
Le théorème de récurrence permet de conclure que $\forall n \geqslant 4 \quad n^2 \leqslant 2^n$.

Cet exemple est instructif, car la proposition $P(2)$ est vraie, mais on ne peut pas choisir $n_0 = 2$, car l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ n'est pas vraie pour $n = 2$. On ne peut pas non plus choisir $n_0 = 3$, car $P(3)$ est fausse... Le premier entier qui satisfait les deux hypothèses du théorème est donc $n_0 = 4$.

Pour s'entraîner : ex. 2 à 4

Dans certains cas, il peut être nécessaire de regrouper dans l'hypothèse de récurrence plusieurs niveaux successifs de la proposition P ; par exemple $(P(n)$ et $P(n+1))$. Il faut alors démontrer que :

1) $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies ;

2) $\forall n \geqslant n_0 \quad \big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)$;

pour conclure que $\forall n \geqslant n_0, \quad P(n)$ est vraie.

Pour s'entraîner : ex. 5

On peut même regrouper dans l'hypothèse de récurrence tous les niveaux jusqu'à n (récurrence forte). Il faut alors démontrer que :

1) $P(n_0)$ est vraie ;

2) $\forall n \geqslant n_0 \quad \big(\forall p \in [\![n_0, n]\!] \ P(p)\big) \Rightarrow P(n+1)$;

pour conclure que $\forall n \geqslant n_0, \quad P(n)$ est vraie.

APPLICATION 2

Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ *peut s'écrire de façon unique sous la forme :* $n = 2^p(2q+1)$, *où* $(p, q) \in \mathbb{N}$.

1) $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$; la proposition est vérifiée pour $n = 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que **tout entier de 1 à** $\boldsymbol{n}$ puisse s'écrire de la façon indiquée.

a) Si $n+1$ est impair :

$$\exists q \in \mathbb{N} \quad n+1 = 2^0(2q+1)$$

b) Si $n+1$ est pair, $\dfrac{n+1}{2}$ est un entier compris entre 1 et n ; il vérifie l'hypothèse de récurrence :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \frac{n+1}{2} = 2^p(2q+1)$$

d'où :

$$n+1 = 2^{p+1}(2q+1).$$

La proposition est encore vérifiée pour $n+1$.

L'existence de la décomposition est donc établie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons l'unicité :

Supposons que $n = 2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$.

Si $p \geqslant p'$, $2^{p-p'}(2q+1) = 2q'+1$. Le second membre étant impair, le premier doit l'être aussi ; d'où $p = p'$. Il reste $2q+1 = 2q'+1$; d'où $q = q'$.

Remarque *: On vient de mettre en évidence une bijection de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}^2$.

1.4 • Suites définies par récurrence

Soit E un ensemble quelconque. On appelle **suite** d'éléments de E une application de $\mathbb{N}$ (ou parfois d'une partie de $\mathbb{N}$) dans E. L'image de l'entier n est noté u_n. La suite tout entière est notée (u_n) (ne pas oublier les parenthèses).

Une suite peut être définie par son premier terme, par exemple u_0, et une relation donnant chaque terme en fonction du précédent : $u_{n+1} = f(u_n)$. Le théorème de récurrence permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une suite vérifiant ces conditions ; on dit que la suite est définie par récurrence, ou que c'est une suite récurrente.

Exemples :

La somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ est définie par $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. Par exemple $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

De même, le produit $P_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$ est défini par $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$P_{n+1} = P_n \times u_{n+1}$. Par exemple : $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

La notation i n'est qu'un intermédiaire permettant de décrire la somme ou le produit ; elle n'apparaît pas dans le résultat. On dit que c'est une variable muette. $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{j=1}^{n} u_j$ représentent exactement la même chose.

APPLICATION 3

Changement d'indice dans une somme

Simplifier l'expression : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} \right)$.

On peut séparer la somme en deux termes :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1}$$

Dans le second terme, effectuons le changement d'indice $q = p+1$:

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{q=2}^{n+1} \frac{1}{q}$$

D'après la remarque ci-dessus, on ne change rien en redonnant le nom p à l'indice servant à décrire la deuxième somme :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}$$

Tous les termes d'indice p compris entre 2 et n s'éliminent ; il reste :

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Avec un peu d'habitude, on pourra effectuer ce changement d'indice sans modifier son nom ; on dira qu'on « change p en $p+1$ ».

1.5 • Suites arithmétiques et géométriques

Dans ce paragraphe, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On généralisera plus tard à d'autres ensembles dans lesquels on peut définir une addition et une multiplication.

On appelle **suite arithmétique** une suite définie par son premier terme et la relation : $u_{n+1} = u_n + r$ (r est appelé raison de la suite). On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + nr$.

Toujours par récurrence, on montre que la somme des termes d'une suite arithmétique finie est égale au nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

On appelle **suite géométrique** une suite définie par son premier terme et la relation : $u_{n+1} = u_n\, q$ (q est appelé raison de la suite). On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0\, q^n$.

On peut calculer également la somme des termes d'une suite géométrique finie :

$$\begin{cases} \text{Si } q = 1 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = n\, u_1 \\ \text{Si } q \neq 1 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - q} \end{cases}$$

À RETENIR

« Le premier qui y est, moins le premier qui n'y est pas, divisé par un moins la raison. »

2 Ensembles finis

2.1 • Intervalles de $\mathbb{N}$

Convenons de noter $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n : $[\![1, n]\!] = \{p \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p \leqslant n\}$.
(Par convention, on notera : $[\![1, 0]\!] = \varnothing$.)

Lemme 2.1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![1, n]\!]$.
Il existe une bijection de $[\![1, n]\!] \setminus \{a\}$ dans $[\![1, n-1]\!]$.

Démonstration
Si $n = 1$, $[\![1, n]\!] \setminus \{a\} = \varnothing = [\![1, n-1]\!]$.
Or il existe une application unique de $\varnothing$ dans $\varnothing$, et celle-ci est bijective.
Si $n > 1$, l'application f de $[\![1, n]\!] \setminus \{a\}$ dans $[\![1, n-1]\!]$ définie par :

$$\forall x \in [\![1, n]\!] \setminus \{a\} \quad \begin{cases} \text{si } x < a, & f(x) = x \\ \text{si } x > a, & f(x) = x - 1 \end{cases} \quad \text{est bien bijective.}$$

Théorème 2

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$.

1) Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ $\iff$ $p \leqslant n$.

2) Il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ $\iff$ $p \geqslant n$.

3) Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ $\iff$ $p = n$.

4) Si $n > 0$, toute injection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même est bijective.

5) Toute surjection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même est bijective.

Cette démonstration est hors programme. Le résultat pourra être admis.

Démonstration

1) Si $p \leqslant n$, $[\![1, p]\!] \subset [\![1, n]\!]$ et l'injection canonique de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ convient.

Réciproquement, démontrons que, s'il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, alors $p \leqslant n$. Procédons par récurrence sur p :

a) Si $p = 0$, toute application de $\varnothing$ dans $[\![1, n]\!]$ est évidemment injective.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que la proposition soit vraie (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et soit f une injection de $[\![1, p+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

$f(p+1)$ n'ayant pas d'autre antécédent que $p+1$, la restriction de f à $[\![1, p]\!]$ est une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \backslash \{f(p+1)\}$.

En composant par la bijection donnée par le *lemme* **2.1**, on obtient une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit $p \leqslant n-1$, ce qui équivaut à $p+1 \leqslant n$. La proposition est vérifiée au rang $p+1$.

c) Cette proposition est donc vraie quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$.

2) Rappelons que l'existence d'une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ équivaut à celle d'une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ (*chap.* 8, *Application* 2), d'où le résultat.

3) Conséquence immédiate des points **1)** et **2)**.

4) Soit f une injection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Supposons que f ne soit pas surjective. Il existerait un élément $y \in [\![1, n]\!]$ qui n'aurait pas d'antécédent par f. L'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \rightarrow & [\![1, n]\!] \backslash \{y\} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

serait encore injective. En composant avec la bijection donnée par le *lemme* **2.1**, on obtiendrait une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$, ce qui est impossible d'après **1)**. Par conséquent, f est surjective, donc bijective.

5) Soit f une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Supposons que f ne soit pas injective. Il existerait deux éléments distincts x et x' qui auraient la même image (ce qui suppose que $n \geqslant 2$). La restriction de f à $[\![1, n]\!] \backslash \{x'\}$ serait encore surjective. En composant avec la réciproque de la bijection donnée par le *lemme* **2.1**, on obtiendrait une surjection de $[\![1, n-1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, ce qui est impossible d'après **2)**. Par conséquent, f est injective, donc bijective.

2.2 • Cardinal d'un ensemble fini

Un ensemble E est dit fini, s'il existe un entier naturel n et une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E.

On peut déduire du *théorème* **2** que cet entier n est unique : on l'appelle cardinal de E et on le note $\operatorname{Card} E$. En particulier, $\operatorname{Card} \varnothing = 0$.

Exemples : **1)** $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ est bijective, donc $[\![1,n]\!]$ est fini et son cardinal est n.

2) Si m et n sont deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$, montrer que l'ensemble $[\![m,n]\!] = \{p \in \mathbb{N}\ ,\ m \leqslant p \leqslant n\}$ est fini et trouver son cardinal.

3) Montrer que toute partie I de $[\![1,n]\!]$ est finie, et que son cardinal est inférieur ou égal à n. (Si I n'est pas vide, il a un plus petit élément que l'on peut appeler $f(1)$; continuer...)

Le *théorème* **2** s'étend aux ensembles finis :

Corollaire 2.1

Soit E et F deux ensembles finis.

1) Il existe une injection de E dans F $\iff$ $\mathrm{Card}\, E \leqslant \mathrm{Card}\, F$.

2) Il existe une surjection de E dans F $\iff$ $\mathrm{Card}\, E \geqslant \mathrm{Card}\, F$.

3) Il existe une bijection de E dans F $\iff$ $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$.

4) Si $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F \neq 0$, toute injection de E dans F est bijective.

5) Si $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$, toute surjection de E dans F est bijective.

Pour s'entraîner : ex. 6

APPLICATION 4

Principe des tiroirs

Une application d'un ensemble fini dans un autre dont le cardinal est strictement inférieur au premier ne peut pas être injective : il existe donc nécessairement deux éléments qui ont la même image. C'est ce qu'on appelle familièrement le principe des tiroirs *: si on range p objets dans n tiroirs et que $n < p$, il existe au moins deux objets qui sont dans le même tiroir... Sous son air d'évidence, ce principe permet de démontrer des propriétés qui ne le sont pas toujours.*

Premier exemple : Deux pays sont dits voisins s'ils ont une frontière commune. Démontrer qu'il existe nécessairement deux pays qui ont le même nombre de voisins.

Soit n le nombre total de pays. Le nombre de voisins d'un pays varie de 0 à $n-1$. Mais, s'il existe un pays sans voisin (une île), alors aucun pays n'a $n-1$ voisins. Par conséquent, le nombre de voisins d'un pays ne peut prendre au plus que $n-1$ valeurs. L'application qui, à un pays, associe son nombre de voisins n'est donc pas injective.

Second exemple : Soit E un ensemble de 10 nombres entiers distincts compris entre 1 et 100. Démontrer qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de trouver deux sous-ensembles distincts non vides de même somme ; en leur retranchant leur intersection, il restera deux sous-ensembles **disjoints** de même somme, qui ne sauraient être vides.

Le nombre de sous-ensembles non vides de E est $2^{10} - 1 = 1023$. La somme des éléments d'un tel sous-ensemble est au moins égale à 1, et, au plus, égale à $91 + 92 + \cdots + 100 = 955$. Il y a donc plus de sous-ensembles non vides que de sommes possibles.

Ce paragraphe est hors programme. Il est donné à titre documentaire.

ATTENTION

Pour les ensembles infinis, les points **4)** et **5)** du corollaire **2.1** ne sont plus vérifiés : il peut exister une application d'un ensemble infini dans lui-même qui soit injective sans être surjective, et réciproquement.

Exemple :

L'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}\right.$ est injective, mais pas surjective. Une inverse à gauche de cette application (en imaginer une) est surjective, mais pas injective.

2.3 • Notions sur les cardinaux des ensembles infinis

Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini. Le mathématicien allemand Georg Cantor a eu l'idée d'étendre aux ensembles infinis les définitions précédentes, et de continuer à dire que, pour tous ensembles E et F :

- Card $E =$ Card F, s'il existe une bijection de E dans F.

Exemple : Si P est l'ensemble des entiers naturels pairs,

Card $P =$ Card $\mathbb{N}$, car l'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & P \\ n & \mapsto & 2n \end{array}\right.$ est bijective ($\mathbb{N}$ a le même cardinal qu'une de ses parties strictes, ce qui serait impossible pour un ensemble fini...).

- Card $E \leqslant$ Card F, s'il existe une injection de E dans F.

Exemple : Card $\mathbb{N} \leqslant$ Card $\mathbb{R}$ (penser à l'injection canonique de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$).

Cantor démontra les résultats suivants :

- Card $\mathbb{N} =$ Card $\mathbb{Z} =$ Card $\mathbb{Q}$ (ensembles *dénombrables*) ;
- Card $\mathbb{R} =$ Card $\mathbb{C} =$ Card $\mathbb{R}^n$ (ensembles ayant *la puissance du continu*), mais que Card $\mathbb{N} \neq$ Card $\mathbb{R}$.

3 Dénombrement

Voyons concrètement comment calculer le cardinal d'un ensemble construit sur des ensembles finis donnés.

3.1 • Partie d'un ensemble fini

Théorème 3

Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et Card $A \leqslant$ Card E.

Démonstration

Soit $n =$ Card E. Il existe une bijection f de $[\![1, n]\!]$ dans E. La partie A est l'image par cette bijection d'une partie I de $[\![1, n]\!]$ qui est finie, de cardinal $p \leqslant n$ (*cf.* exemples d'ensembles finis). Il existe donc une bijection de I dans A, ce qui prouve que A est finie et Card $A =$ Card $I = p \leqslant n$.

3.2 • Réunion disjointe

Théorème 4

Si E et F sont deux ensembles finis disjoints ($E \cap F = \varnothing$), $E \cup F$ est fini et Card $(E \cup F) =$ Card $E +$ Card F.

En particulier, si $A \in \mathcal{P}(E)$, $\text{Card } \complement_E A = \text{Card } E - \text{Card } A$.

Démonstration

Soit $n = \text{Card } E$ et $p = \text{Card } F$. Il existe une bijection f de E dans $[\![1, n]\!]$ et une bijection g de F dans $[\![n+1, n+p]\!]$. Soit h l'application de $E \cup F$ dans $[\![1, n+p]\!]$ qui, à tout élément x de $E \cup F$, associe $f(x)$ si $x \in E$, et $g(x)$ si $x \in F$. h est bijective, car $E \cap F = \varnothing$. Donc $E \cup F$ est fini et $\text{Card } (E \cup F) = n + p$.

3.3 • Réunion quelconque

En ajoutant Card E et Card F, on compte deux fois les éléments de $E \cap F$. C'est pourquoi il faut retrancher le cardinal de cette intersection. Dans une situation concrète de dénombrement, on peut compter plusieurs fois les mêmes objets, à condition d'en être conscient et de les retrancher autant de fois qu'il le faut dans le résultat final.

Théorème 5

Quels que soient les ensembles finis E et F : $E \cup F$ est fini et :

$$\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F - \text{Card } (E \cap F)$$

Démonstration

$E \cup F = E \cup (F \backslash E)$ et $E \cap (F \backslash E) = \varnothing$, d'où $E \cup F$ est fini et :

$$\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } (E) + \text{Card } (F \backslash E)$$

Par ailleurs, $F \backslash E = \complement_F E \cap F$; donc $\text{Card } (F \backslash E) = \text{Card } F - \text{Card } (E \cap F)$.
En définitive, $\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F - \text{Card } (E \cap F)$.

Pour s'entraîner : ex. 7

3.4 • Produit cartésien

Théorème 6

Si E et F sont deux ensembles finis, $E \times F$ est fini et :

$$\text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F$$

Démonstration

Soit $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$;
$E \times F = (\{e_1\} \times F) \cup (\{e_2\} \times F) \cup \cdots \cup (\{e_p\} \times F)$.
Il s'agit d'une réunion disjointe, donc $E \times F$ est fini et :

$$\text{Card } (E \times F) = \sum_{i=1}^{p} \text{Card } (\{e_i\} \times F)$$

Chacun de ces ensembles est en bijection avec F, donc $\text{Card } (\{e_i\} \times F) = \text{Card } F$.
En définitive, $\text{Card } (E \times F) = p \text{ Card } F = \text{Card } E \times \text{Card } F$.

EXEMPLE

Combien peut-on écrire de mots de trois lettres ?
Il s'agit de 3-listes d'éléments de l'alphabet, qui possède 26 éléments ; d'où $26^3 = 17\,576$ mots distincts.

Plus généralement, $\text{Card } (F^n) = (\text{Card } F)^n$. C'est le nombre de n-*listes* d'éléments de F. On utilise les n-listes dans tous les problèmes de choix successifs de n éléments d'un ensemble, avec d'éventuelles répétitions.

3.5 • Applications

Théorème 7

Si E et F sont deux ensembles finis, F^E est fini et :

$$\text{Card } (F^E) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}$$

Démonstration

Soit $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$.

L'application $\left| \begin{array}{ccc} F^E & \to & F^p \\ f & \mapsto & (f(e_1), \cdots, f(e_p)) \end{array} \right.$ est bijective.

Donc F^E est fini et $\text{Card}\,(F^E) = \text{Card}\,(F^p) = (\text{Card}\,F)^p = (\text{Card}\,F)^{\text{Card}\,E}$.

3.6 • Injections

Théorème 8

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs :

$$\text{Card}\,E = p \quad \text{et} \quad \text{Card}\,F = n, \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant p \leqslant n$$

Le nombre d'injections de E dans F est l'entier :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On rappelle que $n!$ (lire factorielle n) désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
Par convention $0! = 1$.

Démonstration

Raisonnons par récurrence sur p :

- pour $p = 0$, il existe une injection de $\varnothing$ dans F : $A_n^0 = 1 = \dfrac{n!}{(n-0)!}$;
- soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans F soit A_n^p. Soit E un ensemble de cardinal $p+1$, et $a \in E$.

Une injection f de E dans F est caractérisée par :
– la restriction injective de f à $E \backslash \{a\}$: A_n^p possibilités ;
– le choix de l'élément $f(a)$ qui ne doit pas appartenir à $f(E)$: $n-p$ possibilités.

Le nombre d'injections de E dans F est donc :

$$A_n^p\,(n-p) = \frac{n!}{(n-p)!}(n-p) = \frac{n!}{(n-p-1)!} = A_n^{p+1}$$

Par récurrence, le nombre d'injections de E dans F est donc bien A_n^p pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

EXEMPLE

Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre pour dix chevaux au départ ?
Il s'agit d'arrangements de trois chevaux parmi dix : $10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés dans l'ordre.

Une injection de $[\![1, p]\!]$ dans F est appelée arrangement de p éléments de F. C'est une p-liste d'éléments de F distincts deux à deux. On utilise les arrangements dans tous les problèmes de choix successifs de p éléments parmi n, sans répétition.

Corollaire 8.1

Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de bijections de E dans E est $n!$.

Démonstration

Comme E est fini, il est équivalent de dire qu'une application de E dans E est injective ou bijective ; le nombre de bijections de E dans E est donc $A_n^n = n!$.

EXEMPLE
De combien de façons dix convives peuvent-ils se placer autour d'une table ? $10! = 3\,628\,800$.

Une bijection de E dans E est appelée permutation des éléments de E. On utilise les permutations dans tous les problèmes de choix d'un ordre de tous les éléments d'un ensemble fini.

3.7 • Parties d'un ensemble fini

Théorème 9
Si E est un ensemble fini de cardinal n, $\quad \text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^n$

Démonstration
Effectuons une récurrence sur n.
Pour $n = 0$, $E = \varnothing$ et $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$; $\text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 1 = 2^0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout ensemble E de cardinal n, $\text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^n$.
Considérons un ensemble F de cardinal $n+1$, et a un élément fixé de F.
L'ensemble $E = F \setminus \{a\}$ a pour cardinal n, il a donc 2^n parties.

- Les parties de F ne contenant pas a sont exactement les parties de E : il y en a 2^n.
- Les parties de F contenant a sont les réunions d'une partie de E et du singleton $\{a\}$: il y en a aussi 2^n.

Le nombre total de parties de F est donc 2×2^n, c'est-à-dire 2^{n+1}.
Par récurrence, tout ensemble de cardinal n possède 2^n parties.

Plus précisément, étudions le nombre de parties de E de cardinal fixé :

Théorème 10
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de E de cardinal p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ est l'entier :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On peut le noter aussi C_n^p.

Démonstration
À une injection f de $[\![1,p]\!]$ dans E correspond une image $f([\![1,p]\!])$, qui est une partie de E de cardinal p. Réciproquement, toute partie de E de cardinal p est l'image de $[\![1,p]\!]$ par $p!$ injections distinctes (correspondant aux permutations de $[\![1,p]\!]$).

Le nombre de parties de cardinal p est donc $\dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

EXEMPLE
On tire 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
Il s'agit de combinaisons de 5 éléments parmi 32 :
il y a $\binom{32}{5} = 201\,376$ possibilités.

Une partie de cardinal p d'un ensemble E est appelée combinaison de p éléments de E. On utilise les combinaisons dans tous les problèmes de choix simultanés de p éléments distincts parmi n, sans considération d'ordre et sans répétition.

APPLICATION 5

Méthodes de dénombrement

Pour dénombrer un ensemble fini, il faut parfaitement identifier ce qu'est un élément de cet ensemble, c'est-à-dire connaître les spécificités de cet élément précis pour le sélectionner. On peut alors :

– *soit compter tous les éléments une fois et une seule, par exemple en s'aidant d'un arbre de sélection ;*

– *soit compter des configurations où chaque élément apparaît p fois, puis diviser le résultat obtenu par p.*

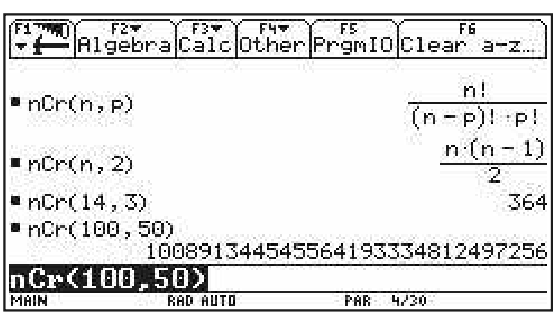
Exemple : On dispose de six couleurs pour peindre les faces d'un cube de couleurs différentes.
Combien peut-on réaliser de cubes distincts ?

– 1^re méthode :
Posons le cube horizontalement sur une table. On peut toujours peindre la face supérieure de la couleur n° 1. Il y a alors 5 choix possibles pour la face opposée. Supposons que l'on choisisse pour celle-ci la couleur n° 2 ; on peut peindre la face antérieure de la couleur n° 3. Il reste $3!$ façons de peindre les 3 faces restantes. Il y a donc au total $5 \times 3! = 30$ façons de peindre le cube.

– 2^e méthode :
Il existe $6!$ bijections de l'ensemble des 6 couleurs dans l'ensemble des 6 faces du cube. Mais plusieurs de ces bijections correspondent au même résultat à un déplacement près. Combien y a-t-il de façons de placer un cube peint sur notre table ? On peut choisir de 6 façons la face supérieure, puis de 4 façons la face antérieure, soit 24 positions. Le nombre de cubes distincts est donc : $6!/24 = 30$.

Pour s'entraîner : ex. 9 à 13

4 Coefficients binomiaux



Obtention de **coefficients binomiaux** avec la calculatrice, à l'aide de la fonction `nCr` du menu `MATH/Probability`.

Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés coefficients binomiaux (*cf. Formule du binôme*, § 5). Ils peuvent être notés également C_n^p.

4.1 • Propriétés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$:

- $\binom{n}{0} = 1$ (une seule partie vide) ;
- $\binom{n}{n} = 1$ (une seule partie de même cardinal que l'ensemble) ;
- $\binom{n}{1} = n$ (n singletons) ;
- **symétrie** : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (le complémentaire d'une partie de cardinal p est une partie de cardinal $n - p$) ;

- **somme :** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$ (nombre total de parties) ;
- **relation de Pascal :** $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ $(n \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1)$.

Démonstration

Soit E un ensemble de cardinal n et a un élément fixé de E. Les parties de E de cardinal p sont :

– les parties de $E \backslash \{a\}$ de cardinal p, au nombre de $\binom{n-1}{p}$;

– les parties de $E \backslash \{a\}$ de cardinal $p-1$ auxquelles on ajoute a, au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$.

4.2 • Triangle de Pascal

Les propriétés précédentes permettent de construire, de proche en proche, la table des coefficients binomiaux, appelée triangle de Pascal.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Blaise Pascal, 1623-1662, philosophe et mathématicien français, fondateur du calcul des probabilités.

5 Formule du binôme

Cette formule sera étendue à deux éléments a et b d'un anneau, à condition qu'ils commutent $(ab = ba)$.

Théorème 11

Soit a et b deux réels (ou deux complexes) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p$$

Démonstration

Raisonnons par récurrence sur n :

- pour $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$;
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p$.

On a alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p + b\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p+1}b^p + \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^{p+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p+1}b^p + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}a^{n-p}b^{p+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p+1}b^p + \sum_{q=1}^{n}\binom{n}{q-1}a^{n-q+1}b^q + b^{n+1}$$

(en posant $q = p+1$ dans le 3^e terme)

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\right)a^{n-p+1}b^p + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=1}^{n}\binom{n+1}{p}a^{n-p+1}b^p + b^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}a^{n+1-p}b^p.$$

APPLICATION 6

Trois modes de démonstration pour les formules de combinatoire

Les formules mettant en jeu des coefficients binomiaux peuvent être démontrées d'au moins trois façons :
– par récurrence ;
– par un raisonnement de dénombrement ;
– en utilisant la formule du binôme.

Exemple : Démontrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $p \leqslant n$:

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

1) Par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$ (ce qui implique $p = 0$), on a bien $\binom{0}{0} = \binom{1}{1}$.
- Soit n un entier vérifiant la relation quel que soit $p \leqslant n$.

– Pour tout $p \leqslant n$:

$$\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

– Pour $p = n+1$, on a aussi :

$$\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+2}{p+1}$$

La relation est vérifiée pour $n+1$, quel que soit $p \leqslant n+1$.
Par récurrence, elle est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \leqslant n$.

2) Dénombrement

Dénombrons les parties à $p+1$ éléments de l'intervalle $[\![0, n]\!]$. Si k est le plus grand élément d'une telle partie (k varie de p à n), il reste à choisir p éléments dans l'intervalle $[\![0, k-1]\!]$. Le nombre total de ces parties est donc :

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$$

3) À l'aide de la formule du binôme

La factorisation du polynôme $X^{n+1} - 1$ nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1+x)^{n+1} - 1 = x\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k$$

En identifiant les coefficients des termes en x^{p+1}, on obtient :

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$$

Pour s'entraîner : ex. 14 à 19

MÉTHODE

Pour montrer une proposition $P(n)$ par récurrence pour $n \geqslant n_0$, on peut :

- démontrer la proposition $P(n_0)$ et l'implication :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \big(P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)\big)$$

(cf. Application 1 *et exercices* 2 *à* 4) ;

- démontrer les propositions $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, et l'implication :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \big[\big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \;\Rightarrow\; P(n+2)\big]$$

(cf. exercice 5) ;

- démontrer la proposition $P(n_0)$ et l'implication :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \big[\big(\forall p \in [\![n_0, n]\!]\ P(p)\big) \;\Rightarrow\; P(n+1)\big]$$

(cf. Application 2) .

Pour montrer l'existence de deux éléments distincts de E ayant la même image par une application f de E dans F , il suffit de montrer que :

$$\text{Card }(E) > \text{Card } F$$

(cf. Application 4 *et exercice* 8) .

Pour dénombrer un ensemble fini, on peut :

- soit compter tous les éléments une fois et une seule ;
- soit compter chaque élément p fois, puis diviser le résultat par p

(cf. Application 5 *et exercices* 9 *à* 13) .

Pour démontrer une formule de combinatoire, on peut :

- effectuer une récurrence ;
- interpréter la formule en termes de dénombrement ;
- utiliser la formule du binôme *(cf. Application* 6 *et exercices* 15 *à* 19) .

Exercice résolu

DÉNOMBREMENT DES SURJECTIONS

On se propose de chercher le nombre S_n^p *de surjections de* $[\![1,n]\!]$ *sur* $[\![1,p]\!]$*, où* $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$.

1 *Calculer* S_n^p *pour* $p > n$. *Calculer* S_n^n ; S_n^1 ; S_n^2.

2 *Calculer* S_{p+1}^p.

3 *En considérant la restriction à* $[\![1,n-1]\!]$ *d'une surjection de* $[\![1,n]\!]$ *dans* $[\![1,p]\!]$*, montrer que :*

$$\forall n > 1 \quad \forall p > 1 \qquad S_n^p = p\,(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1})$$

4 *Construire une table des* S_n^p *pour* $1 \leqslant n \leqslant 7$ *et* $1 \leqslant p \leqslant 7$.

Conseils

Faire des schémas.

Préciser ce qu'il faut connaître pour spécifier une surjection précise.

Appliquer la formule de proche en proche. Vérifier les valeurs données.

Solution

1) Si $p > n$, il n'existe pas de surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$: $S_n^p = 0$.

- Si $p = n$, les surjections $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ sont les bijections : $S_n^n = n!$.
- Si $p = 1$, il existe une seule application de $[\![1,n]\!]$ dans $\{1\}$, et elle est surjective : $S_n^1 = 1$.
- Si $p = 2$, seules les deux applications constantes ne sont pas surjectives : $S_n^2 = 2^n - 2$.

2) Si $n = p+1$, un unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents, et tous les autres en ont un seul. On peut caractériser une surjection par le choix de cet élément, de ses deux antécédents, et d'une permutation des $(p-1)$ éléments restants :

$$S_{p+1}^p = p\binom{p+1}{2}(p-1)! = \frac{p(p+1)!}{2}$$

3) Soit s une surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$. L'élément $i = s(n)$ peut être choisi de p façons. Soit s' la restriction de s à $[\![1,n-1]\!]$.

- Si s' atteint i, c'est une surjection de $[\![1,n-1]\!]$ sur $[\![1,p]\!]$: il y a S_{n-1}^p possibilités.
- Si s' n'atteint pas i, elle définit une surjection de $[\![1,n-1]\!]$ sur $[\![1,p]\!]\backslash\{i\}$: il y a S_{n-1}^{p-1} possibilités.

$$\text{D'où} \quad S_n^p = p\left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1}\right)$$

4) À l'aide de cette formule de récurrence, compléter la table suivante :

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	2					
3	1		6				
4	1			24			
5	1				120		
6	1					720	
7	1			8400			5040

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une proposition P telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Il n'existe aucune injection d'un ensemble de cardinal 200 dans un ensemble de cardinal 100.

c) Toute application d'un ensemble de cardinal 100 dans un ensemble de cardinal 200 est injective.

d) Toute injection d'un ensemble dans lui-même est bijective.

e) Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis est la somme de leurs cardinaux.

f) Le cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis est le produit de leurs cardinaux.

g) A_n^p est le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.

h) $\binom{n}{p}$ est le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p.

i) La somme des termes de la n^{e} ligne du triangle de Pascal est 2^n.

j) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}(-2)^p = (-1)^n$.

Récurrence

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)! \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$.

4 Montrer que :

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

3) $\forall n \geqslant 2 \quad 2^{2^n} - 6$ est divisible par 10.

4) La somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.

5 La suite de Fibonacci est définie par :

$$u_0 = 1\ ,\ u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1) Calculer les dix premiers termes de cette suite.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Ensembles finis

6 Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Démontrer que, s'il existe une bijection de A dans E, alors $A = E$.

Ce résultat est-il vrai si E est infini ?

7 E, F, G étant trois ensembles finis, exprimer : Card $(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $F \cap G$, $E \cap G$ et $E \cap F \cap G$.

8 Le service de surveillance d'une centrale nucléaire dispose de n agents ; il y a en permanence une équipe de trois agents en service. Déterminer la valeur maximale de n pour que l'on puisse repérer une équipe quelconque par une suite de deux lettres, par exemple ZX, TT ou XZ...

Dénombrements

9 Combien peut-on écrire d'anagrammes des mots : MATHS ; MOTO ; DODO ; ANAGRAMME ?

10 Quelle est la probabilité que, dans votre classe, deux élèves au moins aient leur anniversaire le même jour ? À partir de quel effectif cette probabilité est-elle supérieure à 50 % ? à 90 % ?

11 Une classe comporte 30 élèves. De combien de façons peut-on constituer des trinômes de colle ?

Plus généralement, combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p ?

12 Démontrer, de plusieurs façons, que tout ensemble fini non vide possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

13 Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1) Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

2) Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = \varnothing$.

3) Déterminer le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $X \subset Y \subset Z$.

Coefficients binomiaux

14 **1)** Démontrer par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \; ; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

3) Retrouver ce résultat en utilisant des coefficients binômiaux.

15 **1)** Démontrer que, si $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

2) En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p}$.

3) Retrouver le résultat en dérivant $(1+x)^n$.

4) Calculer de même $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}$.

16 Démontrer que, si $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

en utilisant trois façons différentes :

1) à l'aide de l'expression des coefficients binômiaux ;

2) par un raisonnement de dénombrement ;

3) en développant $(a+b+c)^n$.

17 Démontrer que, si $0 \leqslant k \leqslant \min(n, p)$:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \binom{n+p}{k}$$

En déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

18 Calculer $(1+i)^{4n}$.

En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$.

19 n est un entier de la forme $3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$.
Montrer que :

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-3)^p \binom{2n}{2p+1} = 2^{2n-1}$$

Indication : Calculer $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2n}$, *avec* $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice posé aux oraux des concours

20 **(Mines 2006)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut former des mots avec un alphabet de n caractères, sans qu'un mot contienne deux fois la même lettre. Montrer que le nombre total de ces mots est : $M_n = [e\,n!] - 1$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x).
On supposera connu le résultat :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} < e < \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$$

Voir chapitre 16, Application 8.

10 Nombres entiers relatifs Arithmétique

INTRODUCTION

L'ensemble $\mathbb{N}$ étant connu, il est facile de construire l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est le champ d'application de l'arithmétique, c'est-à-dire des questions de divisibilité, P.G.C.D., P.P.C.M., éléments premiers entre eux, nombres premiers, etc. Nous verrons plus loin que ces notions s'étendent à l'anneau des polynômes.

L'étude de l'arithmétique remonte à Euclide. On y rencontre les noms de Pierre de Fermat, Leonhardt Euler, Karl Friedrich Gauss, Étienne Bézout, Jacques Hadamard, et c'est encore actuellement un domaine de recherche très actif.

OBJECTIFS

- Étude des propriétés de base de la divisibilité des nombres entiers.
- Acquisition des notions de P.G.C.D., d'entiers premiers entre eux et de nombres premiers.

1 Multiples et diviseurs d'un entier

1.1 • Définitions

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$; s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = nb$, on dit que :

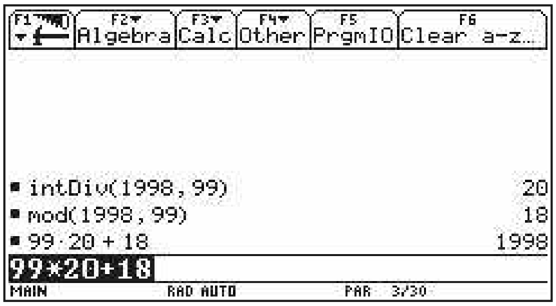
- a est un multiple de b.
- b est un diviseur de a (ou « b divise a », notation : $b|a$).

L'ensemble des multiples de b est noté $b\mathbb{Z}$. Nous conviendrons de noter $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a.

1.2 • Propriétés

(Les démonstrations, très simples, sont laissées au lecteur.)

1) La somme de deux multiples de b est un multiple de b.
2) L'opposé d'un multiple de b est un multiple de b.
3) Tout multiple d'un multiple de b est un multiple de b.
4) Si b divise deux entiers, il divise leur somme.
5) Tout diviseur d'un diviseur de a est un diviseur de a.
6) 0 est un multiple de tout entier. Tout entier divise 0.
7) Si b divise a et a divise b, alors $a = \pm b$.
8) Restreintes à $\mathbb{N}$, les relations « divise » et « est multiple de » sont des relations d'ordre partiel.



Les fonctions `intDiv` et `mod` donnent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers.

2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $b \neq 0$.
Il existe un couple unique $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < |b|$$

q est appelé *quotient*, et r, *reste* de la division de a par b.

Démonstration

Existence : L'ensemble E des multiples de b inférieurs ou égaux à a est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ majorée par a. E possède donc un plus grand élément, que nous noterons bq. Posons $r = a - bq$.
$bq \leqslant a$, donc $r \geqslant 0$.
De plus, $bq + |b|$ est un multiple de b supérieur à bq ; donc $bq + |b| > a$, d'où $r < |b|$.

Unicité : Supposons $a = bq + r = bq' + r'$, avec $0 \leqslant r < |b|$ et $0 \leqslant r' < |b|$. On a $b(q - q') = r' - r$; $r' - r$ est donc un multiple de b. Comme il est strictement compris entre $-|b|$ et $|b|$, il ne peut être que nul. Donc $r' = r$ et, par suite, $q' = q$.
Le couple (q, r) est donc unique.

Pour s'entraîner : ex. 2 à 4

3 Diviseurs communs de deux entiers

3.1 • Algorithme d'Euclide

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Déterminons l'ensemble $D(a) \cap D(b)$ des diviseurs communs de a et b.

Euclide, mathématicien grec (IV^{e}-III^{e} s. av. J.-C.).

Théorème 2

L'ensemble des diviseurs communs de deux entiers a et b est l'ensemble des diviseurs d'un unique entier positif, appelé **P.G.C.D.** de a et b, noté $a \wedge b$.

$$D(a) \cap D(b) = D(a \wedge b)$$

Démonstration

Comme les éléments de $D(a) \cap D(b)$ ne dépendent pas du signe de a et b, on peut supposer, sans nuire à la généralité, que a et b sont positifs. De même, on peut supposer, quitte à les échanger, que $a \geqslant b$. On a donc $0 \leqslant b \leqslant a$.

– Si $b = 0$, les diviseurs communs de a et b sont ceux de a : $D(a) \cap D(0) = D(a)$.

– Si $b > 0$, effectuons la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$, avec $0 \leqslant r < b$.

Tout diviseur de a et b divise r. Tout diviseur de b et r divise a. On a donc l'égalité :

$$D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(r)$$

– Si $r = 0$, on a donc $D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(0) = D(b)$.

– Si $r > 0$, on divise b par r : $b = rq_1 + r_1$, avec $0 \leqslant r_1 < r$, et on a :

$$D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(r) = D(r) \cap D(r_1)$$

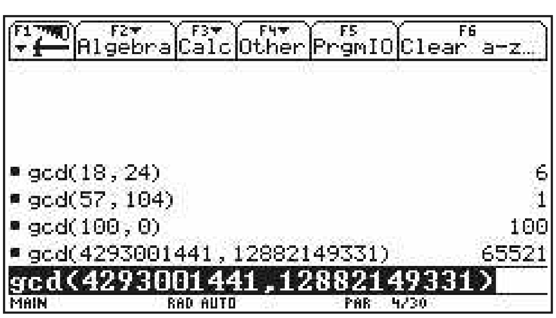
On peut poursuivre ce raisonnement tant que le reste obtenu est non nul :

$$D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(r) = D(r) \cap D(r_1) = D(r_1) \cap D(r_2) = \cdots = D(r_{k-1}) \cap D(r_k).$$

La suite $(b, r, r_1, r_2, \cdots, r_k)$ est une suite d'entiers naturels strictement décroissante : elle est nécessairement finie. On aboutit donc en un nombre fini d'étapes à un reste nul. Supposons que $r_k \neq 0$ et $r_{k+1} = 0$; on a alors :

$$D(a) \cap D(b) = \cdots = D(r_{k-1}) \cap D(r_k) = D(r_k) \cap D(0) = D(r_k)$$

r_k est un diviseur commun de a et b, et tout diviseur commun de a et b est un diviseur de r_k. C'est le plus grand commun diviseur de a et b.



La fonction gcd calcule le P.G.C.D. de deux entiers.

Le P.G.C.D. de deux entiers non nuls est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

Exemple : Calculer $162 \wedge 207$.

$207 = 1 \times 162 + 45$, donc $D(207) \cap D(162) = D(162) \cap D(45)$;
$162 = 3 \times 45 + 27$, donc $D(162) \cap D(45) = D(45) \cap D(27)$;
$45 = 1 \times 27 + 18$, donc $D(45) \cap D(27) = D(27) \cap D(18)$;
$27 = 1 \times 18 + 9$, donc $D(27) \cap D(18) = D(18) \cap D(9)$;
$18 = 2 \times 9 + 0$, donc $D(18) \cap D(9) = D(9) \cap D(0) = D(9)$;
d'où $162 \wedge 207 = 9$.

3.2 • Somme de multiples de deux entiers

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers qui peuvent se décomposer en somme d'un multiple de a et d'un multiple de b :

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \left\{x \in \mathbb{Z}\,, \quad \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = a\,u + b\,v\right\}$$

Théorème 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Un entier est la somme d'un multiple de a et d'un multiple de b si et seulement si c'est un multiple de leur P.G.C.D. $a \wedge b$:

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$$

Démonstration

Posons $d = a \wedge b$.

1) Soit x la somme d'un multiple de a et d'un multiple de b : $x = au + bv$. Comme d divise a et b, il divise x. x est donc un multiple de d.

2) Dans l'algorithme d'Euclide, $d = r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_k$, donc

$$d \in r_{k-2}\mathbb{Z} + r_{k-1}\mathbb{Z}.$$

De proche en proche, on arrive à $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. *A fortiori*, tout multiple de d appartient à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Exemple : À partir de l'exemple précédent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 9 &= 27 - 18 \\ &= 27 - (45 - 27) = -45 + 2\times 27 \\ &= -45 + 2(162 - 3\times 45) = 2\times 162 - 7\times 45 \\ &= 2\times 162 - 7(207 - 162) = -7\times 207 + 9\times 162. \end{aligned}$$

9 est bien la somme d'un multiple de 207 et d'un multiple de 162.

Pour s'entraîner : ex. 5 et 6

4 Entiers premiers entre eux

4.1 • Théorème de Bézout

Deux entiers a et b sont dits premiers entre eux, si leur P.G.C.D. est 1 : $a \wedge b = 1$. Leur seul diviseur commun positif est 1. Le théorème suivant permet de caractériser simplement deux entiers premiers entre eux.

Théorème 4 (théorème de Bézout)

Deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration

1) Si $a \wedge b = 1$, $1 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$: il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $1 = au + bv$.

2) Si $au + bv = 1$, 1 est **un multiple** de $a \wedge b$, qui ne peut donc être que 1.

Étienne Bézout, mathématicien français, (1730-1783), auteur d'une théorie générale des équations algébriques.

4.2 • Corollaires du théorème de Bézout

ATTENTION

En général, l'égalité $au + bv = d$ implique seulement que d est un multiple de $a \wedge b$.

Par exemple, $2 \times 6 - 1 \times 8 = 4$, mais 4 n'est pas le P.G.C.D. de 6 et 8.

C'est seulement lorsque $au + bv = 1$ que l'on peut affirmer que $1 = a \wedge b$.

Corollaire 4.1 (théorème de Gauss)

Si un entier divise un produit et qu'il est premier avec l'un des facteurs, il divise l'autre.

$$(\,a|bc \text{ et } a \wedge b = 1\,) \quad \Rightarrow \quad a|c$$

Démonstration

$\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $au + bv = 1$; d'où $auc + bvc = c$.
a divise auc et bvc, donc il divise c.

Karl Friedrich Gauss, mathématicien allemand (1777-1855). L'un des plus grands génies des mathématiques, il s'intéressa à l'arithmétique, aux nombres complexes, à la théorie des surfaces, aux géométries non euclidiennes ainsi qu'aux probabilités.

Corollaire 4.2

Si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, il est divisible par leur produit.

$$(\,a|c \;;\; b|c \;;\; a \wedge b = 1\,) \quad \Rightarrow \quad ab|c$$

Démonstration

$\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ $au + bv = 1$; d'où $auc + bvc = c$.
$c = ka = k'b$; d'où $aubk' + bvka = c$, c'est-à-dire $ab(uk' + vk) = c$: ab divise c.

Exemple : Un entier est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 et 3. Pourquoi ne peut-on pas dire de même qu'un entier est divisible par 8 si et seulement si il est divisible par 2 et 4 ?

Corollaire 4.3

Si un entier est premier avec deux autres, il est premier avec leur produit.

$$(\,a \wedge c = 1 \text{ et } b \wedge c = 1\,) \quad \Rightarrow \quad ab \wedge c = 1$$

Démonstration

$$\left.\begin{array}{lll} \exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2 & au + cv & = 1 \\ \exists(u', v') \in \mathbb{Z}^2 & bu' + cv' & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad abuu' + acuv' + bcu'v + c^2vv' = 1$$

D'où $ab(uu') + c(auv' + bu'v + cvv') = 1$.
D'après le théorème de Bézout, $ab \wedge c = 1$.

Pour s'entraîner : ex. 8 à 12

APPLICATION 1

Équation diophantienne

Diophante est un mathématicien grec de l'École d'Alexandrie (IIIe s. ap. J.-C.).

Une équation diophantienne est une équation de la forme $ax + by = c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et dans laquelle on cherche l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
*D'après ce qui précède, cette équation n'a de solutions que si c est un multiple du P.G.C.D. de a et b. L'algorithme d'Euclide permet de trouver **une** solution particulière (x_0, y_0). On peut obtenir l'ensemble des solutions par comparaison avec celle-ci.*

Exemple :
Résoudre l'équation $162x + 207y = 27$.

Nous avons vu que $9 \times 162 - 7 \times 207 = 9$; d'où $27 \times 162 - 21 \times 207 = 27$.
Ainsi, $(x_0, y_0) = (27, -21)$ est une solution particulière de l'équation.

Une solution quelconque doit vérifier :

$$\begin{cases} 162\ x + 207\ y = 27 \\ 162 \times 27 + 207(-21) = 27 \end{cases}$$

d'où $162(x - 27) = -207(y + 21)$.

Simplifions par le P.G.C.D. $162 \wedge 207 = 9$:

$$18(x - 27) = -23(y + 21)$$

18 divise $23(y + 21)$ et il est premier avec 23 ; donc d'après le théorème de Gauss, il divise $y + 21$:

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad y + 21 = 18\,k \quad \text{d'où} \quad x - 27 = -23\,k$$

Réciproquement, ce couple (x, y) est solution de l'équation pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des couples :

$$(x, y) = (27 - 23\,k\ ,\ -21 + 18\,k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pour s'entraîner : ex. 7

4.3 • Caractérisation du P.G.C.D.

Dans la pratique, il est souvent utile d'exprimer de façon simple qu'un entier est le P.G.C.D. de deux entiers donnés. Le théorème suivant le permet :

Théorème 5

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Un entier positif d est le P.G.C.D. de a et b si et seulement si :

$$\exists (d', b') \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} a = d'\,d \\ b = b'\,d \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \wedge b' = 1$$

Démonstration

1) Si $d = a \wedge b$, d est un diviseur de a et de b ; il existe donc d' et b' tels que $a = d'\,d$ et $b = b'\,d$. Par ailleurs, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = d$; d'où, après simplification par d, $d'\,u + b'\,v = 1$: d' et b' sont premiers entre eux.

2) Si $a = d'\,d$ et $b = b'\,d$, d est un diviseur de a et b, donc de $a \wedge b$. Par ailleurs, si $d' \wedge b' = 1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $d'\,u + b'\,v = 1$; d'où $au + bv = d$, ce qui signifie que d est un multiple de $a \wedge b$.

Comme $d | a \wedge b$ et $a \wedge b | d$, et qu'ils sont tous les deux positifs, on en déduit $d = a \wedge b$.

4.4 • Multiples communs de deux entiers

Le résultat obtenu pour les diviseurs communs de deux entiers s'étend aux multiples communs :

Théorème 6

L'ensemble des multiples communs de deux entiers a et b est l'ensemble des multiples d'un seul entier appelé P.P.C.M. de a et b, noté $a \vee b$.

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$$

Démonstration

(On peut supposer a et b positifs.)

Posons $d = a \wedge b$ et $a = d' d$, $b = b' d$ (avec $d' \wedge b' = 1$).

Considérons l'entier $m = d' b' d$. m est un multiple commun de a et de b. *A fortiori*, tout multiple de m est un multiple commun de a et b.

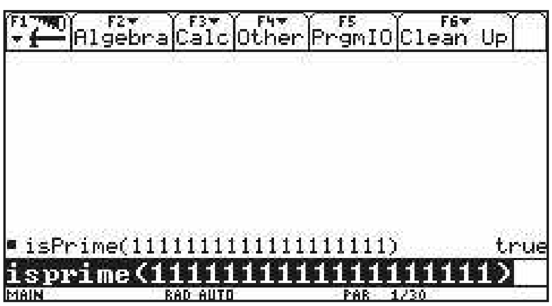
Réciproquement, soit M un multiple commun quelconque de a et de b : il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $M = ap = bq$. On a $d' dp = b' dq$, d'où $d' p = b' q$. Comme d' divise $b' q$ et qu'il est premier avec b', il divise q. Donc il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $q = rd'$; d'où $M = rd' b = rm$.
On a bien montré que tout multiple commun de a et b est un multiple de m.

On remarque que $md = d' b' d^2 = ab$. Ainsi :

$$(a \vee b)(a \wedge b) = ab$$

5 Nombres premiers

5.1 • Définition et caractérisation



La fonction `isprime` teste si un entier est premier.

Un entier p strictement supérieur à 1 est dit premier, si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

Théorème 7

Soit $p > 1$. Il est équivalent de dire :

1) p est premier.

2) p est premier avec tout entier qu'il ne divise pas.

3) p est premier avec tout entier $n \in [\![1, p-1]\!]$.

Démonstration

• $1 \Rightarrow 2$: Soit p un nombre premier et q un entier non multiple de p. $p \wedge q$ est un diviseur de p ; il ne peut donc être égal qu'à 1 ou p. Comme p ne divise pas q, $p \wedge q = 1$: p et q sont premiers entre eux.

• $2 \Rightarrow 3$: Si p est premier avec tout entier qu'il ne divise pas, il est premier en particulier avec tout entier de 1 à $p-1$.

• $3 \Rightarrow 1$: Si p est premier avec tout entier de 1 à $p-1$, il n'a aucun diviseur entre 2 et $p-1$. Ses seuls diviseurs positifs sont donc 1 et p : p est premier.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Doc. 1 Le crible d'Ératosthène.
(Mathématicien grec, 284-192 av. J.-C.)

Exemple : Le crible d'Ératosthène donné par le *document* 1.

On obtient la liste des nombres premiers inférieurs à n en supprimant, pour tout entier p de 2 à n, tous les multiples de p autres que p.

Dans la pratique, pour savoir si un entier n est premier, on cherche à le diviser par tous les entiers premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

Ainsi, 167 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11. Il est inutile d'essayer 13, car $167 < 13^2$. 167 est donc premier.

On peut étendre ce résultat par récurrence au cas d'un nombre quelconque d'entiers ; si un nombre premier divise le produit de n entiers, il divise l'un au moins de ces entiers.

Corollaire 7.1

Si un nombre premier divise le produit de deux entiers, il divise l'un au moins de ces entiers.

Démonstration

Soit p un nombre premier qui divise le produit ab, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Si p ne divisait ni a ni b, il serait premier avec chacun d'eux ; d'après le corollaire 3 du théorème de Bézout, p serait premier avec leur produit, ce qui contredit l'hypothèse. Donc p divise a ou b.

5.2 • Décomposition en facteurs premiers

Lemme 8.1

Tout entier $n > 1$ possède un diviseur premier.

Démonstration

Le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1 est nécessairement premier.

Théorème 8

Tout entier $n > 1$ est un produit de facteurs premiers.
La décomposition est unique, à l'ordre près.

Démonstration

Existence : effectuons une récurrence forte.
$n = 2$ est le produit d'un seul facteur premier.
Soit $n > 1$ tel que tout entier inférieur ou égal à n soit un produit de facteurs premiers.
$n + 1$ possède un diviseur premier p : posons $n + 1 = pq$.
– Si $q = 1$, $n + 1 = p$; c'est donc le produit d'un seul facteur premier.
– Si $q > 1$, alors $q \leqslant n$; d'après l'hypothèse de récurrence, q est un produit de k facteurs premiers. Donc $n + 1$ est le produit de $k + 1$ facteurs premiers.

Unicité : En regroupant les facteurs premiers égaux, on peut écrire :

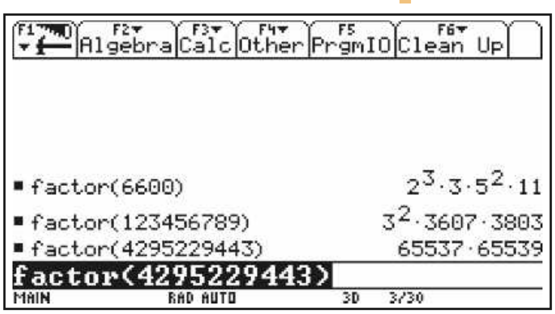
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

les p_i étant des nombres premiers distincts deux à deux.

Supposons qu'un certain nombre premier p apparaisse avec l'exposant $\alpha \geqslant 1$ dans une décomposition de n, et l'exposant $\beta \geqslant 0$ dans une autre (on envisage $\beta = 0$ pour le cas où p ne figurerait pas dans la deuxième décomposition).
On a alors :

$$p^\alpha a = p^\beta b$$

a et b sont des produits de nombres premiers distincts de p ; ils sont donc premiers avec p :
– si $\alpha > \beta$, $p^{\alpha-\beta} a = b$, ce qui contredit $p \wedge b = 1$;
– si $\alpha < \beta$, $a = p^{\beta-\alpha} b$, ce qui contredit $p \wedge a = 1$;
donc $\alpha = \beta$. Tous les facteurs premiers ont le même exposant dans deux décompositions de n, qui ne peuvent donc différer que par l'ordre des facteurs.



La fonction `factor`, appliquée à un entier, donne sa décomposition en produit de facteurs premiers.

L'exposant du nombre premier p dans la décomposition de l'entier n s'appelle la p-valuation de n.

5.3 • Infinité des nombres premiers

Le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini est connu depuis Euclide :

Théorème 9
Pour toute liste finie de nombres premiers, il existe un nombre premier qui n'y figure pas.

Cette démonstration est exactement celle d'Euclide (III^{e} s. av. J.-C.)

Démonstration
Soit $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ une liste finie de nombres premiers.
L'entier $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ possède un diviseur premier qui ne peut être aucun des nombres $p_1, \cdots, p_n$. Il existe donc un autre nombre premier.

Pour s'entraîner : ex. 13 à 16

MÉTHODE

Pour trouver le P.G.C.D. de deux entiers a et b, on peut :

- utiliser la définition du P.G.C.D. *(cf. exercice* 6) ;
- utiliser l'algorithme d'Euclide ;
- utiliser la caractérisation du P.G.C.D. comme unique entier positif d, diviseur commun de a et b, tel que $\dfrac{a}{d}$ et $\dfrac{b}{d}$ soient premiers entre eux *(cf. exercices* 9 *et* 11) .

Pour démontrer que deux entiers a et b sont premiers entre eux, chercher deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$ *(cf. exercices* 8 *et* 10) .

Pour trouver l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $au + bv = a \wedge b$, on peut :

- chercher une solution particulière en remontant l'algorithme d'Euclide ;
- puis comparer une solution quelconque avec cette solution particulière *(cf. Application* 1 *et exercice* 7) .

Pour démontrer qu'un entier est premier, on peut :

- montrer qu'il n'a aucun diviseur strictement supérieur à 1 et inférieur ou égal à sa racine carrée ;
- montrer qu'il est premier avec tout entier qu'il ne divise pas ;
- montrer qu'il est premier avec tous les entiers strictement positifs qui lui sont strictement inférieurs ;
- raisonner par l'absurde en supposant qu'il est composé pour aboutir à une contradiction *(cf. exercice* 13) .

Exercice résolu

NOMBRES PARFAITS

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n.

1 *Montrer que, si m et n sont premiers entre eux, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.*

2 *Soit p un nombre premier ; calculer $\sigma(p^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.*
En déduire le calcul de $\sigma(n)$, à partir de la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

Exemple : Calculer $\sigma(360)$.

3 *On appelle nombre parfait un entier n tel que $\sigma(n) = 2n$ (c'est-à-dire que n est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même).*

a) *Montrer que, si $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ où $2^k - 1$ est premier, alors n est parfait.*

b) *Réciproquement, soit n un nombre parfait pair. On pose $n = 2^a b$, avec $a > 0$ et b impair.*
– Montrer que $(2^{a+1} - 1)\,\sigma(b) = 2^{a+1} b$.
*– Montrer que $\sigma(b) - b$ divise b. En déduire que b est premier, et que n est de la forme donnée en **a)**.*

c) *Donner les cinq premiers nombres parfaits pairs.*

Conseils

Chercher à exprimer les diviseurs de mn en fonction de ceux de m et n.

Il s'agit de savoir si un diviseur de mn s'écrit de façon *unique* sous la forme $d_i\, d_j$, avec $d_i \in D(m)$ et $d_j \in D(n)$.

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique.

Solution

1) Soit $D(m) = \{d_1, \cdots, d_{m_1}\}$ et $D(n) = \{d'_1, \cdots, d'_{n_1}\}$ les ensembles des diviseurs respectifs de m et de n.

$$\sigma(m) = \sum_{i=1}^{m_1} d_i \qquad \sigma(n) = \sum_{j=1}^{n_1} d'_j$$

Pour tout $i \in [\![1, m_1]\!]$ et tout $j \in [\![1, n_1]\!]$, $d_i d'_j$ divise mn.
Réciproquement, soit k un diviseur de mn. Dans la décomposition en facteurs premiers de k, chaque facteur premier divise soit m, soit n.
k est donc le produit d'un diviseur de m et d'un diviseur de n. L'ensemble des diviseurs de mn est donc l'ensemble des produits $d_i d'_j$, où $(i, j) \in [\![1, m_1]\!] \times [\![1, n_1]\!]$.

Plus précisément, considérons l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} D(m) \times D(n) & \xrightarrow{f} & D(mn) \\ (d_i, d'_j) & \mapsto & d_i d'_j \end{array} \right.$$

Nous venons de voir que f est surjective. Montrons qu'elle est injective : supposons que $d_{i_1} d'_{j_1} = d_{i_2} d'_{j_2}$. d_{i_1} divise $d_{i_2} d'_{j_2}$, et il est premier avec d'_{j_2} donc il divise d_{i_2}. On montre, de même, que d_{i_2} divise d_{i_1} ; d'où $d_{i_1} = d_{i_2}$ et $d'_{j_1} = d'_{j_2}$.
En définitive, l'application f est bijective et :

$$\sigma(mn) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_1} d_i d'_j = \left(\sum_{i=1}^{m_1} d_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n_1} d'_j \right) = \sigma(m)\sigma(n)$$

2) Si p est premier, $D(p^k) = \{1, p, p^2, \cdots, p^k\}$,

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \cdots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

Pour $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j}$, $\quad \sigma(n) = \prod_{i=1}^{j} \sigma(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{j} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, d'où :

$$\sigma(360) = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5) = 1\,170$$

3.a) Si $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ avec $2^k - 1$ premier :

$$\sigma(n) = 2^k \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2n.$$

Donc n est parfait.

b) Si $n = 2^a b$ avec b impair, 2^a est premier avec b, donc :

$$\sigma(n) = (2^{a+1} - 1)\sigma(b)$$

Or $\sigma(n) = 2n$, d'où : $(2^{a+1} - 1)\sigma(b) = 2^{a+1} b$.
On en déduit $2^{a+1}(\sigma(b) - b) = \sigma(b)$, c'est-à-dire que $\sigma(b) - b$ divise $\sigma(b)$, et par conséquent il divise b.

Chercher tous les diviseurs de b.

Donc $\sigma(b) - b$ figure parmi les diviseurs de b dont la somme est $\sigma(b)$.

La somme des autres diviseurs est égale à b.
Comme $\sigma(b) - b \neq b$ (sinon on aurait $2^{a+1} - 1 = 2^{a+1}$), ainsi b n'a que deux diviseurs : b et $\sigma(b) - b = 1$. b est donc premier.
On en déduit $b = 2^{a+1} - 1$ et :

$$n = 2^a(2^{a+1} - 1), \quad \text{avec} \quad 2^{a+1} - 1 \text{ premier}$$

c) Il suffit de trouver les cinq premières valeurs de k telles que $2^k - 1$ soit premier (une condition nécessaire mais non suffisante est que k soit lui-même premier : *cf. exercice* 13) :

$k = 2$	$2^k - 1 = 3$	premier	$n = 2^1(2^2 - 1) = 6$
$k = 3$	$2^k - 1 = 7$	premier	$n = 2^2(2^3 - 1) = 28$
$k = 5$	$2^k - 1 = 31$	premier	$n = 2^4(2^5 - 1) = 496$
$k = 7$	$2^k - 1 = 127$	premier	$n = 2^6(2^7 - 1) = 8128$
$k = 13$	$2^k - 1 = 8191$	premier	$n = 2^{12}(2^{13} - 1) = 33550336.$

***Remarque** : On ne sait pas, à l'heure actuelle, s'il existe des nombres parfaits impairs.*

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a La somme de deux diviseurs de a est un diviseur de a.

b) Tout diviseur de deux entiers est un diviseur de leur somme.

c) d est le P.G.C.D. de a et b si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$.

d) Un entier est divisible par 42 si et seulement si il est divisible par 6 et par 7.

e) Un entier est divisible par 48 si et seulement si il est divisible par 6 et par 8.

f) Si un entier divise le produit ab et qu'il ne divise pas a, alors il divise b.

g) Tout entier premier avec a et b est premier avec leur produit ab.

h) Si un nombre premier divise le produit ab, il divise a ou b.

i) Si $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sont les n premiers nombres premiers, $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ est un nombre premier.

Division euclidienne

2 Trouver deux entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47.

3 On divise deux entiers a et b par leur différence $a - b$.
Comparer les quotients et les restes obtenus.

4 Soit a, b, n trois entiers tels que $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b.
Trouver le quotient de la division euclidienne de $a\,b^n - 1$ par b^{n+1}.

P.G.C.D. – entiers premiers entre eux

5 **1)** Soit $n \in \mathbb{Z}$. On pose $a = 2n+3$ et $b = 5n-2$. Calculer $5a - 2b$.

En déduire le P.G.C.D. de a et b selon les valeurs de n.

2) Déterminer, de la même façon, le P.G.C.D. de $2n - 1$ et $9n + 4$.

6 Soit a et b deux entiers relatifs et d leur P.G.C.D. Déterminer le P.G.C.D. de $A = 15a+4b$ et $B = 11a+3b$.

7 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :

$$221x + 247y = 15\ ; \qquad 198x + 216y = 36\ ;$$

$$323x - 391y = 612$$

8 Démontrer que, si deux entiers relatifs sont premiers entre eux, leur somme et leur produit sont premiers entre eux.

9 Démontrer que l'on ne change pas le P.G.C.D. de deux entiers en multipliant l'un d'entre eux par un entier premier avec l'autre.

10 Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit a_n et b_n les entiers tels que :

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

Démontrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

11 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1) Démontrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors, quels que soient les entiers p et q, a^p et b^q sont premiers entre eux.

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$.

12* Montrer que, si p et q sont premiers entre eux, $2^p - 1$ et $2^q - 1$ sont premiers entre eux.

Nombres premiers

13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, n est premier.
La réciproque est-elle vraie ?

14 Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n entiers consécutifs non premiers.

15 * **Petit théorème de FERMAT**

Soit p un nombre premier.

1) Démontrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.

2) En déduire que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a+b)^p - a^p - b^p$ est divisible par p.

3) Démontrer par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N} \quad a^p - a$ est divisible par p.

16 *On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.*

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 30.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 - n$ est divisible par 42.

Exercices posés aux oraux des concours

17 (Petites Mines 2002)

Soit n un entier. Montrer que si n est un carré et un cube, il est le carré d'un cube.

18 (Petites Mines 2003)

Soit deux phares A et B. Le phare A émet un flash à $t = 0$ puis toutes les 42 s, le phare B émet un flash au bout de 18 s puis toutes les 66 s. À quels instants y a-t-il simultanéité entre les deux phares ?

Même question en supposant que le phare B émet un flash au bout de 10 s puis toutes les 66 s.

19 (Petites Mines 2003)

Montrer qu'un entier n congru à 3 modulo 4 ne peut être la somme de deux carrés.

Montrer de même qu'un entier n congru à 7 modulo 8 ne peut être la somme de trois carrés.

20 (Petites Mines 2005)

Soit p un entier naturel. Montrer que p, $8p-1$ et $8p+1$ ne sont pas tous les trois premiers.

21 (Petites Mines 2006)

Soit n un entier impair. Montrer que l'entier $P(n) = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ est divisible par 512.

11 Structures algébriques usuelles

INTRODUCTION

Beaucoup d'ensembles mathématiques possèdent des propriétés communes. Il est intéressant d'étudier ces propriétés, en premier lieu, dans le cas général pour les appliquer, en second lieu, à tous les cas particuliers. Nous étudierons successivement les structures de groupe, d'anneau et de corps que l'on rencontre très fréquemment en algèbre, en analyse et en géométrie.

La notion de groupe apparaît, en 1830, *avec Évariste Galois, largement incompris de ses contemporains ; il faut attendre l'aube du* XX^e^ *siècle pour que les structures algébriques s'imposent dans tous les domaines des mathématiques (David Hilbert, Félix Klein, Elie Cartan).*

OBJECTIFS

- Acquisition du vocabulaire concernant les structures algébriques usuelles.
- Étude élémentaire des structures de groupe, d'anneau et de corps.

1 Lois de composition interne

1.1 • Loi de composition interne – Partie stable

Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne dans E (en abrégé : l.c.i.) une application de $E \times E$ dans E, notée :

$$\left|\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (a, b) & \mapsto & a * b \end{array}\right.$$

Une partie F de E est dite stable par la l.c.i. $*$, si :

$$\forall (a, b) \in F^2 \quad a * b \in F$$

On appelle l.c.i. induite par $*$ dans F la restriction de $*$ à $F \times F$.

Exemples :

- La partie $\mathbb{R}_-$ de $\mathbb{R}$ est stable par $+$.
- La partie $\mathbb{R}_+$ est stable par $\times$.
- La partie $\mathbb{R}_-$ n'est pas stable par $\times$.

1.2 • Propriétés d'une l.c.i.

Une l.c.i. $*$ dans un ensemble E est dite :

- commutative, si : $\forall (a, b) \in E^2 \quad a * b = b * a$;
- associative, si : $\forall (a, b, c) \in E^3 \quad a * (b * c) = (a * b) * c$.

Si $*$ est associative, on peut écrire sans ambiguïté : $a * b * c$ ou $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\bigstar} a_i$

Exemples : $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

S'il existait deux éléments neutres e et f, on aurait :

- $f * e = f$, car e est neutre.
- $f * e = e$, car f est neutre.

Donc $e = f$.

L'élément neutre, s'il existe, est donc unique.

Un élément $e \in E$ est dit :

- élément neutre, si :

$$\forall a \in E \quad a * e = e * a = a$$

Si E possède un élément neutre e, un élément a de E est dit :

- symétrisable, si : $\exists a' \in E \quad a * a' = a' * a = e$

  a' est appelé symétrique de a.

Supposons la l.c.i. $*$ associative ; si un élément a possède deux symétriques a' et a'', on a :

$$a'' * a * a' = (a'' * a) * a' = e * a' = a'$$
$$a'' * a * a' = a'' * (a * a') = a'' * e = a'', \quad \text{donc} \quad a' = a''$$

Le symétrique d'un élément, s'il existe, est donc unique.

Le plus souvent, une l.c.i. associative est notée de façon additive : $a + b$ ou multiplicative : ab. La notation additive n'est employée que pour une l.c.i. commutative.

	notation additive	**notation multiplicative**
associativité	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
neutre	$a + 0 = 0 + a = a$	$ae = ea = a$
symétrique de *a*	opposé : $-a$ $a + (-a) = (-a) + a = 0$	inverse : a^{-1} $aa^{-1} = a^{-1}a = e$
itéré : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ si $n = 0$ si a est symétrisable $\forall n \in \mathbb{N}^*$	$na = a + a + \cdots + a$ $0a = 0$ $(-n)a = n(-a)$	$a^n = aa \cdots a$ $a^0 = e$ $a^{-n} = (a^{-1})^n$
$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$	$na + ma = (n + m)a$	$a^n a^m = a^{n+m}$

Pour s'entraîner : ex. 2 à 5

2 Structure de groupe

2.1 • Définition d'un groupe

On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ telle que :

G1. $*$ est associative : $\quad \forall (a, b, c) \in G^3 \quad a * (b * c) = (a * b) * c$

G2. G possède un élément neutre e : $\quad \forall a \in G \quad a * e = e * a = a$

G3. Tous les éléments de G sont symétrisables :

$$\forall a \in G \quad \exists a' \in G \quad a * a' = a' * a = e$$

Si de plus $*$ est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien.

Exemples :

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$
- $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$
- $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$, où $\mathrm{Bij}(E)$ est l'ensemble des bijections de E dans E.

Dans la suite du chapitre, la l.c.i. d'un groupe quelconque est souvent notée multiplicativement (ou additivement, uniquement si le groupe est abélien). S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera le groupe G sans préciser la l.c.i.

Évariste Galois (1811-1832) inventa le mot groupe pour décrire les permutations des racines d'une équation algébrique.

2.2 • Propriétés

1) Un groupe est non vide : il contient au moins son élément neutre.

2) L'élément neutre est unique.

3) Le symétrique d'un élément est unique.

4) Pour tout élément a de G, $ax = ay \quad \Rightarrow \quad x = y$
(il suffit de multiplier à gauche par a^{-1}).
De même : $xa = ya \quad \Rightarrow \quad x = y$ (multiplier à droite par a^{-1}).
On dit que a est régulier.

5) Pour tout $(a, b) \in G^2$, l'équation $ax = b$ a une solution unique : $x = a^{-1}b$.
De même l'équation $xa = b$ a une solution unique : $x = ba^{-1}$.

6) $\forall (a, b) \in G^2 \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Pour s'entraîner : ex. 6 et 7

3 Sous-groupe

3.1 • Définition et caractérisation

On appelle sous-groupe d'un groupe G toute partie H de G, stable par la l.c.i. du groupe et qui, munie de la l.c.i. induite, est encore un groupe.

Exemple : $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Théorème 1
Une partie H d'un groupe G est un sous-groupe si et seulement si :
1) H est non vide.
2) H est stable par la l.c.i. de G.
3) H contient les symétriques de tous ses éléments.

On peut condenser la caractérisation d'un sous-groupe en :
– notation additive :
$$\begin{cases} \textbf{1)}\ H \neq \varnothing \\ \textbf{2)}\ \forall (x, y) \in H^2 \quad x - y \in H \end{cases}$$
– notation multiplicative :
$$\begin{cases} \textbf{1)}\ H \neq \varnothing \\ \textbf{2)}\ \forall (x, y) \in H^2 \quad xy^{-1} \in H \end{cases}$$

En notation additive : $\begin{cases} \textbf{1)}\ H \neq \varnothing \\ \textbf{2)}\ \forall (x, y) \in H^2 \quad x + y \in H \\ \textbf{3)}\ \forall x \in H \quad -x \in H \end{cases}$

En notation multiplicative : $\begin{cases} \textbf{1)}\ H \neq \varnothing \\ \textbf{2)}\ \forall (x, y) \in H^2 \quad xy \in H \\ \textbf{3)}\ \forall x \in H \quad x^{-1} \in H \end{cases}$

Démonstration
Adoptons la notation multiplicative et notons e l'élément neutre de G.
– Si H est un sous-groupe de G, il est non vide et stable par $\times$.
Soit e' l'élément neutre de H. $e'e' = e'e$; comme e' est régulier, $e' = e$.
Soit $x \in H$. x a un inverse x^{-1} au sens de G et un inverse x' au sens de H.
$x'x = e = x^{-1}x$, d'où $x' = x^{-1}$; donc $x^{-1} \in H$: H contient les inverses de tous ses éléments.

Pour montrer que H est non vide, on peut montrer que $e \in H$; en effet, si cette condition n'est pas réalisée, H n'est certainement pas un sous-groupe de G et il est inutile d'examiner la suite.

– Soit H une partie de G vérifiant les points **1)**, **2)** et **3)**. H est stable. Vérifions que, munie de sa loi induite, c'est un groupe. La loi induite est évidemment associative.
Comme $H \neq \varnothing$, il existe $x \in H$; alors $x^{-1} \in H$, d'où $xx^{-1} \in H$, c'est-à-dire $e \in H$. H possède donc un élément neutre. De plus, tout élément de H a un inverse dans G, qui, d'après **3)**, est dans H : H est un groupe, donc un sous-groupe de G.

3.2 • Exemples

Pour montrer qu'un ensemble G muni d'une l.c.i. est un groupe, on pourra souvent montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe déjà connu que l'on précisera.

On montre facilement, à l'aide du théorème de caractérisation d'un sous-groupe, que :

- $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de G.
- L'intersection de deux sous-groupes de G est un sous-groupe de G.
- $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, \quad z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{U}, \times)$.
- L'ensemble des suites convergentes est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$.
- L'ensemble des fonctions continues est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$.
- L'ensemble des isométries du plan P est un sous-groupe de $(\mathrm{Bij}(P), \circ)$.
- L'ensemble des déplacements de P est un sous-groupe du groupe des isométries de P.
- L'ensemble des symétries centrales et translations de P est un sous-groupe du groupe des déplacements de P.
  etc.

Pour s'entraîner : ex. 9 à 12

3.3 • Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Théorème 2
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ des multiples de n est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme.

Démonstration

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ est non vide, stable par addition et il contient les opposés de tous ses éléments. C'est donc un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

2) Réciproquement, soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Si $H = \{0\}$, $H = 0\mathbb{Z}$.
Si $H \neq \{0\}$, pour tout élément n non nul de H, $|n| \in H$ et $|n| > 0$. L'ensemble des éléments strictement positifs de H est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui possède donc un plus petit élément n_0. Comme H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, $n_0\mathbb{Z} \subset H$.
Montrons que $H \subset n_0\mathbb{Z}$.
Soit $p \in H$. Effectuons la division euclidienne de p par n_0 :

$$p = n_0 q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < n_0$$

p et $n_0 q$ appartiennent à H, donc r appartient à H. Comme $]0, n_0[\cap H = \varnothing$, $r = 0$. D'où $p = n_0 q \in n_0\mathbb{Z}$. On a bien montré que $H \subset n_0\mathbb{Z}$, d'où en définitive $H = n_0\mathbb{Z}$.

APPLICATION 1

Nouvelles définitions des P.G.C.D. et P.P.C.M. de deux entiers

Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
Que peut-on en déduire ?

1) $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers de la forme $au + bv$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Cet ensemble est non vide, stable par addition et il contient les opposés de ses éléments : c'est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. C'est donc l'ensemble des multiples d'un entier d, qui est appelé plus grand commun diviseur de a et b.

2) $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est l'intersection de deux sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$; c'est donc un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, c'est-à-dire l'ensemble des multiples d'un entier m, qui est appelé plus petit commun multiple de a et b.

4 Morphisme de groupes

4.1 • Définition générale d'un morphisme

Soit E et F deux ensembles munis respectivement des l.c.i. $*$ et T. On appelle morphisme de $(E, *)$ dans (F, T) une application f de E dans F telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x * y) = f(x) \; T \; f(y)$$

Exemples :

$$\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, +) & \to & (\mathbb{R}_+^*, \times) \\ n & \mapsto & 2^n \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*, \times) & \to & (\mathbb{R}, +) \\ x & \mapsto & \ln x \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, \times) & \to & (\mathbb{C}, \times) \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \right.$$

- La composée de deux morphismes est un morphisme.
- Un morphisme d'un ensemble dans lui-même avec la même l.c.i. est appelé endomorphisme.
- Un morphisme bijectif est appelé isomorphisme.
  La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
  Deux ensembles sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.
- Un endomorphisme bijectif est appelé automorphisme.
  L'ensemble des automorphismes de $(E, *)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Bij}(E), T)$, noté $\mathrm{Aut}(E)$.

4.2 • Propriétés des morphismes de groupes

Soit G et G' deux groupes multiplicatifs, d'éléments neutres respectifs e et e', et f un morphisme de G dans G'.

$$\boxed{f(e) = e'}$$

En effet, $f(e) = f(ee) = f(e)f(e)$ et $f(e) = f(e)e'$, d'où $f(e)f(e) = f(e)e'$, et, comme $f(e)$ est régulier, $f(e) = e'$.

$$\forall x \in G \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

En effet, $f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$ et $f(xx^{-1}) = f(e) = e'$, d'où $f(x)f(x^{-1}) = e'$, c'est-à-dire $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

4.3 • Noyau d'un morphisme de groupes

Soit G et G' deux groupes multiplicatifs, d'éléments neutres respectifs e et e', et f un morphisme de G dans G'.

On appelle noyau de f l'ensemble des éléments de G qui ont pour image l'élément neutre de G'. On le note :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in G\,,\ f(x) = e'\} = f^{-1}(\{e'\})$$

Théorème 3

Pour tout morphisme f du groupe G dans le groupe G' :

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G.
- $\operatorname{Ker} f = \{e\}$ si et seulement si f est injectif.

Démonstration

(Adoptons la notation multiplicative.)

1) Comme $f(e) = e'$, $e \in \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Ker} f \neq \varnothing$.
$\forall (x, y) \in (\operatorname{Ker} f)^2$, $f(xy) = f(x)f(y) = e'e' = e'$, donc $xy \in \operatorname{Ker} f$: $\operatorname{Ker} f$ est stable.
$\forall x \in \operatorname{Ker} f$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = e'^{-1} = e'$, donc $x^{-1} \in \operatorname{Ker} f$: $\operatorname{Ker} f$ contient les inverses de tous ses éléments. $\operatorname{Ker} f$ est donc un sous-groupe de G.

2) Si f est injectif, $\forall x \in \operatorname{Ker} f$, $f(x) = e' = f(e)$, donc $x = e$. $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.
Réciproquement, si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$, soit $(x, y) \in G^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
Alors $f(x)f(y)^{-1} = e'$; d'où $f(xy^{-1}) = e'$, d'où $xy^{-1} \in \operatorname{Ker} f$, d'où $xy^{-1} = e$.
Donc $x = y$: f est injectif.

Exemple : L'application $\left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ x & \mapsto & e^{ix} \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes, dont le noyau est $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}\,,\ e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$, sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

4.4 • Image d'un morphisme de groupes

Soit G et G' deux groupes, et f un morphisme de G dans G'. On appelle image de f l'ensemble des éléments de G' qui ont un antécédent dans G. On le note :

$$\operatorname{Im} f = \{y \in G'\,,\ \exists x \in G\ y = f(x)\} = f(G)$$

Théorème 4

Pour tout morphisme f du groupe G dans le groupe G' :

- $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G'.
- $\operatorname{Im} f = G'$ si et seulement si f est surjectif.

Démonstration

1) (Adoptons la notation multiplicative.)
$e' = f(e) \in \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Im} f \neq \varnothing$.
$\forall (y, y') \in (\operatorname{Im} f)^2$, $\exists (x, x') \in G^2 \quad y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
D'où $yy' = f(x)f(x') = f(xx') \in \operatorname{Im} f$: $\operatorname{Im} f$ est stable.
$\forall y \in \operatorname{Im} f$, $\exists x \in G \quad y = f(x)$. D'où $y^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in \operatorname{Im} f$.
$\operatorname{Im} f$ contient les inverses de tous ses éléments. $\operatorname{Im} f$ est donc un sous-groupe de G'.

2) $f(G) = G'$ est la définition même de la surjectivité de f.

Exemple : L'image du morphisme $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{ix} \end{array} \right.$

est $\operatorname{Im} f = \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1\}$, qui est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Pour s'entraîner : ex. 13 à 15

5 Structure d'anneau

5.1 • Anneau

On appelle anneau un ensemble A muni de deux l.c.i., notées respectivement $+$ et $\times$, telles que :

A1. $(A, +)$ est un groupe abélien. Le neutre est noté 0_A (élément nul).

A2. La l.c.i. $\times$ est associative.

A3. A possède un élément neutre pour la l.c.i. $\times$, noté 1_A (élément unité).

A4. $\times$ est distributive par rapport à $+$, c'est-à-dire :

$$\forall (a, b, c) \in A^3 \quad a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad (b + c)a = ba + ca$$

Si de plus $\times$ est commutative, l'anneau est dit commutatif.

Exemples :

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$

5.2 • Propriétés

On peut définir dans un anneau A une l.c.i., notée $-$, par :

$$\forall (a, b, c) \in A^2 \quad a - b = a + (-b)$$

- $\forall (a,b,c) \in A^3 \quad a(b-c) = ab - ac$.
  En effet, $a(b-c) + ac = a((b-c)+c) = ab$.
- De même, $\forall (a,b,c) \in A^3 \quad (b-c)a = ba - ca$.
- $\forall a \in A \quad a\,0_A = 0_A\,a = 0_A$.
  Il suffit de choisir $b = c$ dans les égalités précédentes.
- La réciproque n'est pas toujours vraie : on appelle diviseurs de zéro des éléments non nuls dont le produit est 0_A.

ATTENTION

Un élément d'un anneau n'est pas toujours régulier pour la multiplication : $ab = ac$ n'implique pas nécessairement $b = c$.

Exemple : Dans l'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les fonctions $f : x \mapsto x + |x|$ et $g : x \mapsto x - |x|$ sont des diviseurs de zéro, car fg est la fonction nulle, alors que ni f ni g ne sont nulles.

- On peut généraliser la distributivité de $\times$ par rapport à $+$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ab_i = a \sum_{i=1}^{n} b_i$
- On peut appliquer la formule du binôme à deux éléments d'un anneau, **s'ils commutent** :

$$ab = ba \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p$$

- De même, pour la factorisation de $a^n - b^n$:

$$ab = ba \implies \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{p=0}^{n-1} a^{n-1-p}\, b^p$$

En particulier, comme tout élément x de l'anneau commute avec l'élément unité, noté simplement 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - x^n = (1-x) \sum_{p=0}^{n-1} x^p = \sum_{p=0}^{n-1} x^p (1-x)$$

Si $1 - x$ est inversible, on retrouve la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = (1-x^n)(1-x)^{-1}$$

Pour s'entraîner : ex. 20 et 21

5.3 • Sous-anneau

On appelle sous-anneau d'un anneau A, toute partie B de A stable par $+$ et $\times$ et qui, munie des l.c.i. induites, est encore un anneau **avec la même unité**.

Théorème 5

Une partie B d'un anneau A est un sous-anneau de A si et seulement si :

1) $1_A \in B$.

2) $\forall (x,y) \in B^2 \quad x - y \in B$.

3) $\forall (x,y) \in B^2 \quad xy \in B$.

Démonstration

- Soit B un sous-anneau de A. Il contient 1_A. Il est stable par $+$ et contient les opposés de ses éléments, donc il est stable par $-$. De plus, il est stable par $\times$.
- Soit B une partie de A vérifiant les points **1)**, **2)** et **3)**. D'après **1)** et **2)**, $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ (caractérisation condensée). De plus, il est stable par $\times$ et la l.c.i. induite est évidemment associative et distributive par rapport à $+$. D'après **1)**, B possède un élément unité qui est le même que celui de A : $(B, +, \times)$ est un sous-anneau de A.

Exemples : L'ensemble des fonctions polynomiales, l'ensemble des fonctions continues, l'ensemble des fonctions bornées sont des sous-anneaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
L'ensemble des suites convergentes, l'ensemble des suites périodiques sont des sous-anneaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5.4 • Morphisme d'anneaux

On appelle morphisme d'anneaux une application f d'un anneau A dans un anneau A' qui est un morphisme pour $+$ et $\times$, et qui fait correspondre les éléments unité.

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in A^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x, y) \in A^2 \quad f(xy) = f(x)f(y) \\ f(1_A) = 1_{A'} \end{cases}$$

Exemples : L'application $z \mapsto \overline{z}$ est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{C}$.
L'application $(u_n) \mapsto \lim\limits_{n \to \infty} u_n$ est un morphisme de l'anneau des suites convergentes dans $\mathbb{R}$.

Pour s'entraîner : ex. 16 et 17

6 Éléments inversibles d'un anneau - Corps

6.1 • Groupe des éléments inversibles d'un anneau

Un élément x d'un anneau A est dit inversible, s'il possède un symétrique x^{-1} pour la l.c.i. $\times$.

$$x^{-1} \in A \quad x x^{-1} = x^{-1} x = 1_A$$

Théorème 6
L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe multiplicatif.

Démonstration

Soit A un anneau et G l'ensemble de ses éléments inversibles.

- G est stable par $\times$:
$\forall (x,y) \in G^2 \quad (x\,y)\,(y^{-1}\,x^{-1}) = (y^{-1}\,x^{-1})\,(x\,y) = 1_A$. D'où xy est inversible et $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$: $xy \in G$.
- La l.c.i. induite de $\times$ dans G est associative.
- $1_A \in G$: 1_A est élément neutre dans G.
- Tout élément x de G a, par définition, un inverse x^{-1} dans A et x^{-1} est lui-même inversible, donc $x^{-1} \in G$.

$(G, \times)$ est donc un groupe.

Exemples :

- Le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ est $\big(\{-1, 1\}, \times\big)$.
- Le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{C}$ est $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- Le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites qui ne s'annulent pas.

APPLICATION 2

Anneau des entiers de Gauss

On appelle entier de Gauss *un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs. On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des entiers de Gauss.*

1) *Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.*

2) *Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.*

3) *Un entier de Gauss a est dit irréductible si $a = bc \Rightarrow b$ ou c inversible. L'entier 2 est-il irréductible ?*

1) $\mathbb{Z}[i]$ contient le complexe 1, il est stable par soustraction et multiplication : c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Si $z = a + ib$ est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, il existe $z' = a' + ib' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$, ce qui implique : $|z|^2|z'|^2 = 1$, c'est-à-dire $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = 1$. L'entier a^2+b^2 est inversible dans $\mathbb{N}$, donc $a^2+b^2 = 1$. Réciproquement, si $a^2+b^2 = 1$, $(a+ib)(a-ib) = 1$; $a+ib$ est donc inversible dans $\mathbb{Z}[i]$. En définitive, $a+ib$ est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $a^2+b^2 = 1$, ce qui donne quatre solutions : $1, i, -1, -i$. Le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ est le groupe $\mathcal{U}_4$.

3) $2 = (1+i)(1-i)$; or, aucun de ces deux facteurs n'est inversible, 2 n'est donc pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ (les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ jouent le même rôle que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$, mais 2, qui est irréductible dans $\mathbb{Z}$, ne l'est plus dans $\mathbb{Z}[i]$).

6.2 • Structure de corps

On appelle corps un anneau (généralement supposé commutatif), non réduit à $\{0\}$, dont tout élément non nul est inversible.
Si $\mathbb{K}$ est un corps, le groupe de ses éléments inversibles est $\mathbb{K}\backslash\{0\}$.

Exemples : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$.

On appelle sous-corps d'un corps $\mathbb{K}$ une partie de $\mathbb{K}$ stable par $+$ et $\times$ et qui, munie des l.c.i. induites, est encore un corps. (Il a nécessairement la même unité que $\mathbb{K}$, car ses éléments sont réguliers pour $\times$.)

Théorème 7

Une partie L d'un corps $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{K}$ si et seulement si :

1) $L \backslash \{0\} \neq \varnothing$.

2) $\forall (x, y) \in L^2 \quad x - y \in L$.

3) $\forall (x, y) \in L \times L^* \quad x y^{-1} \in L$.

On appelle morphisme de corps une application d'un corps $\mathbb{K}$ dans un corps $\mathbb{K}'$ qui est un morphisme pour $+$ et $\times$.

$$\begin{cases} f(1_{\mathbb{K}}) \neq 0 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{K}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x, y) \in \mathbb{K}^2 \quad f(xy) = f(x) f(y) \end{cases}$$

(On a nécessairement $f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}'}$, car f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{K}^*, \times)$ dans $(\mathbb{K}'^*, \times)$.)

6.3 • Anneau intègre

On appelle anneau intègre un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$ sans diviseur de zéro.

$$\forall (x, y) \in A^2 \qquad \left(x y = 0_A \quad \Rightarrow \quad x = 0_A \text{ ou } y = 0_A \right)$$

Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, pour les l.c.i. habituelles.

Théorème 8

Tout corps commutatif est un anneau intègre.

Démonstration

Si $xy = 0_{\mathbb{K}}$, soit $x = 0_{\mathbb{K}}$, soit x est inversible. Dans ce cas, $x^{-1} x y = 0_{\mathbb{K}}$, d'où $y = 0_{\mathbb{K}}$.

La réciproque est fausse : $\mathbb{Z}$ est intègre, mais ce n'est pas un corps.

Remarquons cependant que tout sous-anneau d'un corps commutatif est intègre. Nous admettrons que, réciproquement, tout anneau intègre est un sous-anneau d'un corps. On appelle corps des fractions d'un anneau intègre A le plus petit corps dont A soit un sous-anneau (nous admettrons son existence et son unicité à un isomorphisme près).

Exemples : Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$.
Nous verrons ultérieurement que le corps des fractions de l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$.

Pour s'entraîner : ex. 18 et 19

MÉTHODE

Pour montrer qu'un ensemble E muni d'une l.c.i. est un groupe :

- s'il s'agit d'une l.c.i. tout à fait nouvelle, il faut vérifier :
  – qu'elle est associative ;
  – qu'il existe un élément neutre ;
  – que tout élément possède un symétrique *(cf. exercices* 6 *et* 7 *)* ;
- s'il s'agit de la restriction à E de la l.c.i. d'un groupe G contenant E, il suffit de vérifier que E est un sous-groupe de G (voir ci-après).

Pour montrer qu'une partie H d'un groupe G est un sous-groupe de G, on peut :

- appliquer la caractérisation :
  – H est non vide (on a intérêt à montrer tout de suite que $e \in H$) ;
  – H est stable par la l.c.i. de G ;
  – H contient les symétriques de ses éléments *(cf. exercices* 9 *à* 11 *)* ;
- montrer que c'est une intersection de sous-groupes ;
- montrer que c'est le sous-groupe engendré par un élément ;
- montrer que H est le noyau d'un morphisme de groupes ;
- montrer que H est l'image d'un morphisme de groupes *(cf. exercice* 15) .

Pour montrer qu'un ensemble E muni de deux l.c.i. est un anneau :

- s'il s'agit de l.c.i. tout à fait nouvelles, il faut vérifier :
  – que E muni de sa première l.c.i. est un groupe abélien ;
  – que la deuxième l.c.i. est associative ;
  – qu'il existe un élément neutre pour la deuxième l.c.i. ;
  – que la deuxième l.c.i. est distributive par rapport à la première ;
- s'il s'agit de restrictions à E des l.c.i. d'un anneau A contenant E, il suffit de vérifier que E est un sous-anneau de A (voir ci-après).

Pour montrer qu'une partie B d'un anneau A (dont les deux l.c.i. sont notées $+$ et $\times$) est un sous-anneau de A, on montre que :

- B contient l'élément unité de A ;
- B est stable par « soustraction » ;
- B est stable par « multiplication » *(cf. exercices* 16, 17) .

Pour montrer qu'un anneau A est un corps, on montre que tout élément non nul de A est inversible *(cf. exercices* 18, 19) .

Exercice résolu

GROUPES DE CARDINAL INFÉRIEUR OU ÉGAL À 4

Trouver, à un isomorphisme près, tous les groupes de cardinal inférieur ou égal à 4.

Conseils

On se propose de définir par leur table tous les groupes à 1, 2, 3 ou 4 éléments, à un isomorphisme près. La construction de la table d'un groupe obéit à quelques règles simples :

- Il doit y avoir un élément neutre e.
- Pour tout élément a de G, l'application $x \mapsto a * x$ est injective, donc bijective (G est fini). Il s'ensuit que dans la ligne de a, on doit trouver tous les éléments de G une fois et une seule. De même pour chaque ligne et chaque colonne de la table.
- En particulier, dans la ligne de chaque élément on doit trouver l'élément neutre e au niveau du symétrique de cet élément.
- Il reste l'associativité, qui n'est pas facile à interpréter à partir de la table. En fait, la simple application des règles précédentes donne très peu de solutions. On vérifiera que chacune d'entre elles est isomorphe à un groupe existant.

Solution

1) Il n'y a évidemment qu'une seule façon de construire la table d'un groupe à un élément :

$*$	e
e	e

2) Il n'y a également qu'une façon de remplir la table d'un groupe à 2 éléments, chacun devant être son propre symétrique :

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

On peut vérifier que cette table est celle du groupe $\mathcal{U}_2 = (\{1, -1\}, \times)$. Pour la composition des applications, tout groupe constitué de l'élément neutre et d'un élément involutif est isomorphe à ce groupe ; par exemple $\{\mathrm{Id}, S\}$, où S est une symétrie centrale.

3) Il n'y a encore qu'une façon de remplir la table d'un groupe à 3 éléments ; on s'aperçoit que les deux éléments autres que l'élément neutre ne peuvent pas être égaux à leur propre symétrique ; ils sont donc symétriques l'un de l'autre :

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Cette table est celle du groupe $\mathcal{U}_3 = (\{1, j, \bar{j}\}, \times)$, ou du groupe $(\{\mathrm{Id}, R, R^{-1}\}, \circ)$, où R est une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

4) Dans un groupe à 4 éléments $G = \{e, a, b, c\}$, il existe au moins un élément autre que e qui est son propre symétrique. On peut distinguer deux cas :

– un seul élément autre que e est son propre symétrique. On peut supposer que c'est b, à un isomorphisme près. a et c sont alors symétriques l'un de l'autre ;

– tous les éléments sont leur propre symétrique.

On obtient les deux tables suivantes :

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

La première table est celle du groupe $\mathcal{U}_4 = (\{1, i, -1, -i\}, \times)$, ou du groupe $(\{\mathrm{Id}, R, S, R^{-1}\}, \circ)$, où R est une rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et S la symétrie centrale de centre O.

La seconde table est celle du groupe des isométries conservant un rectangle : identité, symétrie centrale, deux réflexions d'axes perpendiculaires. On l'appelle **groupe de Klein**.

Ces deux groupes à quatre éléments ne sont pas isomorphes, car la propriété « être son propre symétrique » se conserve dans un isomorphisme.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) 0 est élément neutre de la soustraction dans $\mathbb{Z}$.

b) Tout élément régulier d'un monoïde est symétrisable.

c) Tous les éléments d'un groupe sont réguliers.

d) $\mathbb{N}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

e) Le noyau d'un morphisme de groupe est un singleton.

f) L'ordre d'un élément a d'un groupe est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$.

g) Tous les éléments non nuls d'un anneau sont réguliers pour les deux opérations.

h) L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe pour l'addition.

i) Un diviseur de zéro d'un anneau n'est jamais inversible.

j) Tout corps commutatif est un anneau intègre.

Lois de composition interne

2 Étudier les propriétés (commutativité, associativité, élément neutre, symétrique d'un élément,...) des l.c.i. $\cap$, $\cup$ et $\triangle$ dans $\mathcal{P}(E)$.

3 Soit E un ensemble muni de deux l.c.i. $\circ$ et $*$ admettant des éléments neutres respectifs e et f, et telles que :

$$\forall (x, y, u, v) \in E^4 \quad (x * y) \circ (u * v) = (x \circ u) * (y \circ v)$$

Montrer que : **1)** $e = f$; **2)** $\circ = *$;

3) $*$ est associative et commutative.

4 * Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. $*$ associative, commutative et idempotente (c'est-à-dire que $\forall a \in E \quad a * a = a$).

On définit dans E la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff x * y = y$$

1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2) Démontrer que $x * y$ est la borne supérieure de $\{x, y\}$.

3) Réciproquement, soit $\leqslant$ une relation d'ordre dans E telle que toute paire possède une borne supérieure. On pose $x \circ y = \sup\{x, y\}$.

Démontrer que $\circ$ est une l.c.i. associative, commutative et idempotente. Donner des exemples.

5 Soit E et F deux ensembles non vides et $*$ une l.c.i. sur F. On définit, dans l'ensemble F^E des applications de E dans F, la l.c.i. T par :

$$\forall (f, g) \in (F^E)^2 \quad \forall x \in E \quad (f\,T\,g)(x) = f(x) * g(x)$$

1) Montrer que, si $*$ est commutative, il en est de même de T.

2) Montrer que, si $*$ est associative, il en est de même de T.

3) Montrer que, si $*$ admet un élément neutre e, il en est de même de T.

Donner des exemples.

Groupes

6 On définit sur $\mathbb{R}$ la l.c.i. $*$ par $a * b = a + b - ab$.

1) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

2) Déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui soit un groupe pour la loi $*$.

7 On définit dans $\mathbb{R}^2$ la l.c.i. $*$ par :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x})$$

Démontrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe. Est-il abélien ?

8 Soit E un ensemble fini non vide, muni d'une l.c.i. associative telle que tout élément soit régulier. Montrer que c'est un groupe. Ce résultat subsiste-t-il si E est infini ?

9 Montrer que l'ensemble des éléments d'un groupe qui commutent avec tous les autres est un sous-groupe. On l'appelle centre du groupe.

10 Montrer que l'ensemble $\{z \in \mathbb{C},\ \exists n \in \mathbb{N}^* \quad z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

11 Soit G un groupe noté multiplicativement, H un sous-groupe de G et a un élément quelconque de G.

Montrer que $a^{-1}Ha$ est un sous groupe de G.

12 On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ dans lui-même :

$$f_1 : x \mapsto x\ ; \quad f_2 : x \mapsto 1 - x\ ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{1-x}\ ;$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}\ ; \quad f_5 : x \mapsto \frac{x}{x-1}\ ; \quad f_6 : x \mapsto \frac{x-1}{x}.$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ est un groupe pour la composition des applications. Déterminer tous ses sous-groupes. Quel est le plus petit sous-groupe de G contenant f_2 ? f_3 ? f_2 et f_3 ?

Morphismes

13 Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement et f un morphisme de G dans G'. Montrer que l'image par f d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G' et que l'image réciproque d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G. Retrouver les cas particuliers de l'image et du noyau de f.

14 On munit $\mathbb{R}$ de la l.c.i. définie par :

$$a * b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

15 Soit G un groupe noté multiplicativement et a un élément de G.

On désigne par f_a l'application : $\left| \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_a} & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{array} \right.$

1) Démontrer que f_a est un automorphisme de G. On l'appelle *automorphisme intérieur* ; on désigne par $\operatorname{Int} G$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.

2) Démontrer que l'application : $\left| \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Aut} G \\ a & \mapsto & f_a \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes, dont on déterminera l'image et le noyau.

3) En déduire que $\operatorname{Int} G$ est un groupe pour la composition des applications.

Anneaux – corps

16 Soit E un ensemble.

Montrer que $A = (\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ? Quels sont ses éléments inversibles ?

Soit X une partie de E. Montrer que $\{\varnothing, X, \complement_E X, E\}$ est un sous-anneau de A.

17 On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des réels de la forme $n + p\sqrt{2}$, où n et p sont des entiers relatifs.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

2) On considère l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ n + p\sqrt{2} & \mapsto & n - p\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

3) Pour tout élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que N est un morphisme multiplicatif de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$.

4) Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$. Donner des exemples d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

18 On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des réels de la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont des rationnels. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.

19 Montrer que tout anneau intègre fini est un corps. La réciproque est-elle vraie ?

20 Soit A un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* si :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad x^n = 0$$

1) Démontrer que, si xy est nilpotent, yx l'est aussi.

2) Démontrer que, si x et y sont deux éléments nilpotents qui commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.

3) Soit x un élément nilpotent. Démontrer que $1 - x$ est inversible et calculer son inverse.

21 Soit A un anneau tel que $\forall x \in A \quad x^2 = x$.

1) Démontrer que $\forall x \in A \quad x + x = 0$.

2) Démontrer que l'anneau A est commutatif.

3) Démontrer que, si A possède au moins trois éléments distincts, il n'est pas intègre.

Exercice posé aux oraux des concours

22 **(CCP 2006)**

Soit $(G, \times)$ un groupe tel qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a :

$$\forall k \in \{n - 1, n, n + 1\} \quad \forall (x, y) \in G^2 \quad (xy)^k = x^k y^k$$

Montrer que le groupe G est abélien.

12 Espaces vectoriels

INTRODUCTION

Dans toutes les branches des mathématiques, de nombreux objets se comportent comme des « vecteurs », c'est-à-dire que l'on peut les additionner et les multiplier par des constantes, en général réelles ou complexes : par exemple, les polynômes, les fonctions, les suites,... Il est donc intéressant d'étudier systématiquement cette structure pour éviter d'avoir à refaire sans cesse les mêmes démonstrations dans des contextes différents. Issue initialement de la géométrie, l'algèbre linéaire s'est progressivement constituée en théorie autonome avec Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), *Herman Günther Grassmann* (1809-1877) *et Arthur Cayley* (1821-1895).

OBJECTIFS

- Découvrir une structure primordiale en mathématiques, qui fonde l'algèbre linéaire, et qui a des applications dans tous les domaines.
- Utiliser les morphismes de cette structure que sont les applications linéaires.

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 • Définition

S'il n'y a pas d'ambiguïté, l'espace vectoriel sera noté E au lieu de $(E, +, \cdot)$.

Soit $\mathbb{K}$ le corps commutatif, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (en abrégé $\mathbb{K}$-espace vectoriel) un ensemble E muni de deux lois :

- Une loi interne, notée $+$, telle que $(E, +)$ soit un groupe abélien. L'élément nul sera noté 0_E.
- Une loi externe, notée $\cdot$, application de $\mathbb{K} \times E$ dans E, telle que :

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, ceux de E vecteurs.

$EV1$. $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$EV2$. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall(x, y) \in E^2 \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

$EV3$. $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$

$EV4$. $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x \quad$ (1 désigne l'élément unité du corps $\mathbb{K}$).

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

1.2 • Exemples

- Les vecteurs du plan de la géométrie usuelle forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui sert de modèle à cette structure. On se servira souvent de ce modèle pour représenter géométriquement un espace vectoriel quelconque.
- Le corps $\mathbb{K}$ lui-même est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en prenant la multiplication interne comme loi externe.
- Le corps $\mathbb{K}$ est aussi un espace vectoriel sur un de ses sous-corps $\mathbb{K}'$, en prenant comme loi externe l'application : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}' \times \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha x \end{array} \right.$

  Il ne faut pas confondre cette structure avec la précédente. Ainsi $\mathbb{C}$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais ces deux espaces vectoriels sont bien différents (nous verrons, par exemple, dans le chapitre suivant, qu'ils n'ont pas la même dimension).
- Le produit cartésien de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel grâce aux deux lois :

  $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{et} \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$$

  On peut généraliser au produit d'une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble E^X des applications d'un ensemble X quelconque dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel grâce aux deux lois :

  $$\left| \begin{array}{ccc} E^X \times E^X & \to & E^X \\ (f, g) & \mapsto & f + g \end{array} \right. \quad \text{définie par : } \forall x \in X \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

  $$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \cdot E^X & \to & E^X \\ (\alpha, f) & \mapsto & \alpha \cdot f \end{array} \right. \quad \text{définie par : } \forall x \in X \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

  Par exemple, les ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites réelles), $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (suites complexes), $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (fonctions numériques d'une variable réelle), sont des espaces vectoriels.

1.3 • Premières propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le lecteur déduira facilement les propriétés suivantes des définitions données au § 1.1. :

1) $\forall x \in E \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \cdot 0_E = 0_E$

3) $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E \qquad \left(\alpha \cdot x = 0_E \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{ou} \quad x = 0_E \right)$

4) $\forall x \in E \quad (-1) \cdot x = -x$

5) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$

6) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$

1.4 • Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire des éléments de cette famille tout vecteur x de E qui peut s'écrire sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i \quad \text{où} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$$

Pour simplifier les notations, la multiplication externe d'un espace vectoriel sera désormais notée de façon multiplicative, sans symbole particulier : on écrira αx au lieu de $\alpha \cdot x$.

Plus généralement, on appelle combinaison linéaire d'une famille quelconque toute combinaison linéaire d'une sous-famille finie.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 • Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E (en abrégé s.e.v.) toute partie F de E stable par $+$ et $\cdot$ (c'est-à-dire telle que : $\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F$ et $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \alpha x \in F$) et qui, munie des lois induites, est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.2 • Caractérisation

Théorème 1

Une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est non vide ;
- F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \alpha x + \beta y \in F$$

Pour montrer que $F \neq \varnothing$, on a intérêt à montrer que $0_E \in F$, car si ce n'est pas vrai, F n'est certainement pas un sous-espace vectoriel de E et il est inutile de poursuivre la démonstration.

Démonstration

1) Si F est un sous-espace vectoriel de E, il est non vide car c'est un sous-groupe de $(E, +)$ (il contient 0_E). Il est stable par $+$ et $\cdot$, donc par combinaison linéaire.

2) Si F est non vide et stable par combinaison linéaire, en particulier :

- $\forall (x, y) \in F^2 \quad x - y \in F$: F est donc un sous-groupe de $(E, +)$; c'est donc un groupe abélien.
- F est stable par $+$ et $\cdot$ et les propriétés 1. 2. 3. 4. de la multiplication externe de E s'étendent, en particulier, à la multiplication induite dans F. F est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

Pour montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, on pourra souvent montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu que l'on précisera.

Exemples :

- Pour tout espace vectoriel E, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.
- L'ensemble des vecteurs d'une droite est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des vecteurs du plan.
- L'ensemble des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- L'ensemble des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour s'entraîner : ex. 4 à 6

2.3 • Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Commençons par remarquer le résultat suivant :

En revanche, une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel (*cf. exercice* 7).

Théorème 2

L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

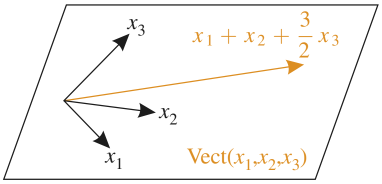
Démonstration

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, et F l'intersection de cette famille (c'est-à-dire l'ensemble des éléments appartenant à tous les F_i).
$\forall i \in I \quad 0_E \in F_i$, donc $0_E \in F$, F est donc non vide.

De plus, si x et y sont deux éléments quelconques de F, et α et β deux scalaires, $\forall i \in I \quad x \in F_i$, $y \in F_i$, donc $\alpha x + \beta y \in F_i$ et, par conséquent, $\alpha x + \beta y \in F$.

F est stable par combinaison linéaire. F est donc un sous-espace vectoriel de E.

Soit, maintenant, X une partie quelconque d'un espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par X l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X (*Doc.* 1).



Doc. 1 Sous-espace vectoriel engendré par trois vecteurs coplanaires.

Il est clair que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X. On le note $\mathrm{Vect}(X)$.

Comme il est stable par combinaison linéaire, $\mathrm{Vect}(X)$ contient toute combinaison linéaire des éléments de X. Or, l'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires est clairement un sous-espace vectoriel de E ; c'est donc le plus petit contenant X. On obtient ainsi une caractérisation de $\mathrm{Vect}(X)$, souvent plus pratique que la définition :

$\mathrm{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

Exemple :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions polynomiales est $\text{Vect}(\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\})$.

Ainsi, pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, on pourra souvent montrer que c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments d'une famille donnée.

Par exemple, si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x + y + z = 0\}$, un élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient à F si et seulement s'il s'écrit :

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

d'où $F = \text{Vect}(u, v)$, où $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$). F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.4 • Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E, le sous-espace vectoriel de E engendré par leur réunion :

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G)$$

La somme d'un élément quelconque de F et d'un élément quelconque de G est élément de $F + G$. Comme l'ensemble de toutes ces sommes est un sous-espace vectoriel, c'est nécessairement le plus petit contenant $F \cup G$; d'où :

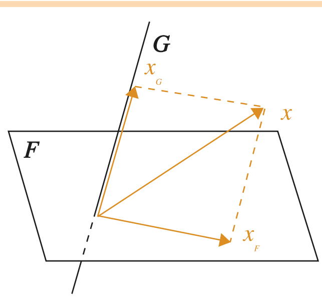
$$\boldsymbol{F + G = \{x \in E\ ,\ \exists (x_1, x_2) \in F \times G \quad x = x_1 + x_2\}}$$

$F + G$ est l'ensemble des vecteurs de E qui peuvent se décomposer en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Pour s'entraîner : ex. 8

2.5 • Sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits **supplémentaires** si tout vecteur de E peut se décomposer de façon unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (*Doc.* 2).



Doc. 2 Dans l'espace de dimension 3, un plan vectoriel et une droite vectorielle non parallèles sont supplémentaires.

Théorème 3

Les sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si :

$$F + G = E \qquad \text{et} \qquad F \cap G = \{0_E\}$$

Démonstration

1) Si F et G sont supplémentaires, tout vecteur de E est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, donc $F + G = E$. Soit $x \in F \cap G$; on peut écrire : $x = x + 0_E$ $(x \in F,\ 0_E \in G)$ et $x = 0_E + x$ $(0_E \in F,\ x \in G)$. Du fait de l'unicité de la décomposition, on peut conclure que $x = 0_E$; donc $F \cap G = \{0_E\}$.

2) Réciproquement, soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$. Tout vecteur de E peut se décomposer en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Supposons que le vecteur x ait deux décompositions :

$$x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \qquad \text{avec} \quad (x_1, x_1') \in F^2 \quad (x_2, x_2') \in G^2$$

On a alors : $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$; ce vecteur appartient à la fois à F et à G, donc il est nul. D'où $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$; la décomposition est unique ; F et G sont supplémentaires.

On dit dans ce cas que la somme $F + G$ est **directe**. On écrit : $E = F \oplus G$.

APPLICATION 1

Partie paire et partie impaire d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$

Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut se décomposer de façon unique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont non vides et stables par combinaison linéaire : ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrons qu'ils sont supplémentaires. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; si $f = g + h$ où g et h sont des fonctions respectivement paire et impaire, on doit avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Ces relations définissent donc les seules fonctions g et h susceptibles de vérifier la décomposition cherchée.

Réciproquement, on vérifie qu'on a bien, pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

où $x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ est bien une fonction paire et $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ une fonction impaire.

On a donc prouvé l'existence et l'unicité de la décomposition de f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ; c'est-à-dire :

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

3 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

3.1 • Translations

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, et a un élément fixé de E. On appelle **translation** de vecteur a l'application de E dans E : $x \mapsto x + a$.

Les propriétés suivantes sont évidentes :

- l'identité de E est une translation, de vecteur 0_E ;
- la composée de deux translations de vecteurs respectifs a et b est la translation de vecteur $a + b$; cette composée est commutative ;
- une translation est bijective ; la réciproque de la translation de vecteur a est la translation de vecteur $-a$.

Il en résulte que l'ensemble des translations de E est un sous-groupe du groupe des bijections de E dans E ; le groupe des translations est abélien.

3.2 • Sous-espace affine

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. On appelle **sous-espace affine** de E l'image d'un sous-espace vectoriel par une translation. Si W est l'image du sous-espace vectoriel F par la translation de vecteur a, pour tout $x \in F$, $a+x \in W$, et pour tout $y \in W$, $y - a \in F$. W est donc l'ensemble des éléments de E obtenus en ajoutant à a un vecteur quelconque de F ; on écrit : $W = a + F$.

Il en résulte que le sous-espace vectoriel F est unique : c'est l'ensemble des vecteurs de la forme $y - a$ où $y \in W$; on l'appelle **direction** du sous-espace affine W. On peut le noter : $F = \overrightarrow{W}$.

En revanche a n'est pas unique : ce peut être en fait n'importe quel élément de W.

Exemples :

- Un singleton $\{a\}$ est un sous-espace affine, de direction $\{0_E\}$.
- En géométrie, une droite passant par le point A, dirigée par le vecteur $\vec{u}$ non nul, est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Vect}(\vec{u})$.
- Un plan passant par le point A, dirigé par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ non colinéaires, est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.
- En analyse, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $y' + a(t)y = b(t)$ est un sous-espace affine de l'espace des fonctions dérivables, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre : $y' + a(t)y = 0$ (de même pour une équation différentielle linéaire du second ordre).

Par analogie avec les deux premiers exemples, on considérera souvent les éléments d'un sous-espace affine comme des points, et ceux de sa direction comme des vecteurs. Si a est représenté par le point A et b par le point B, on notera $\overrightarrow{AB}$ la différence $b - a$. Avec ces notations, la direction du sous-espace affine W est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques de W.

3.3 • Parallélisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces affines W et W' sont dits **parallèles** si la direction de l'un est incluse dans la direction de l'autre.

Exemples :

- Une droite D est parallèle à un plan P si $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$, c'est-à-dire si quels que soient les points A et B de D, il existe des points A', B' de P tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
- Deux plans P et P' sont parallèles s'ils ont la même direction : $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P'}$. Ici, du fait de l'égalité, cette relation est transitive : deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

ATTENTION

Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles entre elles, pas plus que deux plans parallèles à une même droite.

3.4 • Intersection de deux sous-espaces affines

Théorème 4
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. L'intersection de deux sous-espaces affines W et W' est soit vide, soit un sous-espace affine dont la direction est l'intersection des directions de W et W'.

Démonstration
Il est clair que $W \cap W'$ peut être vide (par exemple deux droites non coplanaires de l'espace).
Supposons que $W \cap W' \neq \varnothing$, et considérons un élément A de cette intersection.
$\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$ est un sous-espace vectoriel de E. Pour tout point M de E :

$$\begin{aligned} M \in W \cap W' &\iff M \in W \text{ et } M \in W' \\ &\iff \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W} \text{ et } \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W'} \\ &\iff \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'} \end{aligned}$$

Donc : $W \cap W' = A + \left(\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}\right)$.

$W \cap W'$ est le sous-espace affine contenant A de direction $\overrightarrow{W} \cap \overrightarrow{W'}$.

Pour s'entraîner : ex. 9

4 Barycentres

4.1 • Barycentre d'un système de points pondérés

Soit E un espace vectoriel réel. Les éléments de E seront considérés soit comme des points soit comme des vecteurs. Nous noterons E l'ensemble des points et $\overrightarrow{E}$ l'ensemble des vecteurs.

On appelle point pondéré de E un couple $(A, \alpha) \in E \times \mathbb{R}$. Le réel α est appelé masse ou coefficient affecté au point A.

Soit $(A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ un système fini de points pondérés.

Considérons l'application φ de E dans $\overrightarrow{E}$ définie par :

$$\forall M \in E \qquad \overrightarrow{\varphi(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Pour tout point O de E :

$$\overrightarrow{\varphi(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)} - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{OM}$$

- Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, $\quad \forall M \in E \quad \overrightarrow{\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O)}$: l'application φ est constante.
- Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$:

$$\forall M \in E \quad \forall \vec{u} \in \overrightarrow{E} \qquad \overrightarrow{\varphi(M)} = \vec{u} \iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\left(\overrightarrow{\varphi(O)} - \vec{u}\right)$$

L'application φ est bijective. En particulier, il existe un point G unique tel que $\overrightarrow{\varphi(G)} = \vec{0}$. Ce point G est appelé **barycentre** du système $(A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
Il faut connaître trois relations essentielles caractérisant le barycentre G du système $(A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ dans le cas où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$:

(1)	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$	(Définition)
(2)	$\forall O \in E \quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$	(Position)
(3)	$\forall M \in E \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}$	(Utilisation)

La relation (1) exprime que $\overrightarrow{\varphi(G)} = \vec{0}$. La relation (2) est la conclusion du calcul effectué plus haut, lorsque $\vec{u} = \vec{0}$. Elle sert à placer le barycentre par rapport à un point O connu (qui peut être l'un des points du système). Cette même relation permet de calculer les coordonnées du barycentre dans un repère d'origine O. La relation (3), qui est en fait la même, écrite différemment, sert à transformer une expression du type $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ en une autre dans laquelle le point M n'intervient qu'une seule fois.

APPLICATION 2

Utilisation d'un barycentre

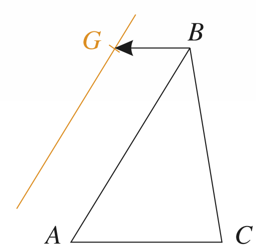
Soit A, B, C trois points non alignés. Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Le système $\{(A, 1), (B, 2), (C, -1)\}$ admet un barycentre G. L'égalité (2) appliquée à partir du point B donne :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

L'égalité (3) donne $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

L'ensemble cherché est donc la droite Δ passant par G et parallèle à (AB) (*Doc.* 3).



Doc. 3

4.2 • Propriétés

1) Commutativité

Le barycentre d'un système est indépendant de l'ordre des points pondérés.

2) Homogénéité

Le barycentre d'un système est inchangé si on multiplie toutes les masses par un même réel non nul.

En particulier, le barycentre d'un système de points A_i tous affectés d'une même masse α non nulle est indépendant de α. Il est appelé **isobarycentre** de la famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3) Associativité

Le barycentre d'un système est inchangé si on remplace un sous-système de masse totale non nulle par son barycentre partiel affecté de cette masse.

Démonstration

Soit $(A_i,\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système de points pondérés de masse $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ et de barycentre G. On suppose $n \geqslant 2$. Soit un sous-système de p points pondérés de masse non nulle ($1 \leqslant p \leqslant n-1$). En permutant les points pondérés, on peut considérer qu'il s'agit des p premiers : $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i \neq 0$. Soit H le barycentre du sous-système $(A_i,\alpha_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. En appliquant l'égalité (3) au sous-système pour le point $M = G$; on obtient :

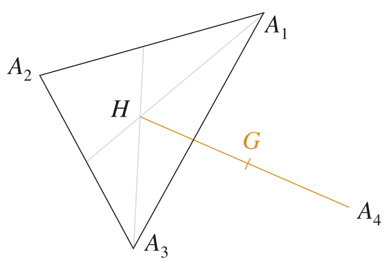
$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\overrightarrow{GH}$$

En reportant dans l'égalité de définition de G :

$$\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)\overrightarrow{GH} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

ce qui prouve que G est le barycentre du système :

$$\left\{\left(H,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right),(A_{p+1},\alpha_{p+1}),\cdots,(A_n,\alpha_n)\right\}$$



Doc. 4 G barycentre de $(A_1,1)$, $(A_2,1)$, $(A_3,1)$, $(A_4,3)$ est le barycentre de $(H,3)$ et $(A_4,3)$, où H est l'isobarycentre de A_1, A_2 et A_3.

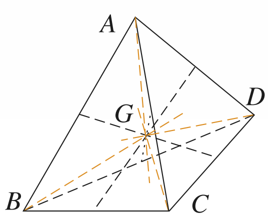
Cette propriété facilite la construction d'un barycentre, en permettant tous les regroupements de points désirés.

APPLICATION 3

Sept droites concourantes dans un tétraèdre

Montrer que, dans un tétraèdre $(ABCD)$, les droites joignant les milieux de deux côtés opposés, ainsi que les droites joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée, sont toutes les sept concourantes.

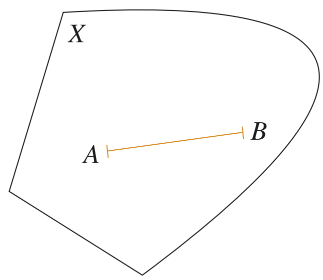
Il suffit de remarquer que l'isobarycentre de A, B, C, D est à la fois l'isobarycentre des milieux de deux côtés opposés, et le barycentre d'un sommet affecté de la masse 1 et de l'isobarycentre des trois autres affecté de la masse 3.



Doc. 5

Pour s'entraîner : ex. 10 et 11

4.3 • Parties convexes



Doc. 6 Partie convexe.

Étant donné deux points A et B de E, on appelle segment $[AB]$ l'ensemble des barycentres de A et B affectés de masses positives. En ramenant la masse totale à 1, on peut dire que $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des systèmes $\{(A, 1-\lambda), (B, \lambda)\}$ où $\lambda \in [0, 1]$, c'est-à-dire des points G tels que :

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1].$$

$$[AB] = \{A + \lambda \overrightarrow{AB}\ ,\ \lambda \in [0, 1]\}$$

Une partie X de E est dite convexe si, dès qu'elle contient deux points A et B, elle contient le segment $[AB]$ (*Doc.* 6).

C'est-à-dire : $\quad X$ convexe $\iff \forall (A, B) \in X^2 \quad [AB] \subset X$

Exemples : Un sous-espace affine est convexe. Une demi-droite, un demi-plan sont convexes. Un disque, une boule (intérieur d'une sphère) sont convexes.

Mais un cercle ou une sphère ne sont pas convexes. La réunion de deux droites distinctes n'est pas convexe.

On remarque que, grâce à l'associativité de la barycentration, une partie est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration à masses positives.

5 Applications linéaires

5.1 • Morphisme d'espaces vectoriels

ATTENTION

La linéarité d'une application donnée peut dépendre du corps $\mathbb{K}$.
S'il y a ambiguïté, on dira que f est $\mathbb{K}$-linéaire.
Par exemple, l'application :
$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}\right.$ est $\mathbb{R}$-linéaire, mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit E et F deux espaces vectoriels **sur le même corps** $\mathbb{K}$. Une application f de E dans F est dite linéaire, si c'est un morphisme pour chacune des deux lois $+$ et $\cdot$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \textbf{1)} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \textbf{2)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

ce qui équivaut à l'unique égalité :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Une application linéaire f de E dans F est, en particulier, un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$; on a donc :

$$f(0_E) = 0_F$$
$$\forall x \in E \quad f(-x) = -f(x)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E, F)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Théorème 5
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

Démonstration
L'application nulle est linéaire.
Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :
Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ $\forall (x,y) \in E^2$ $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) &= \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y)\\ &= \lambda(\alpha f(x) + \beta f(y)) + \mu(\alpha g(x) + \beta g(y)) \quad \text{(linéarité de } f \text{ et } g)\\ &= \alpha\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) + \beta\big(\lambda f(y) + \mu g(y)\big)\\ &= \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + \beta(\lambda f + \mu g)(y)\end{aligned}$$

donc $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

Cas particuliers

Voir au paragraphe 5.4 la structure de groupe de cet ensemble.

On appelle :
- Endomorphisme de E, une application linéaire de E dans E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. C'est un sous-espace vectoriel de E^E.
- Isomorphisme, une application linéaire bijective.
- Automorphisme de E, une application linéaire bijective de E dans E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$.
- Forme linéaire sur E, une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^*. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^E$, appelé espace dual de E.

k étant un scalaire non nul, l'application $k\mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E, appelé homothétie de rapport k.

Pour s'entraîner : ex. 12 et 13

5.2 • Noyau et image d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de f l'ensemble des antécédents de 0_F dans E. On le note $\mathrm{Ker}\, f$:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E\ ,\ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

On appelle image de f l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent par f dans E. On le note $\mathrm{Im}\, f$:

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in F\ ,\ \exists x \in E \quad f(x) = y\} = f(E)$$

Théorème 6
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.
1) $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.
3) f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
4) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, on pourra encore montrer que c'est le noyau ou l'image d'une certaine application linéaire.

- Dans l'exemple cité plus haut, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ,\ x+y+z=0\}$ est le noyau de la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) \mapsto x+y+z$$

c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant des primitives est l'image de l'application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $f \mapsto f'$; c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Démonstration

1) $\operatorname{Ker} f$ est non vide, car $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \operatorname{Ker} f$.
Montrons que $\operatorname{Ker} f$ est stable par combinaison linéaire. Soit $(x, y) \in (\operatorname{Ker} f)^2$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $f(x) = f(y) = 0_F$; d'où :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0_F$$

donc : $\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} f$.

2) $\operatorname{Im} f$ est non vide, car $f(0_E) = 0_F$, donc $0_F \in \operatorname{Im} f$.
Montrons que $\operatorname{Im} f$ est stable par combinaison linéaire. Soit $(y_1, y_2) \in (\operatorname{Im} f)^2$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\exists (x_1, x_2) \in E^2\ y_1 = f(x_1)\ , y_2 = f(x_2)$; d'où :

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

donc $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{Im} f$.

3) Si f est injective, $f(x) = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$, donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x-y) = 0_F$, donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$ et, par conséquent, $x - y = 0_E$. f est donc injective.

4) La surjectivité de f équivaut, par définition, à $\operatorname{Im} f = F$.

APPLICATION 4

Une équivalence très utile : $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$

Soit E, F *et* G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels,*

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{L}(F, G).$$

Démontrer que :

$$g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$$

1) Supposons $g \circ f = 0$ et soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g(y) = g \circ f(x) = 0_G$, donc $y \in \operatorname{Ker} g$; d'où $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

2) Supposons $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$, donc $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = 0_G$, et, par conséquent, $g \circ f = 0$.

En particulier, si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E :

$$f \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$$

Pour s'entraîner : ex. 14 à 16

5.3 • Composition des applications linéaires

Théorème 7

Soit E, F, G trois espaces vectoriels **sur le même corps** $\mathbb{K}$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
$g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} g \circ f\ (\alpha x + \beta y) = g(f(\alpha x + \beta y)) &= g\big(\alpha f(x) + \beta f(y)\big) \quad \text{(linéarité de } f\text{)} \\ &= \alpha\, g\big(f(x)\big) + \beta\, g\big(f(y)\big) \quad \text{(linéarité de } g\text{)} \\ &= \alpha\, g \circ f\ (x) + \beta\, g \circ f\ (y) \end{aligned}$$

d'où $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Théorème 8
Soit E et F deux espaces vectoriels **sur le même corps** $\mathbb{K}$. La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in F^2$.

$$\begin{aligned} \alpha\, y_1 + \beta\, y_2 &= \alpha\, f\big(f^{-1}(y_1)\big) + \beta\, f\big(f^{-1}(y_2)\big) \\ &= f\big(\alpha\, f^{-1}(y_1) + \beta\, f^{-1}(y_2)\big) \quad \text{(linéarité de } f\text{)} \end{aligned}$$

donc $f^{-1}(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha f^{-1}(y_1) + \beta f^{-1}(y_2)$, ce qui signifie que $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Théorème 9
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Les applications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{L}(E, G) \\ f & \mapsto & g \circ f \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) & \to & \mathcal{L}(E, G) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

sont linéaires ; c'est-à-dire que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^2 \quad \forall g \in \mathcal{L}(F, G) \quad g \circ (\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha(g \circ f_1) + \beta(g \circ f_2)$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \forall (g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^2 \quad (\alpha g_1 + \beta g_2) \circ f = \alpha(g_1 \circ f) + \beta(g_2 \circ f)$$

On dit que l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{L}(E, G) \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f \end{array} \right.$$

est bilinéaire.

Démonstration
Soit $x \in E$:

$$\begin{aligned} g \circ (\alpha\, f_1 + \beta\, f_2)\ (x) = g(\alpha\, f_1(x) + \beta\, f_2(x)) &= \alpha\, g\big(f_1(x)\big) + \beta\, g\big(f_2(x)\big) \quad \text{(linéarité de } g\text{)} \\ &= \alpha\, g \circ f_1\ (x) + \beta\, g \circ f_2\ (x) = \big(\alpha\, g \circ f_1 + \beta\, g \circ f_2\big)(x) \end{aligned}$$

(La linéarité de f n'intervient pas.)

$$\begin{aligned} (\alpha\, g_1 + \beta\, g_2) \circ f\ (x) = (\alpha\, g_1 + \beta\, g_2)\big(f(x)\big) &= \alpha\, g_1\big(f(x)\big) + \beta\, g_2\big(f(x)\big) \\ &= \alpha\, g_1 \circ f\ (x) + \beta\, g_2 \circ f\ (x) = \big(\alpha\, g_1 \circ f + \beta\, g_2 \circ f\big)(x) \end{aligned}$$

(Dans ce sens, ni la linéarité de f, ni celle de g n'interviennent.)

5.4 • Anneau des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. D'après le théorème 5, $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; en particulier, $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien.

La composition des applications est une loi de composition interne dans $\mathcal{L}(E)$. Cette opération est associative. Elle possède un élément neutre qui est l'identité de E : en effet, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u = u$.

D'après le théorème 9, la composition des applications est également distributive par rapport à l'addition. On en déduit que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 10
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble de ses endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ est un anneau.

On pourra calculer dans cet anneau presque aussi facilement que dans celui des nombres complexes ou celui des polynômes. On adoptera, le plus souvent, une simple notation multiplicative pour la composition des applications dans $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que l'on écrira uv pour $u \circ v$ et u^3 pour $u \circ u \circ u$.

Il faudra seulement prendre garde que l'anneau $\mathcal{L}(E)$ n'est, en général, **pas commutatif** (par exemple : $(u+v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2$ et non pas $u^2 + 2uv + v^2$). Rappelons que la formule du binôme ne s'applique dans un anneau qu'à deux éléments **qui commutent.**

Par ailleurs, on notera que l'égalité $v \circ u = 0$ n'implique pas nécessairement que $u = 0$ ou $v = 0$ (*cf. Application* 2).

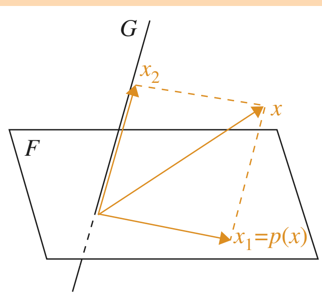
L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E. C'est un groupe pour la composition des applications, appelé groupe linéaire de E et noté $\mathcal{GL}(E)$:

$$\mathcal{GL}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)\ ,\ \exists u^{-1} \in \mathcal{L}(E) \quad uu^{-1} = u^{-1}u = \mathrm{Id}_E\}$$

6 Projecteurs et symétries

6.1 • Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On sait que tout élément x de E peut s'écrire de façon unique $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ (*Doc.* 7).



Doc. 7 Projection vectorielle.

On appelle projection sur F parallèlement à G l'application p de E dans E, qui à x associe x_1. On dit aussi que p est un projecteur.

On montre facilement que p est un endomorphisme de E et que :

$$\mathrm{Im}\, p = F \quad ; \quad \mathrm{Ker}\, p = G$$

Notons également que $\forall x \in F \quad p(x) = x$.

6.2 • Caractérisation d'un projecteur

Théorème 11

Un endomorphisme p d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Démonstration

1) Si p est la projection sur F parallèlement à G, pour tout $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, $p(x) = x_1$ et $p \circ p\,(x) = p(x_1) = x_1 = p(x)$; d'où $p \circ p = p$.

2) Soit p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Montrons que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires et que p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

Soit $x \in E$, $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$. Or $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$, car $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p\,(x) = 0$; donc $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p$.

Soit $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$. Comme $x \in \mathrm{Im}\, p$, il existe $t \in E$ tel que $x = p(t)$. Comme $x \in \mathrm{Ker}\, p$, $p(x) = 0$. Or $p(x) = p \circ p\,(t) = p(t) = x$, d'où $x = 0$; donc $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{0\}$. $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont bien supplémentaires ; la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$ est l'application $x \mapsto p(x)$, c'est-à-dire p.

Pour s'entraîner : ex. 17 à 22

6.3 • Symétrie

F et G étant toujours des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'application s de E dans E qui, à $x = x_1 + x_2$ $(x_1 \in F, x_2 \in G)$ associe $x_1 - x_2$ (*Doc.* 8).

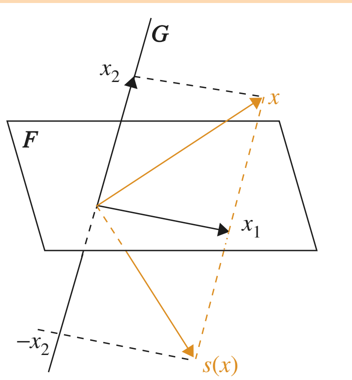
Si l'on désigne par p_1 la projection sur F parallèlement à G, et par p_2 la projection sur G parallèlement à F, alors $s = p_1 - p_2$. s est donc un endomorphisme de E.

$$x \in \mathrm{Ker}\, s \iff x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = 0 \ :$$

$$\mathrm{Ker}\, s = \{0\}, \ s \text{ est injectif.}$$

$\forall x \in E \quad x = x_1 + x_2 = s(x_1 - x_2)$: $\mathrm{Im}\, s = E$, s est surjectif.

Une symétrie est donc un automorphisme de E.



Doc. 8 Symétrie vectorielle.

6.4 • Caractérisation d'une symétrie

Théorème 12

Un endomorphisme s d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une symétrie si et seulement s'il est involutif, c'est-à-dire : $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration

1) Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, pour tout $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, $s(x) = x_1 - x_2$ et $s \circ s\,(x) = x_1 + x_2 = x$; d'où $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

2) Soit s un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Posons $p_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)$ et $p_2 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E - s)$.

Montrons que p_1 et p_2 sont des projecteurs :

$$p_1^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E + 2s + s^2) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s) = p_1$$

et

$$p_2^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_E - 2s + s^2) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E - s) = p_2$$

Par ailleurs, $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$: si p_1 est la projection sur F parallèlement à G, p_2 est la projection sur G parallèlement à F. Or $s = p_1 - p_2$.

s est donc la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

MÉTHODE

Pour montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel :

- s'il s'agit de lois tout à fait nouvelles, il faut vérifier :
  - que $(E, +)$ est un groupe abélien,
  - que la loi externe vérifie les points EV1, EV2, EV3, EV4 de la définition *(cf. exercices* 2 *et* 3) ;
- s'il s'agit de la restriction à E des lois d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ contenant E, il suffit de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (voir ci-après).

Pour montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E, on peut :

- vérifier que F est non vide et stable par combinaison linéaire (*cf. exercices* 4 *à* 6) ;
- montrer que F est le sous-espace vectoriel engendré par une famille, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de cette famille (*cf. exercice* 4) ;
- montrer que F est le noyau ou l'image d'une application linéaire ;
- montrer que F est une intersection de sous-espaces vectoriels ;
- montrer que F est une somme de sous-espaces vectoriels.

Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires, on peut :

- montrer que $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$;
- montrer que tout élément de E se décompose de façon unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G (*cf. Application* 1) .

Pour montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur, on peut :

- montrer que $p \circ p = p$ (*cf. exercices* 17 *à* 22 *)*;
- montrer que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont supplémentaires et que :

$$\forall x \in \mathrm{Im}\, p \quad p(x) = x$$

Pour montrer qu'un endomorphisme s de E est une symétrie, on peut :

- montrer que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$;
- montrer que $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires.

Exercice résolu

ENDOMORPHISMES QUI COMMUTENT

Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$, u *et* v *deux endomorphismes de* E *qui commutent :* $u \circ v = v \circ u$.

1 *Démontrer que* $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont stables par* v, *et* $\operatorname{Im} v$, $\operatorname{Ker} v$ *stables par* u.
Rappel : on dit qu'un s.e.v. F *est stable par un endomorphisme* f *si :* $\forall x \in F$, $f(x) \in F$.

2 *On suppose de plus que* $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$; *démontrer que :*

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

Conseils

Prendre $x \in \operatorname{Im} u$ et montrer que $v(x) \in \operatorname{Im} u$.

Prendre $x \in \operatorname{Ker} u$ et montrer que $v(x) \in \operatorname{Ker} u$.

Prendre $x \in \operatorname{Im} u$ et montrer que $x \in \operatorname{Ker} v$.

Utiliser la symétrie entre u et v.

Solution

1) Soit $x \in \operatorname{Im} u$; il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$; on a alors $v(x) = v \circ u\,(t)$. Comme $v \circ u = u \circ v$, $v(x) = u \circ v\,(t) = u\big(v(t)\big)$: $v(x)$ appartient à $\operatorname{Im} u$.
$\operatorname{Im} u$ est donc stable par v.

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$; $u(x) = 0$, donc $v \circ u\,(x) = 0$. Comme $v \circ u = u \circ v$, $u \circ v\,(x) = 0$, c'est-à-dire $u\big(v(x)\big) = 0$: $v(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} u$.
$\operatorname{Ker} u$ est donc stable par v.

Comme u et v jouent le même rôle, $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont également stables par u.

2) On suppose que $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$. Soit $x \in \operatorname{Im} u$: il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$. Décomposons le vecteur t : $t = t_1 + t_2$, avec $t_1 \in \operatorname{Ker} u$, $t_2 \in \operatorname{Ker} v$.
$x = u(t_1) + u(t_2) = u(t_2)$, puisque $u(t_1) = 0$. On a alors

$$v(x) = v \circ u\,(t_2) = u \circ v\,(t_2) = u\big(v(t_2)\big) = 0\,,$$

puisque $v(t_2) = 0$. Donc $x \in \operatorname{Ker} v$. On a montré que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

Comme u et v jouent le même rôle, on a de même $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

b) L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

c) Un sous-espace vectoriel de E contient nécessairement 0_E.

d) La réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

e) La somme de deux sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel les contenant.

f) Si deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires, tout vecteur de E qui n'appartient pas à l'un appartient à l'autre.

g) Si f est une application linéaire de E dans F, $f(0_E) = 0_F$.

h) L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel est un anneau pour $+$ et $\circ$.

i) La somme de deux automorphismes d'un espace vectoriel E est un automorphisme de E.

j) Si p est un projecteur, les éléments de $\operatorname{Im} p$ sont invariants par p.

Structure d'espace vectoriel

2 L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies ci-dessous est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

a) $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (y + y', x + x') \\ \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \alpha \cdot (x, y) = (\alpha y, \alpha x) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, 0) \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x x', y y') \\ \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \end{cases}$

f) $\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (0, 0) \\ \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \end{cases}$

3 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que le produit cartésien $E \times E$ muni de l'addition habituelle :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$(a + ib) \cdot (x, y) = (a \cdot x - b \cdot y, a \cdot y + b \cdot x)$$

est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.

(Cet espace vectoriel est appelé complexifié de E.)

Sous-espaces vectoriels

4 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = 0\}$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = 1\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy \geqslant 0\}$.

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x = 0\}$.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y\}$.

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x + 3y = 0\}$.

5 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a) Ensemble des suites croissantes.

b) Ensemble des suites monotones.

c) Ensemble des suites bornées.

d) Ensemble des suites convergeant vers 0.

e) Ensemble des suites périodiques.

f) Ensemble des suites arithmétiques.

g) Ensemble des suites géométriques.

h) Ensemble des suites (x_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

6 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a) Ensemble des fonctions positives.

b) Ensemble des fonctions s'annulant en 0.

c) Ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

d) Ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

e) Ensemble des fonctions périodiques.

f) Ensemble des fonctions support borné (nulles en dehors d'un segment).

g) Ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

h) Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire sans second membre.

7 Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.

8 Soit F, G, H trois s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.
Comparer :

a) $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$

b) $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$

Montrer que :

$$F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$$

Sous-espaces affines et barycentres

9 Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$, et F, G deux sous-espaces affines dont les directions vérifient : $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$.

1) Démontrer que $F \cap G \neq \varnothing$.

2) Déterminer $F \cap G$ dans le cas où $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$.

3) Démontrer que deux hyperplans disjoints sont parallèles.

10 Soit A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinq points non alignés 3 à 3 d'un espace affine E. Soit $M_1 \in (A_1A_2)$, M_2 le point d'intersection de (A_2A_3) et de la parallèle à (A_1A_3) passant par M_1 ; M_3 le point d'intersection de (A_3A_4) et de la parallèle à (A_2A_4) passant par M_2 et ainsi de suite... Que peut-on dire de la suite de points (M_n) ?

11 Soit A, B, C trois points non alignés d'un espace vectoriel E.

α, β, γ sont trois réels tels que :

– le système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ admet un barycentre G ;

– le système $\{(A, -\alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ admet un barycentre G_1 ;

– le système $\{(A, \alpha), (B, -\beta), (C, \gamma)\}$ admet un barycentre G_2 ;

– le système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, -\gamma)\}$ admet un barycentre G_3.

1) Démontrer que les droites (AG_1), (BG_2), (CG_3) concourent en G.

2) Démontrer que les droites (G_2G_3), (G_3G_1), (G_1G_2) passent respectivement par A, B, C.

Applications linéaires

12 Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}$-linéaires ?

a) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y - z) \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathrm{Re}\,(z) \end{array}$ **d)** $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$

e) $\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{c} \text{suites} \\ \text{convergentes} \end{array} \right\} & \to & \mathbb{R} \\ (u_n) & \mapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \end{array}$

13 On considère les éléments de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

1) Démontrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de e_1 et e_2.

2) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Démontrer qu'il existe quatre réels a, b, c, d tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

3) Réciproquement, vérifier que l'application f définie ci-dessus est linéaire, quels que soient les réels a, b, c, d.

14 Démontrer qu'il existe une application linéaire unique de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1) \quad f(1, 1, 0) = (1, 0) \quad f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

Calculer $f(x, y, z)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

15 Démontrer qu'il existe une application linéaire unique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(1, 2) = (1, 1, 0) \qquad f(2, 1) = (0, 1, 1)$$

Calculer $f(x, y)$. Déterminer le noyau et l'image de f.

16 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$$

$$\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\} \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$$

Projecteurs

17 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et p un projecteur de E.

1) Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.

2) Comparer les images et les noyaux de p et $\mathrm{Id}_E - p$.

18 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un s.e.v. F de E est stable par u si $\forall x \in F \quad u(x) \in F$. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Ker}\, p$ sont stables par u si et seulement si u commute avec p.

19 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et p, q deux projecteurs de E. Montrer que :

$$pq = p \iff \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$$

$$pq = q \iff \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$$

20 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et p, q deux projecteurs de E.

1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$.

2) Montrer que, dans ce cas :

$$\mathrm{Im}\,(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$$

21* Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe deux scalaires α et β distincts tels que :

$$(f - \alpha\, \mathrm{Id}_E)(f - \beta\, \mathrm{Id}_E) = 0$$

1) Démontrer que :

$$\mathrm{Im}\,(f - \beta\, \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, \mathrm{Id}_E)$$

2) Démontrer que :

$$(f - \beta\, \mathrm{Id}_E)(f - \alpha\, \mathrm{Id}_E) = 0$$

En déduire que :

$$\mathrm{Im}\,(f - \alpha\, \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \beta\, \mathrm{Id}_E)$$

3) Démontrer que :

$$\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, \mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(f - \beta\, \mathrm{Id}_E)$$

sont supplémentaires dans E.

4) On note p la projection sur $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f - \beta\, \mathrm{Id}_E)$, et q la projection sur $\mathrm{Ker}\,(f - \beta\, \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f - \alpha\, \mathrm{Id}_E)$.
Démontrer que $f = \alpha p + \beta q$.

5) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = \alpha^n p + \beta^n q$$

6) On suppose que $\alpha\beta \neq 0$.
Démontrer que f est bijectif et calculer f^m pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

22* Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
On pose :

$$F = \{\, x \in E, \quad f(x) = ix \,\}$$

et

$$G = \{\, x \in E, \quad f(x) = -ix \,\}$$

1) Montrer que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E.

2) Exprimer f en fonction des projecteurs associés F et G.

Exercices posés aux oraux des concours

23 (Petites Mines 2000)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P(1 - X)$.
Montrer que f est une symétrie et en préciser les éléments caractéristiques.

24 (Petites Mines 2006)

Soit $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.

1) Δ est-elle linéaire ? Déterminer $\mathrm{Ker}\, \Delta$.

2) La restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle injective ? surjective ?

3) Déterminer P tel que $\Delta(P) = X^3$; en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

4) Montrer que $\Delta^n(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X+k)(-1)^{n-k}$.

25 (Petites Mines 2007)

Soit E un espace vectoriel.
Pour $k \in \mathbb{R}$, on pose $A_k = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u^2 = ku\}$.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in A_k$ soit inversible. Donner alors son inverse.

2) On suppose $k \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \{x \in E,\ u(x) = kx\}$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires dans E . Que peut-on dire si $k = 0$?

3) pour $k \neq 0$ et $(u, v) \in A_k$, montrer que $u + v \in A_k$ si, et seulement si $u \circ v = v \circ u = 0$.
Montrer qu'alors $\mathrm{Im}\,(u + v) = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}\,(u + v) = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$.

13 Polynômes

INTRODUCTION

Les bacheliers connaissent les fonctions polynomiales. Nous allons définir ici un polynôme, indépendamment de la notion de fonction, comme la simple succession de ses coefficients. Les polynômes servent en effet à bien d'autres choses qu'à construire des fonctions. Nous découvrirons une analogie très étroite entre l'anneau des polynômes et celui des entiers relatifs : division euclidienne, algorithme d'Euclide, P.G.C.D., théorème de Bézout,... Nous retrouverons, dans le cas où le corps des coefficients est infini, l'isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ *est le corps commutatif* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

OBJECTIFS

- Étude de l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Utilisation des polynômes formels pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

1 Ensemble $\mathbb{K}[X]$

1.1 • Définition formelle d'un polynôme

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ une suite $(a_0, a_1, \cdots)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nuls à partir d'un certain rang. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Donc, par définition, deux polynômes $A = (a_0, a_1, \cdots)$ et $B = (b_0, b_1, \cdots)$ sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad a_i = b_i$$

On appelle polynôme nul le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

On appelle degré d'un polynôme non nul $A = (a_0, a_1, \cdots)$ le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n correspondant est appelé coefficient dominant du polynôme A. Si le coefficient dominant est 1, le polynôme est dit unitaire.

Par convention, on dit que le degré du polynôme nul est $-\infty$. On convient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$-\infty < n$ et $(-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

1.2 • Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

On définit dans $\mathbb{K}[X]$:

1) Une addition

Soit $A = (a_0, a_1, \cdots)$ et $B = (b_0, b_1, \cdots)$ deux polynômes. On pose :

$$A + B = (a_0 + b_0,\ a_1 + b_1, \cdots)$$

Il est clair que cette suite s'annule à partir d'un rang au plus égal au successeur du plus grand des degrés de A et B. Il s'agit bien d'un polynôme et :

$$\deg(A + B) \leqslant \max\,(\deg A, \deg B)$$

L'addition est donc une l.c.i. dans $\mathbb{K}[X]$. Elle est évidemment commutative, associative ; le polynôme nul est élément neutre et tout polynôme $A = (a_0, a_1, \cdots)$ a un opposé $-A = (-a_0, -a_1, \cdots)$.

$(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien.

2) Une multiplication interne

Soit $A = (a_0, a_1, \cdots)$ et $B = (b_0, b_1, \cdots)$ deux polynômes. On pose :

$$AB = \Big(a_0 b_0,\ a_0 b_1 + a_1 b_0, \cdots, \sum_{i+j=n} a_i b_j, \cdots\Big)$$

Cette suite s'annule à partir du rang égal au successeur de la somme des degrés de A et B. Il s'agit bien d'un polynôme et :

$$\deg(AB) = \deg A + \deg B$$

La multiplication est donc une l.c.i. dans $\mathbb{K}[X]$. Elle est commutative.

Montrons qu'elle est associative.
Soit $A = (a_0, a_1, \cdots)$, $B = (b_0, b_1, \cdots)$, $C = (c_0, c_1, \cdots)$ trois polynômes.
Posons $(AB)C = (d_0, d_1, \cdots)$, $A(BC) = (e_0, e_1, \cdots)$.

$$d_n = \sum_{m+k=n} \left(\sum_{i+j=m} a_i b_j \right) c_k = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$$

$$e_n = \sum_{i+p=n} \left(a_i \sum_{j+k=p} b_j c_k \right) = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$$

D'où $(AB)C = A(BC)$.

De plus, la multiplication admet pour élément neutre le polynôme $1_{\mathbb{K}[X]} = (1, 0, 0, \cdots)$ et elle est distributive par rapport à l'addition.

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.

3) Une multiplication externe par les réels

Soit $P = (a_0, a_1, \cdots)$ un polynôme. On pose $\alpha.P = (\alpha a_0, \alpha a_1, \cdots)$

On vérifie aisément que :

$(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, noté $\mathbb{K}_n[X]$.

1.3 • Notation définitive

Considérons le polynôme $X = (0, 1, 0, \cdots)$. On calcule facilement les puissances de X :

$$X^0 = (1, 0, 0, 0, \cdots) \qquad X^1 = (0, 1, 0, 0, \cdots)$$
$$X^2 = (0, 0, 1, 0, \cdots) \qquad X^3 = (0, 0, 0, 1, \cdots) \qquad \text{etc.}$$

On remarque que tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini de polynômes X^k (où $k \in \mathbb{N}$) :

$$P = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, \cdots) = a_0 X^0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Nous adopterons désormais cette notation pour les polynômes. Il ne faut pas perdre de vue que la lettre X désigne un polynôme et non un élément du corps $\mathbb{K}$.

1.4 • Intégrité de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

Théorème 1

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

Démonstration

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif non nul ; montrons qu'il ne possède pas de diviseurs de zéro. Soit A et B deux polynômes non nuls. $\deg A \geqslant 0$ et $\deg B \geqslant 0$, donc $\deg(AB) = \deg A + \deg B \geqslant 0$. Par conséquent, le polynôme AB n'est pas nul.

Théorème 2

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0 (appelés polynômes constants non nuls).

Démonstration

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg A = 0$, $A = a_0 1_{\mathbb{K}[X]}$, où $a_0 \neq 0$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{a_0} 1_{\mathbb{K}[X]}$.
Réciproquement, si A est inversible, $AA^{-1} = 1_{\mathbb{K}[X]}$, donc $\deg A + \deg A^{-1} = 0$. D'où $\deg A = \deg A^{-1} = 0$.

L'ensemble des polynômes constants (nuls ou non), noté $\mathbb{K}_0[X]$, est un corps commutatif et l'application $a_0 \mapsto a_0 1_{\mathbb{K}[X]}$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}_0[X]$. On peut donc identifier un polynôme constant à son coefficient et écrire un polynôme de degré n sous la forme :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \text{ (avec } a_n \neq 0\text{)}$$

Pour s'entraîner : ex. 2 à 4

2 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

2.1 • Multiples et diviseurs d'un polynôme

Comme dans $\mathbb{Z}$, on peut définir les notions de multiple et de diviseur d'un polynôme.
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$; s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BC$, on dit que :

- A est un multiple de B ;
- B est un diviseur de A (ou « B divise A », notation : $B|A$).

On note $B\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes multiples de B. Nous conviendrons de noter $D(A)$ l'ensemble des polynômes qui divisent A.

Les propriétés sont exactement les mêmes que pour les entiers :

1) la somme de deux multiples de B est un multiple de B ;

2) l'opposé d'un multiple de B est un multiple de B ;

3) tout multiple d'un multiple de B est un multiple de B ;

4) si B divise deux polynômes, il divise leur somme ;

5) tout diviseur d'un diviseur de A est un diviseur de A ;

6) 0 est un multiple de tout polynôme. Tout polynôme divise 0.

Mais un polynôme non nul n'est pas un diviseur-de-zéro... piège du vocabulaire.

2.2 • Polynômes associés

Soit A et B deux polynômes qui se divisent mutuellement :

$$\exists C \in \mathbb{K}[X] \quad A = BC \quad \text{et} \quad \exists C' \in \mathbb{K}[X] \quad B = AC'$$

Si $A \neq 0$, on en déduit que $CC' = 1$, donc C et C' sont inversibles, c'est-à-dire de degré 0. Les polynômes A et B sont égaux à un facteur inversible près.

Si $A = 0$, alors $B = 0$. On a alors, dans tous les cas, l'équivalence :

$$\big(A|B \text{ et } B|A\big) \iff \exists k \in \mathbb{K}^* \quad A = kB$$

On dit alors que A et B sont associés. Dans toutes les propriétés de divisibilité, on peut remplacer un polynôme par un polynôme associé.

Exemple : Les polynômes $X - \frac{1}{2}$, $2X - 1$, $-2X + 1$ sont associés.

Ceci correspond dans $\mathbb{Z}$ au cas de deux entiers relatifs égaux ou opposés. Tout polynôme non nul est associé à un polynôme unitaire et un seul.

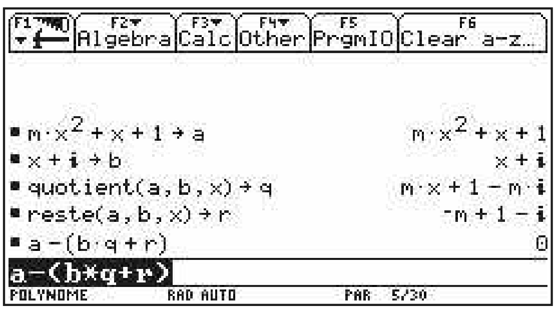
2.3 • Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 3

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$.
Il existe un couple unique (Q, R) de polynômes tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

Q est appelé *quotient*, et R *reste* de la division euclidienne de A par B.



La TI-92 n'effectue pas directement la division euclidienne de deux polynômes.
Nous vous proposons pour cela les fonctions suivantes :

a) Degré d'un polynôme

```
degre(p,x)
Func
If limit(p,x,∞)=0 Then
Return −∞
Else
limit(x*d(p,x)/p,x,∞)
EndIf
EndFunc
```

b) Quotient de la division euclidienne

```
quotient(a,b,x)
Func
Local da,db,q
degre(a,x) → da
degre(b,x) → db
If da<db Then
Return 0
Else
a/(b*x∧(da-db)) → q
limit(q,x,∞) → q
q*x∧(da-db) → q
q+quotient(a-q*b,b,x)
EndIf
EndFunc
```

c) Reste de la division

```
reste(a,b,x)
Func
a-b*quotient(a,b,x)
EndFunc
```

Notons que ces procédures fonctionnent aussi bien sur des polynômes à coefficients réels que complexes, dépendant éventuellement de paramètres.

Démonstration

1) Existence

Soit p le degré de B. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple (Q, R) pour tout polynôme A de degré strictement inférieur à n.

- Si $\deg(A) < p$, le couple (O, A) convient : la récurrence est fondée pour tout $n \leqslant p$.
- Soit n un entier supérieur ou égal à p tel qu'il existe un couple (Q, R) pour tout polynôme A de degré strictement inférieur à n, et soit A un polynôme de degré n. Posons $A = a_nX^n + \cdots + a_0$ et $B = b_pX^p + \cdots + b_0$ $(b_p \neq 0)$.

Soit $Q_1 = \dfrac{a_n}{b_p}X^{n-p}$. Le monôme dominant de Q_1B est a_nX^n, de sorte que le polynôme $A' = A - Q_1B$ a un degré strictement inférieur à n. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad A' = QB + R \quad \text{avec} \quad \deg R < p$$

$$A - Q_1B = QB + R\,, \quad \text{d'où} \quad A = (Q_1 + Q)B + R \quad \text{avec} \quad \deg R < p.$$

L'existence est établie pour tout polynôme A de degré n donc pour tout polynôme de degré strictement inférieur à $n + 1$.

2) Unicité

Supposons que $A = BQ + R = BQ' + R'$ avec $\deg R < \deg B$ et $\deg R' < \deg B$.
Alors $\deg(R - R') \leqslant \max(\deg R, \deg R') < \deg B$.
Or $R - R' = B(Q' - Q)$. D'où $\deg(Q' - Q) < 0$, ce qui signifie que $Q' - Q = 0$.
On en déduit $Q = Q'$ et $R = R'$.

Disposition pratique des calculs :

On peut poser une division de polynômes exactement comme une division d'entiers :

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} -BQ_1 & Q_1 \\ \hline A - BQ_1 & \end{array}$$

et on recommence jusqu'à l'obtention d'un reste de degré strictement inférieur à celui de B.

On voit sur cet exemple qu'une étape de la division peut abaisser le degré de plus d'une unité. C'est ce qui nécessite la récurrence forte de la démonstration d'existence.

Exemple :

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2X^4 & -X^3 & +X^2 & +X & -1 & X^2 \ +X \ +2 \\ \cline{6-6} -2X^4 & -2X^3 & -4X^2 & & & 2X^2 \ -3X \\ \cline{1-5} & -3X^3 & -3X^2 & +X & -1 & \\ & +3X^3 & +3X^2 & +6X & & \\ \cline{2-5} & & & 7X & -1 & \end{array}$$

D'où $\quad 2X^4 - X^3 + X^2 + X - 1 = (X^2 + X + 2)(2X^2 - 3X) + 7X - 1.$

Pour s'entraîner : ex. 5 à 9

3 Diviseurs communs de deux polynômes

3.1 • Algorithme d'Euclide

On peut étendre aux polynômes l'algorithme d'Euclide étudié pour les entiers :

Théorème 4

L'ensemble des diviseurs communs de deux polynômes A et B est l'ensemble des diviseurs d'un unique polynôme. Ce polynôme, qui est nul si $A = B = 0$, et que l'on peut choisir unitaire si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, est appelé *P.G.C.D.* de A et B, et noté $A \wedge B$.

Démonstration

On peut supposer, quitte à échanger A et B. que $\deg A \geqslant \deg B$. Notons $D(A)$ l'ensemble des diviseurs de A.

- Si $B = 0$, les diviseurs communs de A et B sont ceux de A :

$$D(A) \cap D(0) = D(A).$$

- Si $B \neq 0$, effectuons la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. Tout diviseur de A et B divise R. Tout diviseur de B et R divise A. On a donc l'égalité :

$$D(A) \cap D(B) = D(B) \cap D(R)$$

On peut poursuivre l'algorithme tant que le reste obtenu est non nul.

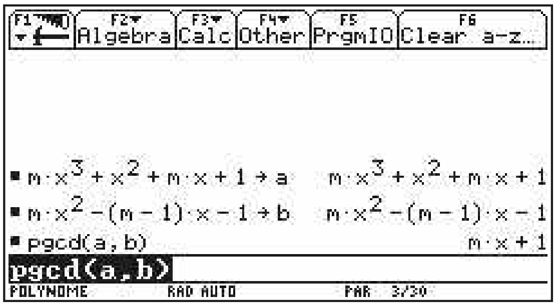
$$\begin{aligned} D(A) \cap D(B) &= D(B) \cap D(R) = D(R) \cap D(R_1) = D(R_1) \cap D(R_2) = \cdots \\ &= D(R_{k-1}) \cap D(R_k) \end{aligned}$$

On aboutit nécessairement à un reste nul en un nombre fini d'étapes, car sinon la suite des restes successifs serait une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible.

Supposons que $R_k \neq 0$ et $R_{k+1} = 0$, on a alors :

$$D(A) \cap D(B) = \cdots = D(R_{k-1}) \cap D(R_k) = D(R_k) \cap D(0) = D(R_k)$$

R_k est un diviseur commun de A et B, et tout diviseur commun de A et B est un diviseur de R_k. On appelle P.G.C.D. de A et B le polynôme unitaire associé à R_k.



Calcul du P.G.C.D. de deux polynômes.
La TI-92/Voyage 200 simplifie automatiquement une fraction rationnelle A/B en divisant numérateur et dénominateur par le P.G.C.D. $A \wedge B$. Pour obtenir ce P.G.C.D., il suffit de lui faire avouer par quel polynôme elle a simplifié...

```
pgcd(a,b)
Func
a/(getNum(a/b))
EndFunc
```

Le P.G.C.D. de deux polynômes non nuls est le polynôme unitaire associé au dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

Exemple : Calculer $(X^4 - 3X^2 - 4) \wedge (X^3 + 2X^2 - X - 2)$.

$$X^4 - 3X^2 - 4 = (X^3 + 2X^2 - X - 2)(X - 2) + 2X^2 - 8$$
$$X^3 + 2X^2 - X - 2 = (X^2 - 4)(X + 2) + 3X + 6$$
$$X^2 - 4 = (X + 2)(X - 2)$$

Le P.G.C.D. cherché est donc $X+2$ (on peut remplacer à chaque étape le reste trouvé par le polynôme unitaire qui lui est associé).

Comme dans $\mathbb{Z}$, on peut montrer qu'un polynôme est la somme d'un multiple de A et d'un multiple de B si et seulement si c'est un multiple de leur P.G.C.D. $A \wedge B$:

$$A\,\mathbb{K}[X] + B\,\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\,\mathbb{K}[X]$$

Pour s'entraîner : ex. 10

3.2 • Polynômes premiers entre eux

Deux polynômes A et B sont dits premiers entre eux si leur P.G.C.D. est 1 : $A \wedge B = 1$. Leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes constants. On retrouve le théorème de Bézout et ses corollaires, dont les démonstrations sont exactement les mêmes que dans $\mathbb{Z}$:

Theorème 5 (théorème de Bézout)
Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

Corollaire 5.1 (théorème de Gauss)
Si un polynôme divise un produit de deux polynômes et qu'il est premier avec l'un des facteurs, il divise l'autre.

$$(A|BC \text{ et } A \wedge B = 1) \Rightarrow A|C$$

Corollaire 5.2
Si un polynôme est divisible par deux polynômes premiers entre eux, il est divisible par leur produit.

$$(A|C \;;\; B|C \;;\; A \wedge B = 1) \Rightarrow AB|C$$

Exemple : Si un polynôme P possède deux racines distinctes a et b, il est divisible par $(X - a)$ et par $(X - b)$, qui sont premiers entre eux, donc il est divisible par $(X - a)(X - b)$.

Corollaire 5.3

Si un polynôme est premier avec deux autres, il est premier avec leur produit.

$$(A \wedge C = 1 \text{ et } B \wedge C = 1) \quad \Rightarrow \quad AB \wedge C = 1$$

Pour s'entraîner : ex. 11 à 14

APPLICATION 1

Recherche de l'ensemble des couples (U, V) vérifiant l'égalité de Bézout

Montrer que les polynômes $A = X^3 + 1$ et $B = X^2 + 1$ sont premiers entre eux. Déterminer l'ensemble des couples $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

$$\begin{aligned} X^3 + 1 &= (X^2 + 1)\,X - (X - 1) \\ X^2 + 1 &= (X - 1)\,(X + 1) + 2 \end{aligned}$$

Donc A et B sont premiers entre eux. L'algorithme d'Euclide nous donne un couple (U_0, V_0) vérifiant le théorème de Bézout :

$$\begin{aligned} 2 &= (X^2 + 1) - (X - 1)(X + 1) \\ &= (X^2 + 1) - [(X^2 + 1)X - (X^3 + 1)](X + 1) \\ 2 &= (X^3 + 1)(X + 1) - (X^2 + 1)(X^2 + X - 1) \end{aligned}$$

D'où $A\,U_0 + B\,V_0 = 1$, avec :

$$(U_0, V_0) = \left(\frac{1}{2}(X + 1),\ \frac{1}{2}(-X^2 - X + 1)\right)$$

Cherchons l'ensemble des couples (U, V) tels que $A\,U + B\,V = 1$:

$$\begin{cases} A\,U + B\,V = 1 \\ A\,U_0 + B\,V_0 = 1 \end{cases}$$

D'où $A\,(U - U_0) = B\,(V_0 - V)$.

A divise $B\,(V_0 - V)$ et il est premier avec B, donc il divise $(V_0 - V)$: il existe un polynôme C tel que $V_0 - V = A\,C$, d'où :

$$U - U_0 = B\,C.$$

Réciproquement, quel que soit le polynôme C, le couple $(U_0 + B\,C, V_0 - A\,C)$ vérifie $A\,U + B\,V = 1$.

L'ensemble des solutions est donc :

$$(U, V) = \left(\frac{1}{2}(X + 1) + (X^2 + 1)\,C\ ,\ \frac{1}{2}(-X^2 - X + 1) - (X^3 + 1)\,C\right), \quad C \in \mathbb{K}[X].$$

3.3 • Polynômes irréductibles

Un polynôme non constant est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes qui lui sont associés.

Les polynômes irréductibles jouent le même rôle dans $\mathbb{K}[X]$ que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. On retrouve en particulier une décomposition en produit de facteurs irréductibles :

ATTENTION

L'irréductibilité d'un polynôme peut dépendre du corps de base :

$X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ dans $\mathbb{R}[X]$, mais il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ dans $\mathbb{C}[X]$, mais il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Lemme 6.1

Tout polynôme non constant possède au moins un diviseur irréductible.

Démonstration

Soit P un polynôme non constant. L'ensemble des degrés des diviseurs non constants de P est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, qui possède donc un plus petit élément n_0. Soit D_0 un diviseur de P de degré n_0. Un diviseur de D_0 non constant et non associé à D_0 serait un diviseur de P de degré strictement inférieur à n_0, ce qui contredit la définition de n_0. Donc D_0 est irréductible.

Contrairement au cas des entiers, il n'existe aucun moyen systématique de décomposer un polynôme… Nous allons voir que ce problème est lié à la recherche des racines du polynôme.

Théorème 6

Tout polynôme non constant est un produit de facteurs irréductibles. La décomposition est unique, sauf à changer un facteur en un facteur associé ou à modifier l'ordre des facteurs.

La démonstration est exactement la même que celle de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.

4 Racines d'un polynôme

4.1 • Fonction polynomiale

À un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on peut attacher une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$:

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\widetilde{P}} & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} \right.$$

appelée fonction polynomiale associée à P. Il ne faut pas confondre *a priori* le polynôme P et la fonction $\widetilde{P}$. Dans certains corps $\mathbb{K}$, deux polynômes distincts peuvent donner la même fonction polynomiale [(1)] ... Cependant, pour simplifier, on notera le plus souvent $P(x)$ au lieu de $\widetilde{P}(x)$.

[(1)] Nous verrons plus loin que cela ne peut pas se produire avec les corps usuels $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, la notion de fonction polynomiale peut être étendue à d'autres ensembles. On peut ainsi définir des polynômes de matrices, des polynômes d'endomorphismes d'un espace vectoriel, ou même des polynômes de polynômes (polynôme composé) :

Il n'y a pas de différence entre $P(X)$ et P, puisque :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P.$$

La notation $P(X)$ peut s'avérer utile (*cf.* ultérieurement la formule de Taylor).

Exemples : $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X - 1$

$$P(Q) = P(X-1) = (X-1)^2 + (X-1) + 1 = X^2 - X + 1$$

4.2 • Racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On appelle racine de P (ou zéro) tout élément a du corps $\mathbb{K}$ tel que $P(a) = 0$.

Théorème 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Un élément a de $\mathbb{K}$ est une racine de P si et seulement si $(X - a)$ divise P.

Démonstration

Effectuons la division euclidienne de P par $(X-a)$:

$$P=(X-a)Q+R \quad \text{avec} \quad \deg R<1$$

Le polynôme R est donc constant. En remplaçant X par a, on obtient $R=P(a)$.

On en déduit que P est divisible par $(X-a)$ si et seulement si $P(a)=0$.

Corollaire 7.1

Un polynôme de degré $n \geqslant 0$ possède au plus n racines distinctes.

Démonstration

Soit P un polynôme de degré n. Supposons que P possède $(n+1)$ racines distinctes $(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$. P est divisible par $(X-a_i)$ et comme ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux, P est divisible par leur produit, qui est de degré $(n+1)$: ceci constitue une contradiction. Donc P a au plus n racines distinctes.

Si a est une racine de P, P peut être divisible par $(X-a)^2$ ou $(X-a)^3$. On appelle ordre de multiplicité de la racine a, le plus grand entier m tel que P soit divisible par $(X-a)^m$. On appelle racine double une racine d'ordre 2, racine triple une racine d'ordre 3, etc.

Pour s'entraîner : ex. 15

4.3 • Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales

Théorème 8

L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, qui à un polynôme P associe la fonction polynomiale $\widetilde{P}$, est un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et d'anneaux. Si le corps $\mathbb{K}$ est infini (par exemple, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), ce morphisme est injectif. C'est alors un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynomiales.

Démonstration

L'application est un morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et d'anneaux, car pour tout $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]$:

$$\widetilde{1}=1 \qquad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2 \ \widetilde{\alpha P+\beta Q}=\alpha\widetilde{P}+\beta\widetilde{Q} \qquad \widetilde{PQ}=\widetilde{P}\widetilde{Q}$$

Soit P et Q deux polynômes tels que $\widetilde{P}=\widetilde{Q}$. Alors $\forall x\in\mathbb{K}\ \widetilde{P}(x)=\widetilde{Q}(x)$. Le polynôme $P-Q$ admet tout élément du corps $\mathbb{K}$ pour racine. Si $\mathbb{K}$ est infini, $P-Q$ a une infinité de racines, il est donc nul : $P=Q$. Le morphisme $P\mapsto\widetilde{P}$ est injectif. C'est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ dans son image, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions polynomiales.

C'est cet isomorphisme qui permet « d'identifier » les coefficients de deux polynômes admettant la même fonction polynomiale, c'est-à-dire :

$$\left(\forall x\in\mathbb{K} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k=\sum_{k=0}^{n} a'_k x^k\right) \iff \left(\forall k\in[\![0,n]\!] \quad a_k=a'_k\right)$$

5 Dérivation des polynômes

5.1 • Polynôme dérivé

Cette définition est choisie pour que, sur le corps des réels, la fonction polynomiale associée à P' soit la dérivée de $\widetilde{P}$, cependant elle ne nécessite aucun recours à l'analyse et en particulier à la notion de limite.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré inférieur ou égal à n. On appelle polynôme dérivé de P le polynôme $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

On montre facilement que pour tous polynômes P et Q :

- si $\deg P \leqslant 0$, $\quad P' = 0$
- si $\deg P \geqslant 1$, $\deg P' = \deg P - 1$
- $(P+Q)' = P' + Q'$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha P)' = \alpha P'$

L'application $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, dont le noyau est l'ensemble des polynômes constants.

- $(PQ)' = P'Q + PQ'$

On définit de même les polynômes dérivés successifs de P :

$$P'' = (P')' \quad P^{(3)} = (P'')' \quad \cdots \quad P^{(n)} = (P^{(n-1)})'$$

On convient que $P^{(0)} = P$.

Exemple à connaître : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^n$. Démontrer que :

- si $0 \leqslant k \leqslant n \quad , \quad P^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$
- si $K > n \quad , \quad P^{(k)} = 0$.

5.2 • Formule de Taylor

Théorème 9

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 0$ et a un élément de $\mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

Démonstration

Raisonnons par récurrence forte sur n :

- si $n = 0$, $P(X) = \dfrac{P^{(0)}(a)}{0!}(X-a)^0$;
- soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la formule soit vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, et soit P un polynôme de degré n. Effectuons la division euclidienne de P par $(X-a)^n$:

$$P(X) = (X-a)^n Q + R \quad \text{avec} \quad \deg Q = 0 \quad \text{et} \quad \deg R \leqslant n-1$$

Posons $Q = \lambda$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme R :

$$P(X) = \lambda(X-a)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

En dérivant successivement cette relation, on obtient :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!] \quad P^{(p)}(X) = \frac{\lambda\, n!}{(n-p)!}(X-a)^{n-p} + \sum_{k=p}^{n-1} \frac{R^{(k)}(a)}{k!}\,\frac{k!}{(k-p)!}(X-a)^{k-p}$$

et : $$P^{(n)}(X) = \lambda\, n!$$

D'où $$\forall p \in [\![0, n-1]\!] \quad P^{(p)}(a) = R^{(p)}(a) \quad \text{et} \quad P^{(n)}(a) = \lambda\, n!$$

En définitive : $$P(X) = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

La seconde formule se déduit de la première en remplaçant X par $X + a$.

On peut avoir besoin d'écrire la formule de Taylor pour un entier n supérieur ou égal au degré de P, ce qui ne pose pas de problème, sachant que :

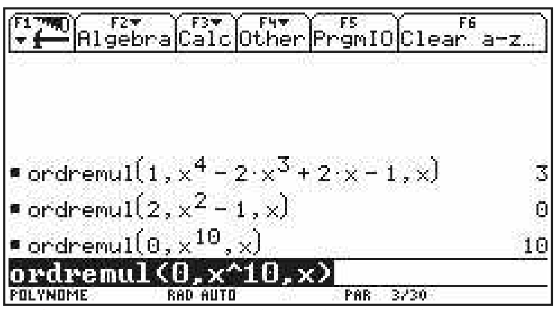
$$\forall k > \deg P \quad P^{(k)}(a) = 0$$

5.3 • Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine

Théorème 10

Soit a une racine du polynôme P. L'ordre de multiplicité de a est égal à l'entier $m \geqslant 1$ si et seulement si :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$



La fonction suivante calcule l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme :

```
ordremul(a,p,x) Func
Local m
0 → m
While (p|x=a)=0
m+1 → m
d(p,x) → p
EndWhile
m
EndFunc
```

Démonstration

Pour tout entier $m \leqslant \deg P$, la formule de Taylor donne la division euclidienne de P par $(X-a)^m$:

$$P = (X-a)^m Q_m + R_m \quad \text{où} \quad R_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k, \quad \text{car} \quad \deg R_m < m.$$

L'ordre de multiplicité de a est le plus grand entier m tel que $R_m = 0$.
Or :

$$R_m(X+a) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

donc :

$$R_m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in [\![0, m-1]\!] \quad P^{(k)}(a) = 0$$

m est le plus grand entier vérifiant ces égalités si et seulement si $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Pour s'entraîner : ex. 16 et 17

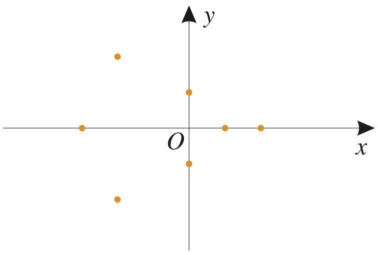
6 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

6.1 • Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Le corps des complexes possède une propriété tout à fait remarquable, à tel point qu'elle est parfois nommée théorème fondamental de l'algèbre. Elle est plus connue sous les noms de d'Alembert, qui l'a conjecturée, et Gauss qui l'a démontrée.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), philosophe, écrivain et mathématicien français.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855), mathématicien, physicien et astronome allemand. L'un des plus grands génies des mathématiques, il s'intéressa à l'arithmétique, aux nombres complexes, à la théorie des surfaces, aux géométries non euclidiennes ainsi qu'aux probabilités.



Doc. 1 Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels.

Théorème 11 (théorème de d'Alembert-Gauss)
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine.

La démonstration, qui relève de l'analyse, est complètement hors-programme. Les conséquences de ce théorème sont immédiates et très importantes dans la pratique :

Corollaire 11.1
1) Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2) Tout polynôme de degré $n \geqslant 0$ de $\mathbb{C}[X]$ possède exactement n racines, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Démonstration
1) Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X]$. P n'est pas constant, donc il possède au moins une racine a. P est divisible par $(X-a)$, et comme il est irréductible, il est associé à $(X-a)$: $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* \quad P = \lambda(X-a)$. D'où $\deg P = 1$.

2) Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 0$ de $\mathbb{C}[X]$. La décomposition de P en produit de facteurs irréductibles est de la forme :

$P = \lambda(X-a_1)^{m_1}(X-a_2)^{m_2}\cdots(X-a_p)^{m_p}$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k = n$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$a_1, a_2, \cdots, a_p$ étant des complexes distincts 2 à 2.
P a donc n racines, à condition que chaque racine a_k soit comptée m_k fois.

6.2 • Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 0$ de $\mathbb{R}[X]$. P possède n racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité. Si z est une racine d'ordre m :

$$P(z) = P'(z) = \cdots = P^{(m-1)}(z) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(z) \neq 0$$

En conjuguant, on obtient :

$$P(\overline{z}) = P'(\overline{z}) = \cdots = P^{(m-1)}(\overline{z}) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\overline{z}) \neq 0$$

car tous ces polynômes sont à coefficients réels.

$\overline{z}$ est donc aussi racine de P, avec le même ordre de multiplicité que z.

Les racines complexes de P sont donc :

– soit réelles,
– soit non réelles conjuguées deux à deux, avec le même ordre de multiplicité.

Dans la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$, regroupons les facteurs correspondant à deux racines non réelles conjuguées :

$$(X-z)^m(X-\overline{z})^m = (X^2+bX+c)^m, \quad \text{avec} \quad b = -2\mathrm{Re}\,(z)\,,\ c = |z|^2$$

On obtient un polynôme de degré 2 à coefficients réels, irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Son discriminant $b^2 - 4c$ est strictement négatif.

Le polynôme P peut donc se décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$P = \lambda(X-a_1)^{m_1}\cdots(X-a_p)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1}\cdots(X^2+b_qX+c_q)^{n_q}$$

où $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont les racines réelles de P, et $(X^2+b_jX+c_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ des trinômes réels à discriminant strictement négatif.

Tout polynôme réel pouvant se décomposer de cette façon, il en résulte que :

ATTENTION

Il ne faut pas croire qu'un polynôme qui n'a pas de racine réelle est nécessairement irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, par exemple :

$$X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2$$
$$= (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1).$$

Théorème 12

Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
– les polynômes de degré 1 ;
– les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Corollaire 12.1

Tout polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ possède au moins une racine réelle.

Démonstration

Les racines non réelles de P sont conjuguées deux à deux, elles sont donc en nombre pair. Si le nombre total de racines complexes de P est impair, le nombre de racines réelles est impair ; il n'est donc jamais nul.

Pour s'entraîner : ex. 18 à 21

APPLICATION 2

Caractérisation des polynômes positifs de $\mathbb{R}[X]$

Soit E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sommes de deux carrés :

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X]\,,\quad \exists (A,B)\in\mathbb{R}[X]^2 \quad P = A^2+B^2\}$$

1) *Montrer que l'ensemble E est stable par multiplication.*

2) *Soit $P = X^2+bX+c$, avec $b^2-4c<0$. Montrer que $P\in E$.*

3) *Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\quad P\in E$
(2) $\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)\geqslant 0$
(3) $\quad$ *P a un coefficient dominant positif et aucune racine réelle d'ordre impair.*

Soit $P = A^2+B^2 = |A+iB|^2$

et $\quad Q = A'^2+B'^2 = |A'+iB'|^2$

deux éléments de E.

$$PQ = |(A+iB)(A'+iB')|^2$$
$$= (AA'-BB')^2 + (AB'+A'B)^2$$

Donc PQ appartient à E.

2) Écrivons P sous la forme canonique :

$$X^2+bX+c = \left(X+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2$$

P est bien la somme de deux carrés.

3) Effectuons une démonstration circulaire :
(1) $\Rightarrow$ (2) : si P est la somme de deux carrés, il est positif sur $\mathbb{R}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : au voisinage d'une racine réelle d'ordre impair, un polynôme change de signe.
Donc si P reste toujours positif, c'est que toutes ses racines réelles sont d'ordre pair. Le signe du polynôme est alors partout celui de son coefficient dominant.

(3) $\Rightarrow$ (1) : si P a un coefficient dominant positif et aucune racine réelle d'ordre impair, ses facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[X]$ sont :
– soit des carrés de la forme $(X-a)^{2m}$;
– soit des trinômes unitaires à discriminant strictement négatif, dont on a vu à la question précédente qu'ils étaient sommes de deux carrés.

De plus, le coefficient dominant de P est également somme de deux carrés.

P est donc un produit d'éléments de E, donc d'après la question **1)**, il est lui-même élément de E.

Les trois propriétés sont donc équivalentes.

7 Relations entre coefficients et racines

7.1 • Polynôme scindé

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé, si c'est un produit de polynômes de degré 1. Un polynôme de degré n ($n \geqslant 1$) est scindé si et seulement si il possède exactement n racines dans $\mathbb{K}$ comptées chacune avec son ordre de multiplicité (c'est-à-dire plus précisément, si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est n).
Il découle du théorème de d'Alembert-Gauss que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est donc toujours scindé dans $\mathbb{C}[X]$; il est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si toutes ses racines complexes sont réelles.

7.2 • Racines d'un polynôme scindé de degré $\leqslant 3$

Rappelons le calcul classique de la somme et du produit des racines d'un trinôme du second degré.
Soit P un polynôme scindé de degré 2 de $\mathbb{K}[X]$. Désignons par x_1, x_2 les racines, distinctes ou non, de P. P peut s'écrire sous forme développée et sous forme factorisée :

$$P = aX^2 + bX + c = a(X-x_1)(X-x_2) \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

En développant le second membre et en identifiant avec le premier, on obtient :

$$\begin{cases} b = a\,(-x_1 - x_2) \\ c = a\,x_1x_2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Reprenons ce calcul pour un polynôme scindé de degré 3, admettant pour racines x_1, x_2, x_3, distinctes ou non :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3) \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

$$\begin{cases} b = a\,(-x_1 - x_2 - x_3) \\ c = a\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ d = -a\,x_1x_2x_3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

7.3 • Généralisation

Généralisons au cas d'un polynôme P scindé de degré $n \in \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{K}[X]$. Désignons par $x_1, \cdots, x_n$ les racines de P, distinctes ou non (chacune étant répétée avec son ordre de mutiplicité).
P peut s'écrire sous forme développée et sous forme factorisée, avec $a_n \neq 0$:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$$

En développant le second membre et en identifiant avec le premier, on obtient :

$$\begin{cases} a_{n-1} & = & a_n\,(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n) \\ a_{n-2} & = & a_n\,(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots x_{n-1} x_n) \\ & \cdots & \\ a_0 & = & a_n\,(-1)^n\, x_1 x_2 \cdots x_n \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n & = & \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ & \cdots & \\ x_1 x_2 \cdots x_n & = & (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

La relation la plus générale donne la somme des $\binom{n}{p}$ produits possibles de p racines :

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p} = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}$$

Application : Ces relations permettent de calculer des fonctions symétriques des racines, c'est-à-dire des expressions dans lesquelles toutes les racines jouent le même rôle. Par exemple, calculons la somme des carrés des racines d'un polynôme scindé :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &= \frac{a_{n-1}^2 - 2 a_n a_{n-2}}{a_n^2} \end{aligned}$$

Pour s'entraîner : ex. 25 à 28

MÉTHODE

- Pour caractériser la division euclidienne de A par B, on écrit $A = BQ + R$, sans oublier la condition $\deg R < \deg B$ *(cf. exercices* 5 *et* 6 *).*

- Pour montrer que B divise A, on peut :
  - montrer que le reste de la division euclidienne de A par B est nul ;
  - montrer que B divise un produit AC où C est premier avec B ;
  - si B est scindé, montrer que toute racine d'ordre m de B est une racine d'ordre $m' \geqslant m$ de A *(cf. exercices* 7 *à* 9 *).*

- Pour montrer que D est le P.G.C.D. de A et B, on peut :
  - utiliser l'algorithme d'Euclide *(cf. exercice* 10 *)* ;
  - montrer que D est un diviseur commun de A et B et que les polynômes $\dfrac{A}{D}$ et $\dfrac{B}{D}$ sont premiers entre eux *(cf. exercice* 12 *).*

- Pour démontrer que deux polynômes A et B sont premiers entre eux, chercher deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

- Pour trouver l'ensemble des couples $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ vérifiant $AU + BV = A \wedge B$:
  - chercher une solution particulière en remontant l'algorithme d'Euclide ;
  - puis comparer une solution quelconque avec cette solution particulière *(cf. exercice* 11 *).*

- Pour montrer que a est une racine d'ordre m du polynôme P, on peut :
  - montrer que P est divisible par $(X - a)^m$, mais pas par $(X - a)^{m+1}$;
  - montrer que a est racine des polynômes $P, P', \cdots, P^{(m-1)}$, mais pas du polynôme $P^{(m)}$ *(cf. exercices* 22 *et* 23 *).*

- Pour démontrer des propriétés des racines d'un polynôme scindé, on peut utiliser l'ensemble des relations entre coefficients et racines *(cf. exercices* 25 *à* 28 *).*

Exercice résolu

POLYNÔMES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ deux n-uplets de réels. On demande de déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ qui prennent en chaque point a_i la valeur b_i,

On considère le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ le polynôme Q_i défini par $Q = (X - a_i)Q_i$,

1 *Déterminer les coefficients réels* α_i *pour que le polynôme* $P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i$ *vérifie pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$,

2 *En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant cette propriété. Quel est celui qui a le plus petit degré ?*

3 *Application : déterminer l'ensemble des polynômes* P *tels que* $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$, $P(1) = -1$,

4 *Soit* P *un polynôme tel que pour tout* $x \in \mathbb{Z}$, $P(x) \in \mathbb{Z}$, *Démontrer que les coefficients de* P *sont des rationnels.*

Conseils

Le polynôme Q_i s'annule pour tous les a_j où $j \neq i$.

Comparer une solution quelconque avec la solution particulière trouvée à la question **1)**.

Calculer les coefficients α_1, α_2, α_3 à affecter aux polynômes :

$$Q_1 = X(X-1),$$
$$Q_2 = (X+1)\,(X-1),$$
$$Q_3 = (X+1)X.$$

Choisir $(m+1)$ réels a_1, $a_2, \ldots,$ a_{m+1}, de préférence entiers pour pouvoir utiliser la propriété du polynôme P.

Solution

1) Le polynôme Q_i est donné par : $Q_i(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j)$, Par conséquent, si $j \neq i$, $Q_i(a_j) = 0$, On a donc, pour $P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i$, $P(a_i) = \alpha_i Q_i(a_i)$,
Le polynôme P satisfait donc la condition cherchée si et seulement si : $\alpha_i = \dfrac{b_i}{Q_i(a_i)}$, c'est-à-dire :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{Q_i(a_i)} Q_i(X) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j)}{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

2) Appelons P_0 le polynôme trouvé à la première question. Un polynôme P quelconque est solution si et seulement si le polynôme $P - P_0$ admet $a_1, a_2, \cdots, a_n$ pour racines, c'est-à-dire s'il est divisible par Q, L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des polynômes de la forme :

$$P = P_0 + A\,Q$$

où A est un polynôme quelconque. Comme $\deg P_0 = n - 1$ et $\deg Q = n$, le degré de $P_0 + AQ$ est supérieur ou égal à n dès que A est non nul. P_0 est donc l'unique solution de degré $n - 1$.

3) Construisons le polynôme P_0 de degré 2 tel que :

$$P_0(-1) = 1, P_0(0) = -1, P_0(1) = -1 \ :$$

$$P_0(X) = \frac{X(X-1)}{(-1)(-1-1)} - \frac{(X+1)(X-1)}{(0+1)(0-1)} - \frac{(X+1)X}{(1+1)(1)} = X^2 - X - 1$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des polynômes P de la forme :

$$P(X) = X^2 - X - 1 + A(X)(X^3 - X) \quad \text{où } A \in \mathbb{R}[X]$$

4) Soit m le degré du polynôme P, Si $P = 0$, la propriété est évidente ; supposons donc $m \geqslant 0$, Appliquons le résultat de la question 2) avec :

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \cdots,\ a_{m+1} = m+1$$

P est l'unique polynôme de degré m prenant aux points $1, 2, \cdots, m+1$ les valeurs entières $P(1), P(2), \cdots, P(m+1)$. On a donc :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{P(i)}{Q_i(i)} Q_i(X)$$

Les polynômes Q_i sont à coefficients entiers, les valeurs $Q_i(i)$ sont des entiers, tout comme les $P(i)$; les coefficients de P sont donc des rationnels.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Le degré de la somme de deux polynômes est le plus grand des deux degrés.

b) Le degré du produit de deux polynômes est la somme des deux degrés.

c) Les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement si aucun des deux ne divise l'autre.

d) S'il existe des polynômes U et V tels que $AU + BV = D$, alors le polynôme D est le P.G.C.D. des polynômes A et B.

e) Si un polynôme est divisible par deux polynômes, il est divisible par leur produit.

f) Si un polynôme est premier avec deux polynômes, il est premier avec leur produit.

g) Tout polynôme non constant qui n'a pas de racines est irréductible.

h) Tout polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$ possède n racines distinctes.

i) Le produit des racines d'un polynôme scindé unitaire de degré n est $(-1)^n P(0)$.

Calcul sur les polynômes

2 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (X^3 + X^2 + X + 1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$$

3 **1)** Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

2) Calculer les polynômes (P_n) jusqu'à $n = 10$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos nx = P_n(\cos x)$.

4) En déduire les racines du polynôme P_n.

4 Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que :

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

5 Effectuer la division euclidienne de A par B :

1) $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$; $B = X^2 - 3X + 1$.

2) $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$; $B = X + 3$.

3) $A = X^3 - iX^2 - X$; $B = X - 1 + i$.

4) $A = iX^4 - X^3 + 2iX + 1$; $B = (1-i)X^2 + iX + 1 + i$.

6 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et a un élément de $\mathbb{K}$.

1) Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$? En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X - a)$ divise P.

2) Calculer en fonction de a, $P(a)$, $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X - a)^2$ divise P.

3) Soit b un élément de $\mathbb{K}$ distinct de a. Calculer en fonction de a, b, $P(a)$, $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(X - a)(X - b)$ divise P.

7 À quelle condition le polynôme $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $B = X^2 + X + 1$?

8 Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, le polynôme $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X - 1)^2$. Calculer le quotient.

9 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme
$A_n = X^n \sin\theta - X \sin n\theta + \sin(n-1)\theta$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$. Calculer le quotient.

10* Soit n et m deux entiers strictement positifs.

1) De la division euclidienne de n par m, déduire celle de $(X^n - 1)$ par $(X^m - 1)$.

2) Du P.G.C.D. de n et m, déduire celui de $(X^n - 1)$ et $(X^m - 1)$.

3) En déduire le P.G.C.D. de $A = X^{47} + X^{46} + \cdots + X + 1$ et $B = X^{14} + X^{13} + \cdots + X + 1$.

11 Soit $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 + 1$. Montrer que A et B sont premiers entre eux et trouver l'ensemble des couples $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

12 Soit A et B deux polynômes non nuls. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(1) A et B ne sont pas premiers entre eux.

(2) Il existe des polynômes non nuls U et V tels que $AU + BV = 0$ avec $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.

13 Trouver l'ensemble des polynômes P tels que :

$$\begin{cases} P + 1 \text{ est divisible par } X^2 + 1 \\ P - 1 \text{ est divisible par } X^3 + 1 \end{cases}$$

14 Soit a et b deux éléments distincts du corps $\mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe un couple unique (P, Q) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que $(X-a)^{2n}P + (X-b)^{2n}Q = 1$ avec $\deg P < 2n$ et $\deg Q < 2n$.

2) Montrer que :

$$P(a+b-X) = Q(X) \quad \text{et} \quad Q(a+b-X) = P(X)$$

Racines d'un polynôme

15 Soit a, b, c trois éléments du corps $\mathbb{K}$ non nuls et distincts deux à deux. Démontrer que le polynôme :

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

peut s'écrire sous la forme $P = \lambda(X-a)(X-b)(X-c)+1$, où λ est une constante que l'on déterminera.

16 Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels, possédant n racines réelles distinctes.

1) Montrer que son polynôme dérivé P' possède $(n-1)$ racines réelles distinctes.

2) En déduire que le polynôme P^2+1 n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

3) Donner un contre-exemple dans $\mathbb{C}[X]$, c'est-à-dire un polynôme de degré n ayant n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, alors que P^2+1 possède des racines multiples.

17 Factoriser le polynôme $P = 4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$ sachant qu'il possède une racine multiple.

18 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants, sachant qu'ils ont une racine réelle commune :

$$P = X^3 - 9X^2 + 26X - 24 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - 7X^2 + 7X + 15.$$

19 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme : $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

20 Effectuer la division euclidienne de :

$$A = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6 \quad \text{par} \quad B = X^2 + 3X.$$

En déduire la factorisation de A dans $\mathbb{Q}[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

21 Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{K}$, le polynôme de $\mathbb{K}[X]$: $P = X(X+a)(X+2a)(X+3a) + a^4$ est le carré d'un polynôme.

En déduire la factorisation du polynôme :

$$Q = X(X+a)(X+2a)(X+3a) - 8a^4$$

dans $\mathbb{Q}[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, en supposant $a \in \mathbb{Q}$.

22 Démontrer que le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

23* Déterminer l'ensemble des polynômes divisibles par leur polynôme dérivé. *(Raisonner sur l'ordre de multiplicité des racines de P'.)*

24* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.

1) Démontrer que, si α est une racine de P, il existe une racine de P dont le module est strictement supérieur à $|\alpha|$.

2) En déduire le polynôme P.

Relations entre coefficients et racines

25 Soit a, b, c les racines complexes du polynôme $X^3 + pX^2 + qX + r$ ($r \neq 0$).

1) Calculer $a^n + b^n + c^n$ pour $n \in \{2, 3, 4, -1, -2\}$.

2) Former le polynôme Q unitaire de degré 3 dont les racines sont a^2, b^2, c^2.

26 Factoriser le polynôme $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$, sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

27 Déterminer λ pour que la somme de deux des racines du polynôme $2X^3 - X^2 - 7X + \lambda$ soit égale à 1.

28 Déterminer λ pour que l'une des racines du polynôme $X^3 - 7X + \lambda$ soit le double d'une autre.

Exercices posés aux oraux des concours

29 (Petites Mines 2001)

Trouver les entiers naturels pour lesquels $(X+1)^n + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

30 (Petites Mines 2002)

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2(X-2)$.

31 (Petites Mines 2003)

Exprimer $\tan(7\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. (On exprimera $(\cos\theta + i\sin\theta)^7$.)
En déduire une factorisation de $7 - 35X + 21X^2 - X^3$.

32 (CCP 2006)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta = i\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$

En déduire que si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$\sum_{j,k} \frac{a_j a_k}{j+k+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

14 Fractions rationnelles

INTRODUCTION

Les fractions rationnelles sont aux polynômes ce que les nombres rationnels sont aux entiers relatifs. Le problème principal qui se pose à propos des fractions rationnelles est la décomposition en une somme de termes, appelés éléments simples, qui sera très utile en particulier pour le calcul des primitives d'une fonction rationnelle. Nous démontrerons l'existence et l'unicité de cette décomposition dans le cas où le dénominateur est un polynôme scindé, ce qui est toujours vrai dans $\mathbb{C}(X)$ *; puis nous donnerons quelques exemples de décomposition de fractions rationnelles de* $\mathbb{R}(X)$.

OBJECTIFS

- Introduction au corps des fractions rationnelles.
- Étude de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ ou $\mathbb{R}(X)$.

1 Corps des fractions rationnelles

1.1 • Corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, c'est un sous-anneau d'un corps. On note $\mathbb{K}(X)$ le plus petit corps contenant $\mathbb{K}[X]$. Tout polynôme non nul Q est inversible dans le corps $\mathbb{K}(X)$. Pour tous polynômes P et Q $(Q \neq 0)$, le produit $P\,Q^{-1}$ appartient à $\mathbb{K}(X)$. Réciproquement, il est clair que l'ensemble des éléments de la forme $P\,Q^{-1}$ est un corps, qui est donc le plus petit contenant $\mathbb{K}[X]$. Ce corps étant commutatif, on peut écrire sans ambiguïté $\dfrac{P}{Q}$ au lieu de $P\,Q^{-1}$.

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q},\ (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \right\}$$

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles.Toute fraction rationnelle peut donc s'écrire $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $Q \neq 0$. Le couple (P, Q) représentant F n'est pas unique :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} \iff PQ' = P'Q$$

On dit que le représentant $\dfrac{P}{Q}$ de F est irréductible, si les polynômes P et Q sont premiers entre eux. Toute fraction rationnelle possède un représentant irréductible unique (à l'association des polynômes près) :

si $P \wedge Q = D \quad P = P'D$ et $Q = Q'D$ avec $P' \wedge Q' = 1$,

alors :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$$

On appelle degré de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ l'entier relatif :

$$\deg \frac{P}{Q} = \deg P - \deg Q$$

On appelle zéros de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ (supposée irréductible) les racines du numérateur P, et pôles les racines du dénominateur Q.

1.2 • Partie entière

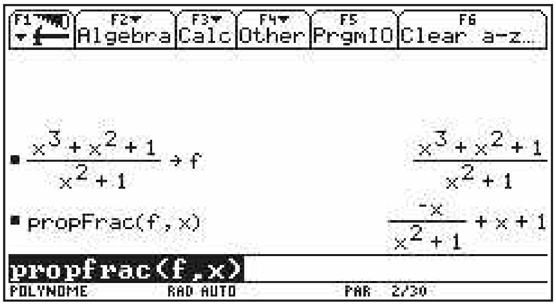
Théorème 1

Étant donné une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, il existe un polynôme unique $E \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg\left(\dfrac{P}{Q} - E\right) < 0$. Le polynôme E est appelé *partie entière* de $\dfrac{P}{Q}$.

Démonstration

Effectuons la division euclidienne de P par Q : $P = QE + R$ avec $\deg R < \deg Q$. On a bien $\dfrac{P}{Q} = E + \dfrac{R}{Q}$ avec $\deg \dfrac{R}{Q} < 0$.

Réciproquement, cette relation implique que R est le reste de la division euclidienne de P par Q, d'où l'unicité.



Partie entière d'une fraction rationnelle.

Exemple :

$$\frac{X^3+X^2+1}{X^2+1} = X+1+\frac{-X}{X^2+1}.$$

Calculatrice :

La fonction `propfrac` calcule la partie entière d'une fraction rationnelle.

Pour s'entraîner : ex. 2

2 Décomposition en éléments simples

Une fraction rationnelle est susceptible d'être décomposée en une somme de termes appelés éléments simples, et cette opération est très utile, en particulier pour les calculs de primitives. La démonstration de l'existence et de l'unicité de cette décomposition est assez longue et nous allons l'étudier par étapes.

2.1 • Séparation des pôles

Montrons d'abord qu'une fraction rationnelle dont le dénominateur est un produit de deux facteurs premiers entre eux peut se décomposer en la somme de deux fractions ayant pour dénominateur chacun de ces facteurs. Cette décomposition est unique si l'on impose à chacun des termes d'être de degré strictement négatif :

Théorème 2

Soit $F = \dfrac{R}{Q}$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Supposons que $Q = Q_1 Q_2$ avec $Q_1 \wedge Q_2 = 1$. Il existe un couple unique (R_1, R_2) de polynômes tels que :

$$F = \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_2} \quad \text{avec} \quad \deg\left(\frac{R_1}{Q_1}\right) < 0 \quad \deg\left(\frac{R_2}{Q_2}\right) < 0$$

Démonstration

1) Existence

D'après le théorème de Bézout, il existe un couple (U_1, U_2) de polynômes tels que $Q_1\, U_1 + Q_2\, U_2 = 1$. En divisant les deux membres par $Q_1 Q_2$, on obtient :

$$\frac{U_2}{Q_1} + \frac{U_1}{Q_2} = \frac{1}{Q_1 Q_2}$$

En multipliant par R :

$$F = \frac{R}{Q_1 Q_2} = \frac{RU_2}{Q_1} + \frac{RU_1}{Q_2}$$

Exprimons la partie entière de chaque terme :

$$F = E_1 + \frac{R_1}{Q_1} + E_2 + \frac{R_2}{Q_2} \quad \text{avec} \quad \deg\left(\frac{R_1}{Q_1}\right) < 0 \quad \deg\left(\frac{R_2}{Q_2}\right) < 0$$

Comme $\deg\left(\dfrac{R_1}{Q_1}+\dfrac{R_2}{Q_2}\right)<0$, E_1+E_2 est la partie entière de F, c'est-à-dire 0. On obtient donc bien la décomposition cherchée.

2) Unicité

Supposons que : $$F=\frac{R_1}{Q_1}+\frac{R_2}{Q_2}=\frac{R_1'}{Q_1}+\frac{R_2'}{Q_2}$$

avec $\deg\left(\dfrac{R_1}{Q_1}\right)<0 \quad \deg\left(\dfrac{R_2}{Q_2}\right)<0 \quad \deg\left(\dfrac{R_1'}{Q_1}\right)<0 \quad \deg\left(\dfrac{R_2'}{Q_2}\right)<0$.

On a $\dfrac{R_1-R_1'}{Q_1}=\dfrac{R_2'-R_2}{Q_2}$ d'où $(R_1-R_1')Q_2=(R_2'-R_2)Q_1$.

Q_1 divise $(R_1-R_1')Q_2$ et il est premier avec Q_2, donc il divise (R_1-R_1'). Comme $\deg(R_1-R_1')<\deg Q_1$, on en déduit $R_1-R_1'=0$; d'où $R_1=R_1'$, puis R_2-R_2'. La décomposition est donc unique.

Par exemple, si α est un pôle d'ordre m de la fraction $\dfrac{P}{Q}$, on peut écrire : $Q=(X-\alpha)^m Q_2$ où Q_2 est un polynôme n'admettant pas α pour racine. Les facteurs $(X-\alpha)^m$ et Q_2 sont premiers entre eux ; on en déduit :

Corollaire 2.1

Toute fraction rationnelle de degré strictement négatif admettant un pôle α d'ordre m se décompose de façon unique en :

$$\frac{P}{Q}=\frac{R}{(X-\alpha)^m}+\frac{R_2}{Q_2}$$

avec $\deg R<m$ et $\deg R_2<\deg Q_2$.

La fraction $\dfrac{R_2}{Q_2}$ n'a pas α pour pôle.

Le terme $\dfrac{R}{(X-\alpha)^m}$ est appelé **partie polaire** de $\dfrac{P}{Q}$ relative au pôle α.

En particulier, toute fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé peut se décomposer en une somme de fractions n'ayant plus qu'un seul pôle :

Corollaire 2.2

Soit $Q=\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}$ un polynôme scindé.

Toute fraction rationnelle de dénominateur Q et de degré strictement négatif se décompose de façon unique en :

$$\frac{P}{Q}=\sum_{i=1}^{p}\frac{R_i}{(X-\alpha_i)^{m_i}} \quad \text{avec} \quad \forall i\in[\![1,p]\!] \quad \deg R_i<m_i$$

Démonstration

Les facteurs $(X-\alpha_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux deux à deux. Il suffit d'appliquer $p-1$ fois le théorème précédent.

Le terme $\dfrac{R_i}{(X-\alpha_i)^{m_i}}$ est appelé partie polaire relative au pôle α_i.

Une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires.

Exemple : Cherchons les parties polaires de la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X(X^2+1)^2}{(X^2-1)^2}$$

Extrayons d'abord la partie entière :

$$\frac{X(X^2+1)^2}{(X^2-1)^2} = X + \frac{4X^3}{(X^2-1)^2} = X + \frac{4X^3}{(X+1)^2(X-1)^2}$$

Appliquons l'algorithme d'Euclide aux polynômes $(X+1)^2$ et $(X-1)^2$:

$$(X+1)^2 = (X-1)^2 + 4X$$
$$(X-1)^2 = X(X-2) + 1$$

$$1 = (X-1)^2 - \frac{(X+1)^2 - (X-1)^2}{4}(X-2) = (X-1)^2\frac{X+2}{4} - (X-1)^2\frac{X-2}{4}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{X+2}{(X+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{X-2}{(X-1)^2}$$

puis :

$$\frac{4X^3}{(X^2-1)^2} = \frac{X^4+2X^3}{(X+1)^2} - \frac{X^4-2X^3}{(X-1)^2}$$

En calculant la partie entière des deux termes :

$$\frac{4X^3}{(X^2-1)^2} = X^2 - 1 + \frac{2X+1}{(X+1)^2} - X^2 + 1 + \frac{2X-1}{(X-1)^2}$$

En définitive :

$$F = X + \frac{2X+1}{(X+1)^2} + \frac{2X-1}{(X-1)^2}$$

2.2 • Décomposition d'une partie polaire

Dans une deuxième étape, intéressons-nous à une partie polaire donnée. Elle se décompose elle aussi en une somme de termes.

Théorème 3

Soit $\frac{R}{(X-\alpha)^m}$, avec $\deg R < m$, une partie polaire de pôle α.
Il existe des constantes uniques $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ telles que :

$$\frac{R}{(X-\alpha)^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(X-\alpha)^k}$$

si $k > \deg R \quad R^{(k)}(\alpha) = 0$

Démonstration

1) Existence

Appliquons la formule de Taylor au polynôme R :

$$R = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{R^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

On en déduit : $$\frac{R}{(X-\alpha)^m} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{R^{(k)}(\alpha)}{k!(X-\alpha)^{m-k}}$$

En changeant k en $m-k$, on obtient :

$$\frac{R}{(X-\alpha)^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{R^{(m-k)}(\alpha)}{(m-k)!(X-\alpha)^k}$$

C'est la décomposition cherchée, avec $c_k = \dfrac{R^{(m-k)}(\alpha)}{(m-k)!}$.

2) Unicité

Si $\dfrac{R}{(X-\alpha)^m} = \dfrac{c_1}{X-\alpha} + \cdots + \dfrac{c_k}{(X-\alpha)^k} + \cdots + \dfrac{c_m}{(X-\alpha)^m}$,

$$R = c_1(X-\alpha)^{m-1} + \cdots + c_k(X-\alpha)^{m-k} + \cdots + c_m$$

c_k est le coefficient dominant du reste de la division euclidienne de R par $(X-\alpha)^{m-k+1}$: il est donc unique.

Exemple : Décomposons les parties polaires trouvées dans l'exemple précédent :

$$2X+1 = 2(X+1) - 1\,; \qquad \text{d'où} \quad \frac{2X+1}{(X+1)^2} = \frac{2}{X+1} + \frac{-1}{(X+1)^2}$$

$$2X-1 = 2(X-1) + 1\,; \qquad \text{d'où} \quad \frac{2X-1}{(X-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

2.3 • Décomposition en éléments simples de première espèce

En combinant l'ensemble des résultats précédents, on en déduit :

Théorème 4

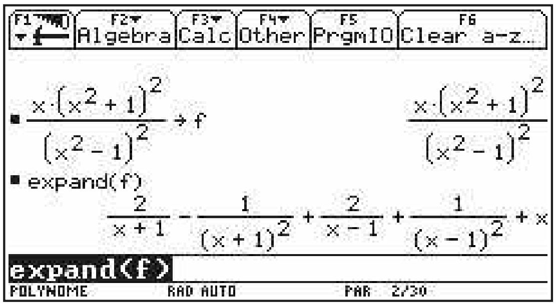
Toute fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé admet une décomposition unique de la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k}$$

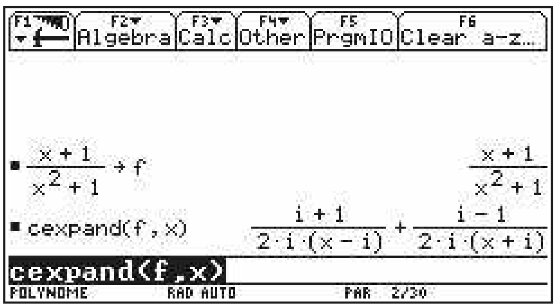
Les fractions de la forme $\dfrac{c}{(X-\alpha)^k}$ sont appelées éléments simples de première espèce.

Exemple : Rassemblons les résultats obtenus dans l'exemple précédent :

$$F = X + \frac{2}{X+1} + \frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$



Décomposition en éléments simples lorsque tous les pôles sont réels.



Décomposition en éléments simples avec des pôles non réels.

Calculatrice :

Avec la TI92, la fonction `expand` appliquée à une fraction rationnelle donne la décomposition en éléments simples lorsque tous les pôles sont réels.

Pour obtenir la décomposition en éléments simples avec des pôles non réels, nous vous proposons la fonction `cExpand`, qui utilise un artifice : on factorise la fraction dans $\mathbb{C}[X]$; on remplace le complexe i par une variable nommée `i`, puis on effectue la décomposition en éléments simples ; les coefficients sont exprimés en fonction de `i`, mais c'est à l'utilisateur d'opérer les simplifications (si on remplace à nouveau `i` par i, on détruit la décomposition !).

```
cExpand(f,x)
Func
Local g
cFactor(f,x) → g
expand(g,x)|𝑖=i
EndFunc
```

2.4 • Pratique de la décomposition

Les calculs qui ont permis d'établir l'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples sont difficiles à mettre en œuvre dans la pratique. Il est plus rapide d'écrire *a priori* la décomposition cherchée avec des coefficients indéterminés, et de les calculer un par un à l'aide de diverses techniques que nous allons décrire.

Reprenons toujours le même exemple : $G = \dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$.

On sait que G admet une décomposition de la forme :

$$G = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}$$

1) Remarquons que G est impaire et comparons les décompositions de $G(-X)$ et $-G(X)$:

$$G(-X) = \frac{-a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{-c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}$$
$$-G(X) = \frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{-d}{(X-1)^2}$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples nous permet d'identifier les coefficients qui se correspondent :

$$\begin{cases} -a &= -c \\ b &= -d \\ -c &= -a \\ d &= -b \end{cases}$$

2) Pour isoler b, multiplions G par $(X+1)^2$:

$$(X+1)^2 G(X) = \frac{4X^3}{(X-1)^2} = a(X+1) + b + \frac{c(X+1)^2}{X-1} + \frac{d(X+1)^2}{(X-1)^2}$$

En remplaçant X par -1, on obtient $b = -1$, d'où $d = 1$.

Cette méthode permet de trouver le coefficient du terme de plus haut degré de chaque partie polaire.

3) Pour isoler les coefficients a et c, multiplions G par X :

$$XG(X) = \frac{4X^4}{(X^2-1)^2} = \frac{aX}{X+1} + \frac{bX}{(X+1)^2} + \frac{cX}{X-1} + \frac{dX}{(X-1)^2}$$

En cherchant la limite de $XG(X)$ en $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} xG(x) = 4 = a + c, \quad \text{d'où} \quad a = c = 2$$

Cette méthode permet de trouver la somme des coefficients de plus bas degré de toutes les parties polaires.

En définitive, on obtient : $(a, b, c, d) = (2, -1, 2, 1)$.

D'où $$G = \frac{2}{X+1} + \frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Bien sûr, ces méthodes ne sont pas systématiques et il peut être difficile de calculer certains coefficients. On a toujours la ressource de donner à X une valeur particulière (différente d'un pôle), mais il ne faut pas en abuser sous peine d'aboutir à un système linéaire important, ce qui ne facilite pas forcément les choses.

IMPORTANT

S'il n'y a qu'une seule partie polaire, la décomposition se ramène à une succession de divisions euclidiennes.

Exemple : Décomposer en éléments simples $F = \dfrac{X^3+1}{(X-2)^4}$.

Divisons successivement par $X - 2$:

$$X^3 + 1 = (X-2)(X^2+2X+4) + 9 \qquad \frac{X^3+1}{(X-2)^4} = \frac{X^2+2X+4}{(X-2)^3} + \frac{9}{(X-2)^4}$$

$$X^2 + 2X + 4 = (X-2)(X+4) + 12 \qquad \frac{X^2+2X+4}{(X-2)^3} = \frac{X+4}{(X-2)^2} + \frac{12}{(X-2)^3}$$

$$X + 4 = (X-2) + 6 \qquad \frac{X+4}{(X-2)^2} = \frac{1}{X-2} + \frac{6}{(X-2)^2}$$

En définitive $$F = \frac{1}{X-2} + \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{12}{(X-2)^3} + \frac{9}{(X-2)^4}.$$

Pour s'entraîner : ex. 3

APPLICATION 1

Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{P'}{P}$ où P est un polynôme scindé.

Soit α une racine d'ordre m du polynôme P.

Posons $P = (X-\alpha)^m Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.

Dérivons : $P' = m(X-\alpha)^{m-1}Q + (X-\alpha)^m Q'$.

D'où : $$\frac{P'}{P} = \frac{m}{X-\alpha} + \frac{Q'}{Q}$$

La fraction $\dfrac{Q'}{Q}$ n'admettant plus α pour pôle, $\dfrac{m}{X-\alpha}$ est la partie polaire relative à α.

Si P possède p racines α_i, d'ordre m_i :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{X-\alpha_i}$$

Pour s'entraîner : ex. 9

2.5 • Expression de la partie polaire relative à un pôle simple

Théorème 5

Si α est un pôle simple de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, le coefficient de la partie polaire relative à a est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Démonstration

On suppose que $Q(X) = (X-\alpha)S(X)$, avec $S(\alpha) \neq 0$.

Pour calculer le coefficient c de la partie polaire relative à α, nous avons vu que l'on doit multiplier $\frac{P(X)}{Q(X)}$ par $(X-\alpha)$, puis remplacer X par α. On obtient $c = \frac{P(\alpha)}{S(\alpha)}$.

Or $Q'(X) = S(X) + (X-\alpha)S'(X)$, d'où $Q'(\alpha) = S(\alpha)$. On en déduit $c = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

APPLICATION 2

Décomposer $\frac{1}{X^n - 1}$ *en éléments simples dans* $\mathbb{C}(X)$.

Chaque pôle $x_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est simple, donc le coefficient de sa partie polaire est :

$$c_k = \frac{1}{n x_k^{n-1}}$$

Or $x_k^{n-1} = x_k^{-1} = e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$. D'où $c_k = \frac{1}{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Pour s'entraîner : ex. 7 et 8

3 Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

3.1 • Éléments simples de seconde espèce

Nous n'avons envisagé pour le moment que des fractions rationnelles dont le dénominateur est scindé, ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}(X)$.

Dans $\mathbb{R}(X)$ en revanche, nous pouvons rencontrer des fractions rationnelles dont le dénominateur possède des facteurs irréductibles du second degré. On peut toujours décomposer une telle fraction en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$. En réunissant les éléments simples des pôles conjugués, on obtiendra des termes de la forme :

$$\frac{c}{(X-\alpha)^k} + \frac{\bar{c}}{(X-\bar{\alpha})^k} = \frac{R}{(X^2 - 2\beta X + \gamma)^k}$$

où R est un polynôme réel (somme de deux polynômes conjugués) et $X^2 - 2\beta X + \gamma$ un polynôme réel irréductible $(\beta = \mathrm{Re}\,(\alpha)\,,\ \gamma = |\alpha|^2)$.

Par des divisions euclidiennes successives par $X^2 - 2\beta X + \gamma$, on se ramène à une somme de termes de la forme :

$$\frac{dX + e}{(X^2 - 2\beta X + \gamma)^k}$$

appelés éléments simples de seconde espèce.

3.2 • Pratique de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

On peut obtenir l'élément simple de plus haut degré relatif à un facteur irréductible $X^2 - 2\beta X + \gamma$, en multipliant F par $(X^2 - 2\beta X + \gamma)^m$ et en remplaçant X par une racine complexe de ce trinôme, qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

Exemple : $F = \dfrac{X-1}{X(X+1)(X^2+X+2)}$.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+2}, \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

$$(X^2+X+2)F = \frac{X-1}{X^2+X} = \frac{a(X^2+X+2)}{X} + \frac{b(X^2+X+2)}{X+1} + cX + d$$

Soit ω une racine du polynôme X^2+X+2. En remplaçant X par ω, on obtient :

$$\frac{\omega - 1}{\omega^2 + \omega} = c\omega + d$$

Comme $\omega^2 + \omega = -2$, $\quad -\dfrac{\omega}{2} + \dfrac{1}{2} = c\omega + d$.

ω n'étant pas réel, en identifiant les parties imaginaires, on obtient : $c = -\dfrac{1}{2}$, puis $d = \dfrac{1}{2}$;

d'où
$$F = \frac{-\frac{1}{2}}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}}{X^2+X+2}.$$

Si le dénominateur n'a qu'un seul facteur irréductible du second degré d'un ordre élevé, on peut obtenir sa partie polaire en retranchant celles des pôles réels et la décomposer comme dans le paragraphe précédent.

Exemple : $F = \dfrac{1}{X(X^2+X+1)^2}$.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{R}{(X^2+X+1)^2}$$

En multipliant par X et en remplaçant X par 0, on obtient $a = 1$.

$$F - \frac{1}{X} = \frac{1-(X^2+X+1)^2}{X(X^2+X+1)^2} = \frac{-X^3 - 2X^2 - 3X - 2}{(X^2+X+1)^2}$$

$$X^3 + 2X^2 + 3X + 2 = (X^2+X+1)(X+1) + X + 1$$

d'où
$$\frac{X^3 + 2X^2 + 3X + 2}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$$

$$F = \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}.$$

Pour s'entraîner : ex. 4

MÉTHODE

Pour calculer la partie entière de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$, on effectue la division euclidienne de P par Q *(cf. exercice* 2).

Pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples :

- on écrit la décomposition avec des coefficients indéterminés ;
- on exploite une éventuelle parité ;
- on calcule le coefficient du terme de plus haut degré correspondant à chaque pôle ;
- on calcule la somme des coefficients des termes de plus bas degré ;
- s'il reste des coefficients à calculer, on prend quelques valeurs particulières pour l'indéterminée X *(cf. exercices* 3 *et* 4).

S'il s'agit de décomposer une seule partie polaire, on procède par divisions euclidiennes successives ou on utilise la formule de Taylor *(cf. exercices* 3c *et* 4c).

Le coefficient correspondant à un pôle simple α de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est :

$$\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

(cf. exercices 5 *et* 6).

La décomposition de la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$, où P est un polynôme scindé possédant p racines α_i d'ordres respectifs m_i, est :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{X-\alpha_i}$$

(*cf. Application* 1 *et exercices* 9 *et* 10).

Exercice résolu

1 *Décomposer la fraction rationnelle :* $F(X) = \dfrac{X^2+X-1}{X^4+X^2+1}$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.

2 *Pour tout entier* n *strictement positif on pose :* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F(k)$; *montrer que la suite* (S_n) *converge et trouver sa limite.*

Conseils

Ne pas oublier de parler de la partie entière.

Remarquer que :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2+1)^2 - X^2$$

Il est inutile de calculer la partie réelle et la partie imaginaire de ω.

Effectuer un changement d'indice dans la deuxième somme.

Solution

1) La partie entière de la fraction rationnelle F est nulle, puisque son degré est -2. Le dénominateur se factorise en :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

comme ces deux facteurs sont premiers entre eux, on peut écrire :

$$F(X) = \frac{X^2+X-1}{X^4+X^2+1} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1}$$

En multipliant par X^2+X+1 et en remplaçant X par une racine ω de ce trinôme, on obtient :

$$\frac{\omega^2+\omega-1}{\omega^2-\omega+1} = a\omega + b$$

d'où, puisque $\omega^2 = -\omega - 1$:

$$\frac{1}{\omega} = a\omega+b \quad ; \quad a\omega^2 + b\omega = 1 \quad ; \quad (b-a)\omega - a = 1$$

comme ω n'est pas réel, on a : $b - a = 0$ et $-a = 1$. D'où : $a = b = -1$.

De même, en multipliant par $X^2 - X + 1$ et en remplaçant X par une racine ω de ce trinôme, on obtient :

$$\frac{\omega^2+\omega-1}{\omega^2+\omega+1} = c\omega + d$$

d'où, puisque $\omega^2 = \omega - 1$:

$$\frac{2\omega-2}{2\omega} = c\omega+d \quad ; \quad 2\omega - 2 = 2c\omega^2 + 2d\omega \quad ; \quad (c+d)\omega - c = \omega - 1$$

comme ω n'est pas réel, on a : $c + d = 1$ et $-c = -1$. D'où : $c = 1$, $d = 0$.
En définitive :

$$F = \frac{-X-1}{X^2+X+1} + \frac{X}{X^2-X+1}$$

2) On en déduit :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{k^4+k^2+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2-k+1} - \frac{k+1}{k^2+k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2-k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2-k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{k^2-k+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{n+1}{n^2+n+1}$$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une fraction rationnelle a une partie entière nulle si et seulement si son degré est strictement négatif.

b) Une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires.

c) Un élément simple de première espèce est de la forme :
$$\frac{c}{(X-a)^k}$$

d) Un élément simple de seconde espèce est de la forme :
$$\frac{c}{(X^2+aX+b)^k}$$

e) Une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ n'a que des éléments simples de première espèce.

f) Une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ n'a que des éléments simples de seconde espèce.

g) Si $F = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i}{X-a_i}$ et si $\deg(F) \leqslant -2$, alors $\sum_{i=1}^{p} c_i = 0$.

h) Lorsqu'il n'y a qu'une seule partie polaire, la décomposition en éléments simples s'obtient par des divisions euclidiennes successives.

2 Simplifier les fractions rationnelles suivantes, puis calculer leur partie entière.

a) $\frac{X^5+1}{X^2-1}$; **b)** $\frac{X^4+X^2+1}{X^3-1}$; **c)** $\frac{X^4-X^3-X-1}{X^3-X^2+X-1}$.

3 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples :

a) $\frac{1}{X^3-X}$; **b)** $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$;

c) $\frac{X^3+1}{(X-1)^3}$; **d)** $\frac{X+1}{X^3+2X^2}$; **e)** $\frac{X-1}{X^3(X+1)}$.

4 Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

a) $\frac{X}{X^4-1}$; **b)** $\frac{X-1}{X^4+X}$; **c)** $\frac{X^3}{(X^2+X+1)^2}$.

5 Simplifier l'expression : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

En déduire $\lim_{n\to\infty} S_n$.

6 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :
$$F = \frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$$

En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k+1}$.

7 * Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, et $Q = \prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ en éléments simples.

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{(-1)^k k!(n-k)!}$.

3) En déduire que $\exists k \in [\![0,n]\!] \quad |P(k)| \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

8 * Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 1$, possédant n racines distinctes et non nulles $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X\,P(X)}$.

2) En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k\,P'(x_k)}$.

9 * Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le polynôme $P'^{\,2} - P\,P''$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Indication : Il peut être utile de considérer la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$.

10 * Soit P un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$, admettant n racines distinctes $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, d'images respectives $(A_1, \cdots, A_n)$ dans le plan complexe.

On appelle $(\beta_1, \cdots, \beta_{n-1})$ les racines du polynôme dérivé P', et $(B_1, \cdots, B_{n-1})$ leurs images dans le plan complexe.

1) Montrer que les familles de points $(A_1, \cdots, A_n)$ et $(B_1, \cdots, B_{n-1})$ ont le même isobarycentre.

Quelle est l'image de la racine du polynôme $P^{(n-1)}$?

2) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.

3) Démontrer que : $\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_i - \alpha_j} = 0$.

4) En déduire que chaque point B_i est un barycentre de la famille de points $(A_1, \cdots, A_n)$ avec des coefficients positifs. Interpréter géométriquement cette propriété.

15 Nombres réels

INTRODUCTION

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels possède de nombreuses propriétés qui se prêtent bien aux calculs courants, mais il s'avère vite insuffisant pour les besoins de l'analyse et de la géométrie. L'ensemble des réels possède une propriété supplémentaire qui joue un rôle fondamental : c'est la propriété de la borne supérieure. Elle aura des conséquences dans tous les domaines de l'analyse : convergence des suites, continuité des fonctions, limites, etc.
Historiquement, le statut précis des nombres réels dut attendre le XIX*e siècle avec les travaux de Dedekind (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872) et de Cantor* (1845-1918).

OBJECTIFS

- Rappeler les règles de calcul sur les nombres réels.
- Étudier la propriété de la borne supérieure et ses conséquences.
- Définir précisément diverses notions s'appliquant aux nombres réels : intervalle, valeur absolue, distance, partie entière, approximation décimale...

1 Corps des nombres réels

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est supposé connu. Rappelons les principales règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

1.1 • Addition

L'addition des réels possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : Pour tous réels x et y : $x + y = y + x$.
- Associativité : Pour tous réels x, y et z : $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- 0 est élément neutre : Pour tout réel x : $x + 0 = 0 + x = x$.
- Tout réel a un opposé : $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

On résume ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un **groupe commutatif** (*cf. chap. 11 : Structures algébriques usuelles*).

1.2 • Multiplication

La multiplication des réels possède les propriétés suivantes :

- Commutativité : Pour tous réels x et y : $xy = yx$.
- Associativité : Pour tous réels x, y et z : $(xy)z = x(yz)$.
- 1 est élément neutre : Pour tout réel x : $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
- Tout réel non nul a un inverse : $x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot x = 1$.

De plus, les deux opérations sont liées par la propriété suivante :

- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :
  Pour tous réels x, y et z : $x(y + z) = xy + xz$; $(y + z)x = yx + zx$.

On résume toutes ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif.**

1.3 • Relation d'ordre

La comparaison des réels possède les propriétés suivantes :

- Réflexivité : Pour tout réel x : $x \leqslant x$.
- Antisymétrie : Pour tous réels x, y : $(x \leqslant y$ et $y \leqslant x) \Rightarrow x = y$.
- Transitivité : Pour tous réels x, y et z : $(x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.

On dit que $\leqslant$ est une **relation d'ordre**.

Elle permet de comparer deux réels quelconques : pour tous réels x, y, on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. On dit que l'ordre est **total**.

De plus, l'ordre est **compatible** avec :

- l'addition : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad x \leqslant y \;\Rightarrow\; x + z \leqslant y + z$
- la multiplication par les réels positifs :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \forall z \in \mathbb{R}_+ \qquad x \leqslant y \;\Rightarrow\; xz \leqslant yz$$

Remarque *: Plus généralement, on peut ajouter membre à membre deux inégalités, mais jamais les soustraire membre à membre ! On peut de même multiplier membre à membre deux inégalités entre réels positifs.*

On résume l'ensemble des propriétés de $\mathbb{R}$ en disant que $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ **est un corps commutatif totalement ordonné**.

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

2 Propriété de la borne supérieure

2.1 • Majorant, minorant

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **majorée** s'il existe un réel M supérieur ou égal à tous les éléments de A :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leqslant M$$

Tout réel M ayant cette propriété est appelé **majorant** de A .

Exemples : L'intervalle $]0, 1[$ est majoré par 1, par $\frac{3}{2}$, ou plus généralement par tout réel supérieur ou égal à 1.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ n'est pas majoré : il n'existe aucun réel supérieur ou égal à tous les entiers.

De même, une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **minorée** s'il existe un réel m inférieur ou égal à tous les éléments de A :

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad m \leqslant x$$

Tout réel m ayant cette propriété est appelé **minorant** de A.

Une partie qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Exemples : L'intervalle $]0, 1[$ est borné. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas borné.

2.2 • Borne supérieure, borne inférieure

Nous admettrons que toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède un majorant plus petit que tous les autres, appelé **borne supérieure** de A et noté $\sup A$: on dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Par exemple : $\sup\,]0, 1[= 1$ (notons que la borne supérieure d'une partie n'appartient pas nécessairement à cette partie).

De même, toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée possède un plus grand minorant, appelé **borne inférieure** de A et noté $\inf A$.

Par exemple : $\inf \mathbb{N} = 0$.

Pour s'entraîner : ex. 4

APPLICATION 1

Raisonner avec des bornes supérieures

Pour montrer qu'un réel est la borne supérieure d'une partie, il faut montrer :

1) *que c'est un majorant de cette partie ;*

2) *qu'il est inférieur ou égal à n'importe quel majorant de la partie.*

Exemple : Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose :

$$A + B = \{c \in \mathbb{R}\ ,\ \exists (a, b) \in A \times B \quad c = a + b\}$$

Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure qui est $\sup A + \sup B$.

1) Soit a_0 et b_0 des éléments de A et B, $a_0 + b_0 \in A + B$, donc $A + B$ est non vide. Par ailleurs, A et B sont non vides et majorées, elles possèdent donc des bornes supérieures et :

$$\begin{aligned} &\forall c \in A + B \quad \exists (a, b) \in A \times B \\ &c = a + b \leqslant \sup A + \sup B \end{aligned}$$

Donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$. Cette partie est donc non vide et majorée, elle possède une borne supérieure.

2) Soit M un majorant quelconque de $A + B$. Pour tout $(a, b) \in A \times B$:

$$a + b \leqslant M \quad \text{d'où} \quad a \leqslant M - b$$

Ce qui signifie que $M - b$ majore A : il est par conséquent supérieur ou égal à $\sup A$, qui est le plus petit des majorants de A :

$$M - b \geqslant \sup A \quad \text{c'est-à-dire} \quad b \leqslant M - \sup A$$

$M - \sup A$ majore B, il est donc supérieur ou égal à $\sup B$, qui est le plus petit majorant de B :

$$M - \sup A \geqslant \sup B \quad \text{d'où} \quad M \geqslant \sup A + \sup B$$

Ainsi, tout majorant de $A + B$ est supérieur ou égal à $\sup A + \sup B$, qui est donc le plus petit majorant de $A + B$, c'est-à-dire sa borne supérieure.

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Pour s'entraîner : ex. 5 à 7

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

3.1 • Définition d'un intervalle

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si, dès qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaires, c'est-à-dire :

$$\forall (c, d) \in I^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(c \leqslant x \leqslant d \quad \Rightarrow \quad x \in I\big)$$

Par exemple, $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, car tout réel compris entre deux réels positifs est positif. Mais $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un, car il contient 1 et -1 sans contenir 0.

APPLICATION 2

Intersection d'intervalles

Démontrer que l'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est un intervalle.

Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles et $\mathcal{I} = \bigcap_{j\in J} I_j$ l'intersection de cette famille, c'est-à-dire l'ensemble des réels appartenant à tous les intervalles I_j. Montrons que $\mathcal{I}$ est un intervalle. Soit c et d deux éléments de $\mathcal{I}$ tels que $c < d$ et x un réel tel que $c \leqslant x \leqslant d$. Pour tout $j \in J$, $c \in I_j$ et $d \in I_j$; comme I_j est un intervalle, on en déduit $x \in I_j$. Ainsi x appartient à I_j pour tout $j \in J$: $x \in \mathcal{I}$.

L'ensemble $\mathcal{I}$ vérifie bien la définition d'un intervalle même s'il est vide, voir paragraphe 3.2.

3.2 • Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Nous allons voir que la propriété de la borne supérieure permet de nommer facilement tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

Notons d'abord que l'ensemble vide est un intervalle, car toute proposition qui commence par $\forall x \in \varnothing$ est toujours vraie. Un singleton est également un intervalle.

Considérons maintenant un intervalle I contenant plus d'un élément.

1) Si I est majoré et minoré, il possède une borne supérieure b et une borne inférieure a distinctes. Pour tout $x \in I$ $a \leqslant x \leqslant b$. Réciproquement, soit x un réel tel que $a < x < b$. x n'est ni un minorant ni un majorant de I, ce qui montre l'existence de deux éléments de I, y et z tels que $y < x < z$. D'après la définition d'un intervalle, on en déduit que $x \in I$.

I contient donc tous les éléments strictement compris entre a et b. Suivant que a et b eux-mêmes appartiennent ou non à I, on peut avoir :

$$
\begin{array}{ll}
I = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b] & \text{intervalle fermé borné ou segment} \\
I = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leqslant x < b\} = [a, b[& \text{intervalle borné semi-ouvert à droite} \\
I = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x \leqslant b\} =]a, b] & \text{intervalle borné semi-ouvert à gauche} \\
I = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x < b\} =]a, b[& \text{intervalle borné ouvert}
\end{array}
$$

2) Si I est minoré mais non majoré, il a une borne inférieure a. Tous les éléments de I sont supérieurs ou égaux à a distinctes. Réciproquement, soit x un réel tel que $x > a$. x n'est ni un minorant ni un majorant de I, ce qui montre l'existence de deux éléments de I, y et z tels que $y < x < z$, ce qui implique que $x \in I$.

I contient donc tous les éléments strictement supérieurs à a. Suivant que a lui-même appartient ou non à I, on aura :

$$
\begin{array}{lllll}
I & = & \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x \geqslant a\} & = & [a, +\infty[\quad \text{intervalle fermé non majoré} \\
I & = & \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x > a\} & = &]a, +\infty[\quad \text{intervalle ouvert non majoré}
\end{array}
$$

3) Si I est majoré mais non minoré, on obtient de même :

$$
\begin{array}{lllll}
I & = & \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x \leqslant b\} & = &]-\infty, b] \quad \text{intervalle fermé non minoré} \\
I & = & \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x < b\} & = &]-\infty, b[\quad \text{intervalle ouvert non minoré}
\end{array}
$$

4) Si I n'est ni minoré ni majoré, un réel x quelconque n'est ni un minorant ni un majorant de I, ce qui montre l'existence de deux éléments de I, y et z tels que $y < x < z$, ce qui implique que $x \in I$. I est donc égal à $\mathbb{R}$ tout entier.

$$I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

En définitive, tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'un des onze types étudiés.

ATTENTION

On ne peut pas étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations d'addition et de multiplication de $\mathbb{R}$, et des expressions comme $+\infty - \infty$ ou $0 \times \infty$ n'ont aucun sens.

3.3 • Droite numérique achevée

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux éléments non réels. On peut étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Ceci permettra par exemple de dire qu'une suite a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

4 Rationnels et irrationnels

4.1 • Corps des rationnels

Un nombre réel est dit **rationnel** si c'est le quotient de deux entiers, par exemple : $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, -2, ...

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. On vérifie qu'il est stable par addition (la somme de deux rationnels est un rationnel), par multiplication (le produit de deux rationnels est un rationnel), et que muni de ces opérations c'est un corps commutatif totalement ordonné, comme $\mathbb{R}$.

En revanche, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure : l'ensemble des rationnels dont le carré est inférieur ou égal à 2 est non vide, majoré, mais il n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. C'est ce point qui marque la différence essentielle entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Nous verrons que la propriété de la borne supérieure est à la base de la plupart des théorèmes d'analyse, qui tomberaient en défaut si on n'utilisait que des nombres rationnels.

APPLICATION 3

Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Jusqu'à Pythagore (550 av. J-C.), les Grecs pensaient que deux longueurs quelconques étaient toujours commensurables, c'est-à-dire multiples d'une même petite longueur, autrement dit que le quotient de l'une par l'autre était toujours un nombre rationnel.

Il fallut donc chercher deux entiers p et q tels que $\frac{p}{q}$ représente le rapport de la diagonale d'un carré à son côté. D'après le théorème de Pythagore, ce nombre doit vérifier $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$.

Or, dans la décomposition en facteurs premiers de p^2, tous les exposants des facteurs premiers sont pairs, tandis que dans celle de $2q^2$, l'exposant de 2 est impair... On aboutit à une contradiction.

Les Grecs durent admettre que deux grandeurs quelconques peuvent être *incommensurables* et ils déclarèrent *irrationnel* le quotient de deux telles grandeurs. On doit à Eudoxe de Cnide (IVe siècle av. J-C.) la première théorie des nombres incluant les irrationnels.

Pour s'entraîner : ex. 10 à 14

4.2 • Densité des rationnels et des irrationnels

Au sein de $\mathbb{R}$, les rationnels et les irrationnels sont intimement mêlés, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1

Tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient au moins un rationnel et un irrationnel.
On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un singleton, et $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Soit q un entier strictement supérieur à $\dfrac{1}{b-a}$, et soit p le plus petit entier strictement supérieur à aq.

On a donc :

$$p - 1 \leqslant aq < p$$

comme $q > 0$:

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant a < \frac{p}{q}$$

d'où :

$$a < \frac{p}{q} \leqslant a + \frac{1}{q} < b$$

c'est-à-dire :

$$\frac{p}{q} \in \,]a, b[, \quad \text{et par conséquent : } \frac{p}{q} \in I.$$

I contient donc un rationnel.

De même, l'intervalle $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[$ contient un rationnel r.

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad a < r\sqrt{2} < b$$

I contient donc le réel $r\sqrt{2}$, qui est irrationnel si $r \neq 0$.

Si $r = 0$, l'intervalle $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, 0\right[$, qui est inclus dans $\left]\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right[$, contient un rationnel r_1 non nul ; dans ce cas, $r_1\sqrt{2}$ est irrationnel et appartient à I.

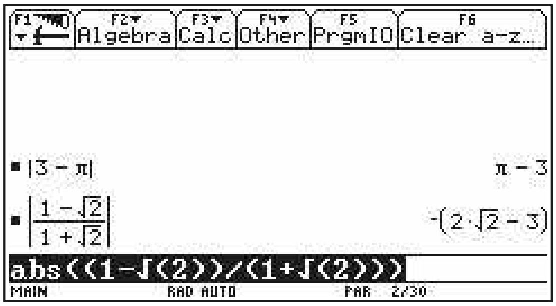
Dans tous les cas, I contient un irrationnel.

Remarque *: En fait, tout intervalle I non vide et non réduit à un singleton contient une infinité de rationnels et d'irrationnels ; en effet, si I ne contenait qu'un nombre fini de rationnels, on pourrait les classer par ordre croissant : $r_1 < r_2 < \cdots r_n$; l'intervalle $]r_1, r_2[$ ne contiendrait aucun rationnel, ce qui contredirait le théorème précédent. On peut raisonner de même pour les irrationnels.*

Pour s'entraîner : ex. 15

5 Approximation d'un réel

5.1 • Valeur absolue d'un réel



Sur la calculatrice TI-92/Voyage 200, la fonction valeur absolue s'appelle **abs**.

Pour tout réel x, on appelle **valeur absolue** de x le réel :

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Propriétés

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| = |x||y|$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \ (y \neq 0)$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x-y| \leqslant |x| + |y|$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$

Pour s'entraîner : ex. 16

5.2 • Distance dans $\mathbb{R}$

On appelle **distance** de deux réels x et y le réel $|x-y|$.
Elle vérifie l'**inégalité triangulaire** :

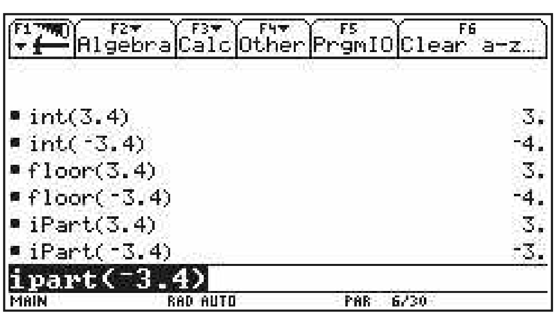
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad |x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$$

Cette notion de distance joue un très grand rôle en analyse, car elle permet de caractériser la plus ou moins grande proximité des réels. L'ensemble des réels dont la distance à a est inférieure à ε est l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x-a| < \varepsilon \iff x \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$

On dit dans ce cas que x est une **valeur approchée** de a à ε près.

5.3 • Partie entière d'un réel



Sur la calculatrice TI-92/Voyage 200, la fonction partie entière s'appelle **int** ou **floor**. Ne pas confondre avec la fonction **ipart** qui coïncide avec la partie entière pour les nombres positifs, mais pas pour les nombres négatifs.

Soit x un réel. On appelle **partie entière** de x le plus grand entier inférieur ou égal à x. On le note $E(x)$. On a :

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

d'où

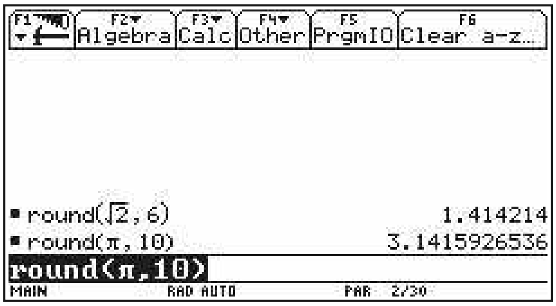
$$x - 1 < E(x) \leqslant x$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad n \leqslant x \ \Rightarrow \ n \leqslant E(x)$$

Pour s'entraîner : ex. 17 à 19

5.4 • Approximation décimale à 10^{-p} près



Sur la calculatrice TI-92/Voyage 200, la fonction **round**(x,n) permet d'obtenir une valeur approchée de x à 10^{-n} près.

Soit x un réel et p un entier naturel. On a :

$$E(x10^p) \leqslant x10^p < E(x10^p) + 1$$

d'où :

$$E(x10^p)10^{-p} \leqslant x < E(x10^p)10^{-p} + 10^{-p}$$

$E(x10^p)10^{-p}$ est un nombre **décimal** approchant x à 10^{-p} près par défaut, et $E(x10^p)10^{-p} + 10^{-p}$ un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par excès.

Remarque *: Un nombre décimal est un rationnel de la forme* $\dfrac{p}{10^q}$ *où* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$.
On peut donc approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des nombres décimaux. L'écriture décimale illimitée de x *récapitule toutes ces approximations :* $\pi = 3,14159265\ldots$ *signifie :*

$$\begin{array}{lcccl} 3 & \leqslant & \pi & < & 4 \\ 3,1 & \leqslant & \pi & < & 3,2 \\ 3,14 & \leqslant & \pi & < & 3,15 \\ 3,141 & \leqslant & \pi & < & 3,142 \\ 3,1415 & \leqslant & \pi & < & 3,1416 \end{array}$$

etc...

Pour s'entraîner : ex. 20

MÉTHODE

Pour montrer qu'un réel x est rationnel, on peut :

- chercher un entier q tel que $qx \in \mathbb{Z}$;
- montrer que x est la somme, le produit ou le quotient de nombres rationnels ;
- montrer que x vérifie une équation dont les solutions sont rationnelles.

Pour montrer qu'un réel x est irrationnel, on peut :

- montrer que c'est la somme ou le produit d'un rationnel et d'un irrationnel ;
- on raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe deux entiers p et q tels que $x = \dfrac{p}{q}$ et on cherche une contradiction.

Pour montrer qu'un réel x est la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$, on peut :

- montrer que x est un majorant de A, et que tout autre majorant de A lui est supérieur ;
- montrer que x est un majorant de A, et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément de A compris entre $x - \varepsilon$ et x.

Pour démontrer une inégalité faisant intervenir des valeurs absolues :

- on peut utiliser l'inégalité triangulaire : la valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues ;
- on peut éventuellement distinguer plusieurs cas suivant le signe du contenu des valeurs absolues.

Pour démontrer une relation faisant intervenir des parties entières :

- on utilise le fait que $E(x) \in \mathbb{Z}$ et les inégalités $E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \quad ; \quad x - 1 < E(x) \leqslant x$.

Exercice résolu

POINT FIXE D'UNE APPLICATION CROISSANTE DE [0,1] DANS LUI-MÊME

Soit f une application croissante de $[0, 1]$ dans lui-même. On considère l'ensemble $E = \{x \in [0, 1] \; f(x) \geqslant x\}$.

1 *Montrer que E possède une borne supérieure b.*

2 *Montrer que $f(b) = b$.*

Conseils

Montrer que les cas $f(b) < b$ et $f(b) > b$ conduisent à des contradictions. Attention à une erreur fréquente : un réel inférieur à la borne supérieure de E n'est pas nécessairement élément de E !

Solution

1) L'ensemble E est non vide $(0 \in E)$, et majoré par 1 ; il possède donc une borne supérieure b, qui appartient à $[0, 1]$.

2) Raisonnons par l'absurde.

- Supposons $f(b) < b$. Comme b est le plus petit des majorants de E, $f(b)$ n'en est pas un ; il existe donc un élément c de E tel que $f(b) < c \leqslant b$. f étant croissante, $f(c) \leqslant f(b)$, d'où $f(c) < c$ en contradiction avec l'appartenance de c à l'ensemble E.
- Supposons que $f(b) > b$. f étant croissante, $f(f(b)) \geqslant b$ donc $f(b) \in E$, ce qui est impossible puisque $f(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de E.

Conclusion : $f(b) = b$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

b) Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure M, tout réel inférieur à M appartient à A.

c) La somme de deux irrationnels est un irrationnel.

d) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

e) L'ensemble des irrationnels est un intervalle de $\mathbb{R}$.

f) Entre deux rationnels distincts, il existe toujours un irrationnel.

g) La fonction partie entière est croissante.

h) Tout réel possède des approximations rationnelles à 10^{-p} près, quel que soit l'entier p.

Inégalités dans $\mathbb{R}$

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

3 Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n réels strictement positifs. Montrer que :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \cdots + x_n^{-1}) \geqslant n^2$$

Borne supérieure ou inférieure

4 Déterminer les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants, si elles existent :

a) $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$; b) $\left\{(-1)^n(1-\dfrac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

c) $\left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p},\ (n, p) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$.

5 Soit a et b deux réels. Montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant b + \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad a \leqslant b$$

6 Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \sup A \leqslant \sup B$.

2) $A \cup B$ est majorée. Déterminer $\sup(A \cup B)$.

3) $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

7 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a, b) \in A \times B \quad a \leqslant b$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que

$$\sup A \leqslant \inf B.$$

A-t-on égalité ?

8 Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des distances entre deux éléments quelconques de A possède une borne supérieure. On appelle ce nombre *diamètre* de A et on le note $d(A)$. Montrer que :

$$d(A) \leqslant \sup A - \inf A \qquad \text{et que :}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (x, y) \in A^2 \quad |x - y| > \sup A - \inf A - 2\varepsilon$$

Conclure.

9 Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles bornées. Montrer que :

$$|\sup x_n - \sup y_n| \leqslant \sup |x_n - y_n|$$

Nombres rationnels et irrationnels

10 Soit x et y deux rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Démontrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

11 Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. Montrer que si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, alors il est entier.

12 Montrer que les nombres suivants sont rationnels :

$$a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

$$b = \sqrt{2}\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{2}\sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$$

13 Montrer que les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

14 * Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p - 1}$$

15 On convient que le dénominateur d'un rationnel est le dénominateur de la fraction irréductible qui le représente ; il peut toujours être choisi positif.

1) Démontrer que tout intervalle non vide et non réduit à un singleton contient une infinité de rationnels de dénominateur supérieur à 10^6.

2) Soit x un irrationnel. Démontrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'intervalle $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ ne contienne aucun rationnel de dénominateur inférieur à 10^6.

Valeurs absolues-parties entières

16 Démontrer que pour tous réels x et y :

1) $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$

2) $1 + |xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$

17 Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad E(x) + E(x+y) + E(y) \leqslant E(2x) + E(2y)$$

18 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$$

19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

20 Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$. Démontrer que $\dfrac{m+2n}{m+n}$ est plus proche de $\sqrt{2}$ que $\dfrac{m}{n}$ et que $\sqrt{2}$ est compris entre ces deux rationnels. En déduire une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

16 Suites réelles et complexes

INTRODUCTION

L'étude des suites de nombres réels a plusieurs champs d'application :
– Les suites représentent un modèle courant de description de phénomènes discrets, c'est-à-dire évoluant étape par étape. On s'intéresse en particulier au comportement à long terme, d'où l'importance de la notion de convergence.
– Les suites constituent également un outil d'étude approfondie des nombres réels. Elles fournissent par exemple des algorithmes d'approximation de nombres irrationnels comme $\sqrt{2}$, e *ou* π.
L'idée de suite trouve sa source dans les méthodes d'approximations successives déjà utilisées par les Babyloniens 3000 *ans avant J.-C. et brillamment mises en œuvre par Archimède. L'étude d'une suite comme un objet en lui-même naît avec l'étude des séries au* XVIII$^{\text{e}}$ *siècle (Euler, d'Alembert).*

OBJECTIFS

- Définir rigoureusement la convergence d'une suite.
- Calculer des limites.
- Maîtriser la comparaison des suites.
- Utiliser les suites pour approcher un nombre réel.
- Étendre brièvement ces notions au cas d'une suite à valeurs complexes.

1 Généralités sur les suites

1.1 • Propriétés des suites

Dans certains cas, une suite peut n'être définie que sur une partie de $\mathbb{N}$. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est définie sur $\mathbb{N}^*$.

On appelle suite réelle une famille de réels indexée par les entiers naturels, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La suite $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n \end{array} \right.$ est notée en abrégé (x_n). L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite (x_n) est dite :

- **constante**, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n$
- **croissante**, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geqslant x_n$
- **décroissante**, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \leqslant x_n$
- **strictement croissante**, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n$
- **strictement décroissante**, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} < x_n$
- **monotone**, si elle est croissante ou décroissante ;
- **strictement monotone**, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante ;
- **majorée**, si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant M$
- **minorée**, si $\exists m \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant m$
- **bornée**, si elle est majorée et minorée ;
- **périodique**, si $\exists p \in \mathbb{N}^* \ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+p} = x_n$
- **stationnaire**, si elle est constante à partir d'un certain rang.

(x_n) bornée $\iff$ $(|x_n|)$ majorée

1.2 • Opérations sur les suites

On peut définir dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- **Une addition**

$$(z_n) = (x_n) + (y_n) \quad \iff \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = x_n + y_n$$

Cette opération est commutative, associative ; elle admet pour élément neutre la suite constante nulle et toute suite a une opposée :

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe commutatif.

- **Une multiplication interne**

$$(z_n) = (x_n)(y_n) \quad \iff \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = x_n y_n$$

Cette opération est commutative, associative ; elle admet pour élément neutre la suite constante 1, mais il existe des suites non nulles qui n'ont pas d'inverse : $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \times)$ n'est pas un groupe.

La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Dans cet anneau, le produit de deux éléments peut être nul, sans que l'un de ces deux éléments soit nul.

Exemple : Les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = (-1)^n + 1$ et $y_n = (-1)^n - 1$ sont non nulles et leur produit est nul.

■ **Une multiplication externe par les réels**

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad (y_n) = \alpha(x_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \alpha\, x_n$

On vérifie aisément que :

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

■ **Une relation d'ordre**

$$(x_n) \leqslant (y_n) \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant y_n$$

Cet ordre est partiel.

1.3 • Suites extraites

Il est utile de remarquer que, puisque φ est strictement croissante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geqslant n$$
(le montrer par récurrence).

On appelle suite extraite de la suite (x_n) une suite constituée de certains termes de (x_n) réindexés sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Exemples : (x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{n^2}) sont des suites extraites de (x_n).

2 Convergence d'une suite réelle

2.1 • Définition de la convergence

On dit qu'une suite diverge si elle ne converge vers aucun réel.

On dit que la suite (x_n) converge vers un réel l si x_n est aussi voisin que l'on veut de l, à partir d'un certain rang. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n - l| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit, tout intervalle centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemples :

1) Soit (x_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.
Montrons qu'elle vérifie la définition de la convergence, avec $l = 1$:
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\dfrac{n-1}{n+1} - 1\right| = \dfrac{2}{n+1}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; il suffit que $n+1 \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon}$ pour que $|x_n - 1| \leqslant \varepsilon$. On peut donc choisir $n_0 = E(\dfrac{2}{\varepsilon})$.

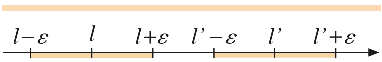
2) Soit (x_n) la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q, avec $0 < q < 1$: $x_n = q^n$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; il suffit que $n \geqslant \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln q}$ pour que $0 < q^n \leqslant \varepsilon$.

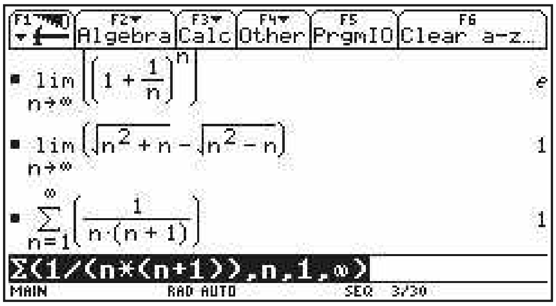
On peut donc choisir $n_0 = E(\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln q}) + 1$: la suite (q^n) converge vers $l = 0$.

2.2 • Unicité de la limite

Supposons qu'une suite (x_n) converge à la fois vers l et vers l' avec $l < l'$. Posons $\varepsilon = \dfrac{l' - l}{3}$. Il est clair que les intervalles $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$ et $[l'-\varepsilon, l'+\varepsilon]$ sont disjoints (*Doc.* 1).



Doc. 1 Unicité de la limite.



La TI-92/Voyage 200 sait calculer des limites de suites : limit(x(n),n, ∞).

Exemples (saurez-vous démontrer ces résultats ?)

La notation $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ désigne la limite, si elle existe, de $\sum_{k=1}^{n} x_k$ quand n tend vers l'infini.

La définition de la convergence donne :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad x_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_1 \quad x_n \in [l'-\varepsilon, l'+\varepsilon]$$

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on doit avoir :

$$x_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon] \cap [l'-\varepsilon, l'+\varepsilon]$$

ce qui est impossible.

Donc il ne peut exister qu'un seul réel l tel que (x_n) converge vers l : on l'appelle limite de la suite (x_n) et on écrit :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

Il est clair que :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - l) = 0$$

Il peut être commode pour étudier la convergence de (x_n) vers l de se ramener à la convergence de la suite $(x_n - l)$ vers 0.

APPLICATION 1

Suite convergente d'entiers

Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.

Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ qui converge vers l. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad |a_n - l| \leqslant \frac{1}{3}$. Comme l'intervalle $[l - \frac{1}{3}, l + \frac{1}{3}]$ ne peut contenir qu'un seul entier, on a nécessairement : $\forall n \geqslant n_0 \quad a_n = a_{n_0}$. La suite (a_n) est stationnaire.

La limite de la suite (a_n) est alors a_{n_0}, c'est-à-dire un entier : si une suite d'entiers converge, sa limite est un entier.

2.3 • Encadrement d'une suite convergente

Théorème 1

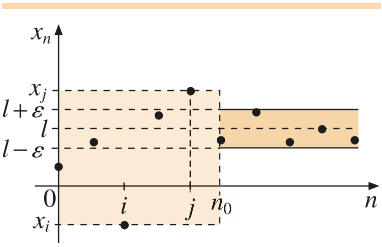
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

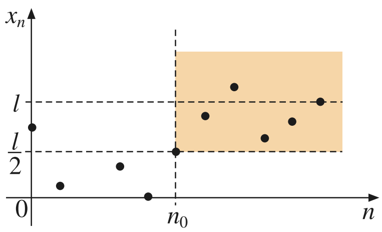
Soit (x_n) une suite convergeant vers l.

Soit $\varepsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad l - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant l + \varepsilon$: la suite est bornée pour $n \geqslant n_0$. Si $n_0 = 0$, la suite est bornée. Si $n_0 \geqslant 1$, l'ensemble $\{x_0, \cdots, x_{n_0-1}\}$ est fini ; il a donc un plus petit élément x_i et un plus grand x_j.

Alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad \min(x_i, l-\varepsilon) \leqslant x_n \leqslant \max(x_j, l+\varepsilon)$: la suite (x_n) est bornée (*Doc.* 2).



Doc. 2 Suite convergente.



Doc. 3 Minoration d'une suite convergente vers $l > 0$.

Théorème 2

Toute suite convergeant vers un réel strictement positif est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

Démonstration

Soit (x_n) une suite convergeant vers $l > 0$.

Il suffit dans la définition de la convergence de choisir $\varepsilon = \frac{l}{2}$;

$\exists n_0 \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \frac{l}{2} \leqslant x_n$: (x_n) est minorée par $\frac{l}{2}$ à partir du rang n_0 (*Doc.* 3).

2.4 • Convergence des suites extraites

Théorème 3

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

Démonstration

Soit (x_n) une suite convergeant vers l.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n - l| \leqslant \varepsilon$$

Soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (x_n), où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$. Donc :

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(n) \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_{\varphi(n)} - l| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(x_{\varphi(n)})$ converge donc vers l.

APPLICATION 2

Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit d'en trouver deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes

Exemple : Posons $x_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$.

On a :

$$x_{2n} = \cos\frac{\pi}{2n} \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2n+1}\right)$$

La suite (x_{2n}) converge vers 1, tandis que la suite (x_{2n+1}) converge vers -1.

On en déduit que la suite (x_n) diverge.

APPLICATION 3

Si (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (x_n) converge vers l

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1 \quad |x_{2n} - l| \leqslant \varepsilon$$

et $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_2 \quad |x_{2n+1} - l| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout entier p pair et supérieur ou égal à $2n_1$, ou impair et supérieur ou égal à $2n_2 + 1$, $|x_p - l| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\forall p \geqslant \max(2n_1, 2n_2 + 1) \quad |x_p - l| \leqslant \varepsilon$.

La suite (x_p) converge donc vers l.

Pour s'entraîner : ex. 3 et 4

3 Opérations sur les limites

3.1 • Suites convergeant vers 0

Théorème 4
La somme de deux suites convergeant vers 0 converge vers 0.

Démonstration
Soit (x_n) et (y_n) deux suites convergeant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n| \leqslant \varepsilon \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_1 \quad |y_n| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Si $n \geqslant \max(n_0, n_1) \qquad |x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| \leqslant 2\varepsilon$
On a démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice N à partir duquel $|x_n + y_n| \leqslant 2\varepsilon$. Il existe donc un indice N' à partir duquel $|x_n + y_n| \leqslant \varepsilon$.
Ceci exprime que la suite $(x_n + y_n)$ converge vers 0.

Remarque
L'ensemble des suites convergeant vers 0 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5
Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 converge vers 0.

Démonstration
Soit (x_n) une suite convergeant vers 0 : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n| \leqslant \varepsilon$
et (y_n) une suite bornée : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leqslant M$
– si $M = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n y_n = 0$; – si $M > 0$, $\forall n \geqslant n_0 \quad |x_n y_n| \leqslant M\varepsilon$.
On a démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice N à partir duquel $|x_n y_n| \leqslant M\varepsilon$. Il existe donc un indice N' à partir duquel $|x_n y_n| \leqslant \varepsilon$.
Donc la suite $(x_n y_n)$ converge vers 0.

Exemple : $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$. La suite $(\sin n)$ est bornée et la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0, donc la suite (x_n) converge vers 0.

3.2 • Limites quelconques

Des théorèmes précédents, on déduit les résultats suivants :

Théorème 6
1. La somme de deux suites convergentes est convergente et sa limite est la somme des deux limites.
2. Le produit de deux suites convergentes est convergent et sa limite est le produit des deux limites.
3. L'inverse d'une suite convergeant vers une limite non nulle l est convergente et sa limite est $\dfrac{1}{l}$.
4. Le quotient de deux suites convergentes, la limite du dénominateur étant non nulle, converge et sa limite est le quotient des deux limites.

Démonstration

1. Soit (x_n) et (y_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l'.
$(x_n + y_n) - (l + l') = (x_n - l) + (y_n - l')$ qui tend vers 0.
Donc $(x_n + y_n)$ converge vers $l + l'$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n)$$

2. $x_n y_n - l\,l' = (x_n - l)y_n + l(y_n - l')$.
La suite $(x_n - l)$ converge vers 0 et la suite (y_n) est convergente, donc bornée ; par conséquent, le produit $(x_n - l)y_n$ converge vers 0. De même, $(y_n - l')$ converge vers 0, donc $l(y_n - l')$ converge vers 0. En définitive, $(x_n y_n - l\,l')$ converge vers 0, donc $(x_n y_n)$ converge vers $l\,l'$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n)\ \lim_{n\to\infty}(y_n)$$

3. Supposons, par exemple, que $l > 0$. Alors, d'après le théorème 2, il existe $m > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant n_0 \quad 0 < m \leqslant y_n$. À partir du rang n_0, la suite (y_n) ne s'annule plus, la suite $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ est donc définie à partir de ce rang et :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - y_n}{y_n\,l}\right| = \left|\frac{1}{l\,y_n}\right| |y_n - l|$$

or $0 < \dfrac{1}{y_n} \leqslant \dfrac{1}{m}$, donc $\left|\dfrac{1}{l\,y_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{l\,m}$.

La suite $\left(\dfrac{1}{l\,y_n}\right)$ est bornée, et, par conséquent, le produit $\left|\dfrac{1}{l\,y_n}\right| |y_n - l|$ converge vers 0. Donc $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{l}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \qquad (\text{avec } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0)$$

4. Comme en 3., la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et la suite $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ converge.

$\dfrac{x_n}{y_n} = x_n\dfrac{1}{y_n}$, donc $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4 Limites infinies

4.1 • Suites tendant vers l'infini

On dit que la suite (x_n) tend vers $+\infty$ si x_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang. C'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad x_n \geqslant A$$

On note $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

On définit de même une suite tendant vers $-\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad x_n \leqslant A$$

On note $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

On peut considérer que (x_n) converge **dans** $\overline{\mathbb{R}}$, mais sans cette précision, on dit que (x_n) diverge.

4.2 • Extension des opérations sur les limites

Résumons les différents cas dans des tableaux (les démonstrations sont laissées au lecteur) :

Sommes

$\lim_{n\to\infty} x_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to\infty} y_n$	l'	l	minorée	l	majorée	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Le dernier cas est une indétermination. Tout est possible :

- Limite finie, par exemple : $x_n = n \quad y_n = \dfrac{1}{n} - n$.
- Limite infinie, par exemple : $x_n = n^2 \quad y_n = -n$.
- Pas de limite, par exemple : $x_n = n + (-1)^n \quad y_n = -n$.

Produits

Pour simplifier, on n'étudiera que des suites **positives**.

$\lim_{n\to\infty} x_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to\infty} y_n$	l'	$l' > 0$	minorant > 0	0	$+\infty$
$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n)$	$l\, l'$	$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$

Ici aussi, dans le cas d'indétermination, tout est possible :

- Limite finie, par exemple : $x_n = n \quad y_n = \dfrac{1}{n}$.
- Limite infinie, par exemple : $x_n = n^2 \quad y_n = \dfrac{1}{n}$.
- Pas de limite, par exemple : $x_n = n \quad y_n = \dfrac{\sin^2 n}{n}$.

Quotients

On ne considère également que des suites **positives**.

$\lim_{n\to\infty} x_n$	l	$l > 0$	minorant > 0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	majorée
$\lim_{n\to\infty} y_n$	$l' > 0$	0	0	minorant > 0	0	l'	majorée	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	$+\infty$	$+\infty$	0	?	$+\infty$	$+\infty$	?	0

APPLICATION 4

Lever une indétermination

Étudier la limite de la suite $x_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n$, *où* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

C'est une indétermination du type « $\infty - \infty$ ».
(*) Multiplions haut et bas par la « quantité conjuguée » $\sqrt{(n+a)(n+b)} + n$, qui est non nulle :

$$x_n = \frac{(n+a)(n+b) - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n}$$
$$= \frac{(a+b)n + ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n}$$

Pour $n \geqslant 1$, divisons numérateur et dénominateur par n :

$$x_n = \frac{a + b + \dfrac{ab}{n}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{n}\right)\left(1+\dfrac{b}{n}\right)} + 1}$$

Le numérateur tend vers $a+b$, et le dénominateur vers 2. D'où :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a+b}{2}.$$

(*) Cette méthode deviendra obsolète lorsque nous aurons étudié les développements limités.

Pour s'entraîner : ex. 8

5 Limites et inégalités

Même si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < y_n$, il se peut que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$: le passage à la limite **élargit** les inégalités, c'est-à-dire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < y_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n$$

Exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

5.1 • Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 7

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles convergentes.

Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant y_n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Démonstration

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) > 0$, ce qui entraîne que $(x_n - y_n)$ est strictement positive à partir d'un certain rang, en contradiction avec l'hypothèse. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Le théorème 8 n'est pas un simple corollaire du précédent : on ne peut pas écrire

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} z_n$$

avant de savoir si (y_n) converge.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant \sin n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

les deux suites encadrantes convergent (vers des limites différentes), mais la suite $(\sin n)$ n'a pas de limite.

5.2 • Encadrement par des suites de même limite

Le résultat suivant est appelé familièrement « théorème des gendarmes » :

Théorème 8

Soit (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

Si (x_n) et (z_n) convergent vers la même limite l, alors (y_n) converge et sa limite est l.

Démonstration

$x_n - l \leqslant y_n - l \leqslant z_n - l$, d'où $|y_n - l| \leqslant \sup(|x_n - l|, |z_n - l|)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - l| \leqslant \varepsilon$
et $\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad n \geqslant n_1 \Rightarrow |z_n - l| \leqslant \varepsilon$.
Alors $n \geqslant \max(n_0, n_1) \Rightarrow |y_n - l| \leqslant \varepsilon$: (y_n) converge vers l.

APPLICATION 5

Calcul d'une limite par encadrement

Encadrer la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

$$\forall n \geqslant 3 \quad S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

S_n est une somme de n termes, dont le plus grand est $\dfrac{n}{n^2+1}$ et le plus petit est $\dfrac{n}{n^2+n}$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n\frac{n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant n\frac{n}{n^2+1}$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\frac{n}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

et : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$

La suite (S_n) étant encadrée par deux suites convergeant vers 1, elle converge et sa limite est 1.

Pour s'entraîner : ex. 8 et 11

5.3 • Extension à l'infini

Théorème 9

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant y_n$.
- Si (x_n) tend vers $+\infty$, (y_n) tend aussi vers $+\infty$.
- Si (y_n) tend vers $-\infty$, (x_n) tend aussi vers $-\infty$.

Démonstration

$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad x_n \geqslant A$. *A fortiori*, $\forall n \geqslant n_0 \quad y_n \geqslant A$.
On procède de même pour la 2^e^ proposition.

APPLICATION 6

Un produit qui tend vers l'infini

Étudier la suite définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2 - \frac{k}{2n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Les facteurs d'indice $k \in [\![1, n]\!]$ sont supérieurs ou égaux à $\dfrac{3}{2}$. Les autres sont supérieurs ou égaux à 1.

Donc :

$$u_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Comme $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$, (u_n) tend aussi vers $+\infty$.

6 Comparaison des suites

6.1 • Suite dominée par une autre

Soit (x_n) une suite de réels non nuls. On dit que la suite réelle (y_n) est dominée par la suite (x_n) si le quotient $\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)$ est borné.

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leqslant M$$

Notation : On écrit $y_n = O(x_n)$ (lire « grand O de x_n »).

Exemple : $n \sin n = O(n)$.

6.2 • Suite négligeable devant une autre

Soit (x_n) une suite de réels non nuls. On dit que la suite réelle (y_n) est négligeable devant la suite (x_n) si le quotient $\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)$ converge vers 0.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \left|\frac{y_n}{x_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

Notation : On écrit $y_n = o(x_n)$ (lire « petit o de x_n »).

Exemple : $n \sin n = o(n^2)$.

6.3 • Suites équivalentes

Soit (x_n) une suite de réels non nuls. On dit que la suite réelle (y_n) est équivalente à la suite (x_n) si le quotient $\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right)$ converge vers 1.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \left|\frac{y_n}{x_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

Notation : On écrit $y_n \sim x_n$ (lire « est équivalent à x_n »).

Exemple : $\sqrt{n^2+1} \sim n$.

Théorème 10

Soit (x_n) une suite de réels non nuls et (y_n) une suite réelle quelconque.

$$y_n \sim x_n \iff y_n - x_n = o(x_n)$$

On écrit $y_n = x_n + o(x_n)$.

Démonstration

$y_n \sim x_n$ équivaut à $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n} - 1 = 0$, ou encore à $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - x_n}{x_n} = 0$, c'est-à-dire à $y_n - x_n = o(x_n)$.

- Si (y_n) est équivalente à une suite (x_n) de réels non nuls, les termes de la suite (y_n) sont eux-mêmes non nuls à partir d'un certain rang. On peut alors dire que (x_n) est équivalente à (y_n) ou encore que les suites (x_n) et (y_n) sont équivalentes sans préciser dans quel ordre on les considère.
- Si (x_n) est équivalente à (y_n), et (y_n) équivalente à (z_n), alors (x_n) est équivalente à (z_n).
- Si deux suites sont équivalentes, elles sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Si $x_n \sim y_n$, alors :
  - (x_n) et (y_n) sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes ;
  - si $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

6.4 • Compatibilité avec la multiplication

ATTENTION

L'équivalence des suites n'est pas compatible avec l'addition : si $x_n \sim y_n$, il n'est pas certain que $x_n + z_n \sim y_n + z_n$.
Par exemple : $n+1 \sim n-1$, mais $(n+1) - n \not\sim (n-1) - n$.

Il est clair que, si $x_n \sim y_n$, alors, pour toute suite (z_n) de réels non nuls, $x_n z_n \sim y_n z_n$. On dit que l'équivalence des suites est compatible avec la multiplication. Ceci est très utile dans les calculs de limites de produits ou de quotients.

Exemple :

$$\sqrt{n^2+n+1} \sim n \quad \text{et} \quad 2n+1 \sim 2n, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+1} \sim \frac{n}{2n}$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Dans un calcul de limite, on peut remplacer une suite par une suite équivalente dans un produit ou un quotient, mais jamais dans une somme ou une différence.

APPLICATION 7

Un calcul de limite à l'aide d'équivalents

Calculer la limite de la suite $x_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$.

$$\forall n > 1 \quad x_n = \frac{n}{2} \ln \frac{n+1}{n-1} = \frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$$

Comme $\dfrac{2}{n-1}$ tend vers 0,

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1}$$

(car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$).

On en déduit que :

$$x_n \sim \frac{n}{n-1} \sim 1.$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Pour s'entraîner : ex. 9 et 10

6.5 • Comparaison logarithmique

Théorème 11

Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de réels strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$, alors $x_n = O(y_n)$.

Démonstration

Supposons que $\forall n \geqslant n_0 \quad \dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \dfrac{x_n}{y_n}$: à partir du rang n_0, la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ est décroissante, donc majorée par $\left(\dfrac{x_{n_0}}{y_{n_0}}\right)$ et minorée par 0 : elle est bornée, ce qui signifie que $x_n = O(y_n)$.

En particulier, si (x_n) est à termes strictement positifs et s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant k$, alors $x_n = O(k^n)$.

Si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = 0$, donc (x_n) converge vers 0.

6.6 • Comparaison des suites de référence

Comparons la croissance des suites (n^α), $\big((\ln n)^\beta\big)$, (a^n), $(n!)$, (n^n).

1. $$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad \big(\alpha<\beta \quad\Rightarrow\quad n^\alpha = o(n^\beta)\big)$$

Démonstration

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-\beta} = 0$, car $\alpha - \beta < 0$.

2. $$\forall\alpha>0 \;\; \forall a>1 \quad n^\alpha = o(a^n)$$

Démonstration

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{n^\alpha}{a^n}$. La suite $\left(\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{a}$ qui est strictement inférieur à 1. Soit $k \in \left]\dfrac{1}{a}, 1\right[$; il existe un rang à partir duquel $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} < k$, d'où, d'après le théorème de comparaison logarithmique, $\varepsilon_n = O(k^n)$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, ce qui signifie que $n^\alpha = o(a^n)$.

3. $$\forall(a,a')\in\mathbb{R}_+^{*2} \quad \big(a<a' \quad\Rightarrow\quad a^n = o(a'^n)\big)$$

Démonstration

$\dfrac{a^n}{a'^n} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^n$. Comme $0 < \dfrac{a}{a'} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a'^n} = 0$.

4. $$\forall a>1 \quad a^n = o(n!)$$

Démonstration

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{a^n}{n!}$. La suite $\left(\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)$ converge vers 0. À partir d'un certain rang, $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} < \dfrac{1}{2}$, d'où $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, ce qui signifie que $a^n = o(n!)$.

5. $$n! = o(n^n)$$

Démonstration

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{n!}{n^n}$. La suite $\left(\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. À partir d'un certain rang, $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} < \dfrac{1}{2}$, d'où $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, ce qui signifie que $n! = o(n^n)$.

6. $$\forall\alpha>0 \;\; \forall\beta>0 \quad (\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$$

Démonstration

D'après 2., $(\ln n)^\beta = o\big((\mathrm{e}^\alpha)^{\ln n}\big)$ d'où le résultat.

On a donc établi une échelle de suites tendant vers $+\infty$ (la flèche $\rightarrow$ signifie « est négligeable devant »)

$$(\ln n)^{\beta} \quad \rightarrow \quad n^{\alpha} \quad \rightarrow \quad a^{n} \quad \rightarrow \quad n! \quad \rightarrow \quad n^{n}$$

En passant aux inverses, on a une échelle comparable de suites tendant vers 0 :

$$n^{-n} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{n!} \quad \rightarrow \quad a^{-n} \quad \rightarrow \quad n^{-\alpha} \quad \rightarrow \quad (\ln n)^{-\beta}$$

7 Théorèmes d'existence de limites

7.1 • Suites monotones bornées

De même, toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Théorème 12

Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.

Démonstration

Soit (x_n) une suite croissante majorée. L'ensemble $E = \{ x_n \, , \, n \in \mathbb{N} \}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée : elle admet une borne supérieure l.
Pour tout $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E ; il existe donc un entier n_0 tel que $l - \varepsilon \leqslant x_{n_0} \leqslant l$. La suite étant croissante :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad l - \varepsilon \leqslant x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant l \quad , \text{donc} \quad |x_n - l| \leqslant \varepsilon$$

La suite (x_n) converge vers l.

Ces résultats s'étendent sans difficulté au cas des suites monotones non bornées :

Théorème 13

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Pour s'entraîner : ex. 12 et 13

7.2 • Suites adjacentes

Deux suites réelles sont dites adjacentes si :

– l'une est croissante et l'autre décroissante ;

– leur différence converge vers 0.

Théorème 14

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

La limite commune des deux suites, notée l, vérifie l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant l \leqslant y_n$$

Démonstration

Supposons (x_n) croissante, (y_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$.

La suite $(y_n - x_n)$ est décroissante et elle converge vers 0 ; elle est donc toujours positive : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_0$.

(x_n) est donc croissante et majorée par y_0 : elle converge.

(y_n) est décroissante et minorée par x_0 : elle converge.

De $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, on déduit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

APPLICATION 8

Irrationnalité de e

Montrer que les suites (S_n) et (S'_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n\,n!}$$

sont adjacentes. Encadrer leur limite commune à 10^{-6} près et démontrer qu'elle est irrationnelle (nous verrons plus tard qu'il s'agit du nombre e).

$S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc (S_n) est strictement croissante.

$$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!}$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0\,,$$

donc (S'_n) est strictement décroissante.

$S'_n - S_n = \dfrac{1}{n\,n!}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}(S'_n - S_n) = 0$.

Les suites (S_n) et (S'_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers une même limite l.

Pour encadrer l à 10^{-6} près, choisissons n tel que $\dfrac{1}{n\,n!} < 10^{-6}$, soit $n = 9$. Les suites (S_n) et (S'_n) étant strictement monotones, $S_9 < l < S'_9$

$$2{,}7182815 < l < 2{,}7182819$$

Supposons que $l \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que $l = \dfrac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

On aurait $S_q < \dfrac{p}{q} < S'_q$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q\,q!}$$

Multiplions par $q\,q!$: $N < p\,q! < N + 1$, où $N \in \mathbb{N}$. L'entier $p\,q!$ serait strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est impossible.

Donc l est irrationnel.

Pour s'entraîner : ex. 14 à 19

7.3 • Segments emboîtés

Théorème 15 (Théorème des segments emboîtés)

Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite de segments emboîtés (c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$) dont l'amplitude $(b_n - a_n)$ converge vers 0.

L'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Démonstration

Il suffit de remarquer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel l. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant l \leqslant b_n$, donc $l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Si l' est un élément quelconque de cette intersection, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n - a_n \geqslant |l - l'|$, d'où $l = l'$.

7.4 • Suite extraite d'une suite bornée

Théorème 16 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration

Soit (x_n) une suite bornée : $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant x_n \leqslant M$.

Posons $I_0 = [m, M]$. L'un au moins des deux segments $\left[m, \dfrac{m+M}{2}\right]$ ou $\left[\dfrac{m+M}{2}, M\right]$ contient une infinité de termes de la suite (*). Appelons-le I_1.

En recommençant cette opération, on obtient une suite de segments emboîtés I_n, d'amplitude $\dfrac{M-m}{2^n}$ qui tend vers 0, telle que chaque segment I_n contienne une infinité de termes de la suite. D'après le théorème des segments emboîtés, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

Dans chaque segment I_n, il y a une infinité de termes de la suite ; on peut donc en choisir un que l'on notera $x_{\varphi(n)}$ où l'indice $\varphi(n)$ est strictement plus grand que l'indice $\varphi(n-1)$ choisi pour le segment précédent (on peut choisir librement $\varphi(0)$ puisque I_0 contient tous les termes de la suite). L'application φ est strictement croissante. La suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{\varphi(n)} - l| \leqslant \frac{M-m}{2^n}$$

Elle converge donc vers l.

* Quand on parle d'une infinité de termes, on veut dire les termes de la suite pour une infinité d'indices, les valeurs de ces termes étant distinctes ou non.

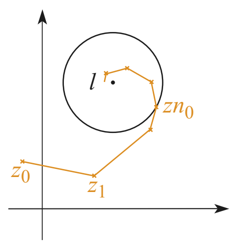
Bernhard Bolzano : mathématicien, philosophe et théologien tchèque (1781-1848). Précurseur de Cantor pour la théorie des ensembles, il est le premier à se poser le problème de la définition précise des nombres réels. Auteur du premier exemple de fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point.

Karl Weierstrass : mathématicien allemand (1815-1897). Auteur d'une théorie axiomatique des nombres réels et des fonctions, il fonde l'analyse sur des bases solides.

8 Suites à valeurs complexes

8.1 • Convergence d'une suite complexe

On peut étendre aux suites complexes toutes les propriétés des suites réelles qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ (il ne sera plus question de suite croissante, décroissante, majorée, minorée...). Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.



Doc. 4 Suite complexe convergente.

Par exemple, une suite complexe (z_n) est dite bornée si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |z_n| \leqslant M$$

La suite (z_n) converge vers le nombre complexe l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |z_n - l| \leqslant \varepsilon$$

(dans le plan complexe, le disque de centre l de rayon ε contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (*Doc.* 4)).

Les résultats suivants restent valables :

– Toute suite convergente est bornée.

– Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

– La somme de deux suites convergentes converge vers la somme des deux limites.

– Le produit de deux suites convergentes converge vers le produit des deux limites.

– Le quotient de deux suites convergentes, la limite du dénominateur étant non nulle, converge vers le quotient des deux limites.

On peut étendre aux suites complexes les notions de suite dominée par une autre, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes.

8.2 • Partie réelle et partie imaginaire d'une suite complexe

Montrons que la convergence d'une suite complexe revient à la convergence de sa partie réelle et de sa partie imaginaire :

Théorème 17

La suite complexe (z_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z_n = x_n + iy_n$ avec $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.

1) Si les suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers les réels a et b, la somme $(x_n + iy_n)$ converge vers $a + ib$.

2) Si la suite (z_n) converge vers $l = a + ib$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |(x_n - a) + i(y_n - b)| \leqslant \varepsilon$$

Or $|x_n - a| \leqslant |(x_n - a) + i(y_n - b)|$, donc (x_n) converge vers a ;
et $|y_n - b| \leqslant |(x_n - a) + i(y_n - b)|$, donc (y_n) converge vers b.

On en déduit que le théorème de Bolzano-Weierstrass reste valable pour les suites complexes :

Théorème 18 (Théorème de Bolzano-Weierstrass complexe)

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration

Soit $(z_n = x_n + i\,y_n)$ une suite bornée de $\mathbb{C}$. Comme $|x_n| \leqslant |z_n|$ et $|y_n| \leqslant |z_n|$, les suites (x_n) et (y_n) sont bornées. La suite réelle (x_n) étant bornée, on peut donc en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. La suite réelle $(y_{\varphi(n)})$ étant bornée, on peut en extraire une suite convergente $(y_{\varphi\circ\psi\ (n)})$. La suite $(x_{\varphi\circ\psi\ (n)})$ est extraite d'une suite convergente ; elle est donc convergente. En définitive, la suite $(z_{\varphi\circ\psi\ (n)} = x_{\varphi\circ\psi\ (n)} + iy_{\varphi\circ\psi\ (n)})$ converge dans $\mathbb{C}$.

APPLICATION 9

Étude d'une suite récurrente à valeurs complexes

Soit (z_n) une suite complexe définie par son terme initial z_0 et la relation de récurrence : $z_{n+1} = z_n^2$.

1) *Déterminer le comportement de la suite (z_n) lorsque $|z_0| \neq 1$.*

2) *On suppose que $|z_0| = 1$ et on pose $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n}$ avec $\alpha_n \in]-\pi, \pi]$.*

a) *Montrer qu'il existe une suite (k_n) d'entiers telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2k_n\pi$$

b) *On suppose que la suite (z_n) converge. Montrer que la suite (α_n) converge vers 0. En déduire que la suite (k_n) s'annule à partir d'un certain rang n_0. Montrer que $\alpha_{n_0} = 0$ et en déduire la forme de α_0.*

c) *Quel est l'ensemble des valeurs de z_0 pour lesquelles la suite (z_n) converge ?*

1) Si $|z_0| \neq 1$, $|z_{n+1}| = |z_n|^2 = |z_0|^{2^n}$. La suite $(|z_n|)$ est extraite de la suite géométrique $(|z_0|^n)$.

Si $|z_0| < 1$, cette suite converge vers zéro. Donc (z_n) converge vers zéro.

Si $|z_0| > 1$, cette suite tend vers $+\infty$. Donc (z_n) diverge.

2.a) Si $|z_0| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_n| = 1$. Il existe donc $\alpha_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $z_n = \mathrm{e}^{i\,\alpha_n}$

$$z_{n+1} = z_n^2 \iff \alpha_{n+1} = 2\alpha_n \quad [2\pi]$$

Il existe donc un entier $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2k_n\pi$$

b) Si la suite (z_n) converge, sa limite l doit vérifier $l^2 = l$ et $|l| = 1$. D'où $l = 1$ et, par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. On en déduit que la suite (k_n) converge vers zéro, et comme toute suite convergente d'entiers est stationnaire, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad k_n = 0$.
Alors $\forall n \geqslant n_0 \quad \alpha_{n+1} = 2\alpha_n$,
d'où $\forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n_0+p} = 2^p\alpha_{n_0}$.
Si α_{n_0} n'était pas nul, la suite (α_n) tendrait vers $+\infty$, ce qui est absurde. Donc $\alpha_{n_0} = 0$.

Or $\exists k \in \mathbb{Z}\ \alpha_{n_0} = 2^{n_0}\alpha_0 + 2k\pi$, d'où $\alpha_0 = -\dfrac{2k\pi}{2^{n_0}}$.

c) En définitive, la suite (z_n) converge si et seulement si $|z_0| < 1$ ou si $|z_0| = 1$ et $\exists (k_0, n_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{k_0\pi}{2^{n_0}}}$ (dans ce cas, $\forall n \geqslant n_0 \quad z_n = 1$).

Pour s'entraîner : ex. 20, 21, 22

MÉTHODE

Pour montrer qu'une suite (u_n) est monotone, on peut :

- étudier le signe de $(u_{n+1} - u_n)$ (*cf. exercices* 14 *à* 16 *)* ;
- si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 ;
- démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$ ou $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$ (*cf. exercices* 18, 19 *)*.

Pour montrer qu'une suite converge, on peut :

- chercher si elle est monotone bornée (*cf. exercices* 12 *et* 13) ;
- chercher une autre suite qui lui serait adjacente (*cf. Application* 8 *et exercices* 14 *et* 17) ;
- montrer qu'elle est extraite d'une suite convergente (*cf. exercice* 3) ;
- montrer que les deux suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers la même limite (*cf. Application* 3 *et exercices* 3 *et* 16) ;
- l'encadrer entre deux suites convergentes de même limite (*cf. Application* 5 *et exercice* 11).

Pour trouver la limite d'une suite quand on sait qu'elle converge, on peut :

- appliquer les opérations sur les limites (*cf. Application* 4 *et exercice* 8) ;
- utiliser des équivalents (*cf. Application* 7 *et exercice* 10).

Pour montrer qu'une suite diverge, on peut :

- en extraire deux suites qui convergent vers des limites différentes (*cf. Application* 2) ;
- plus généralement, en extraire deux suites dont la différence ne tend pas vers 0 (*cf. exercice* 4) ;
- la minorer par une suite tendant vers $+\infty$ ou la majorer par une suite tendant vers $-\infty$ (*cf. Application* 6) ;
- montrer qu'elle n'est pas bornée.

Exercice résolu

MOYENNE DE CÉSARO

1 *Soit (x_n) une suite réelle convergente de limite l. Montrer que la suite (y_n) définie par $y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} x_p$ converge également vers l. La réciproque est-elle vraie ?*

2 *Soit (x_n) une suite réelle telle que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers l. Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$ converge également vers l. La réciproque est-elle vraie ?*

3 *Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ converge vers l. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge également vers l. La réciproque est-elle vraie ?*

4 *Application : Déterminer les limites éventuelles des suites :*

$$\textbf{a)}\ u_n = \sqrt[n]{n}\ ; \qquad \textbf{b)}\ u_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}\ ; \qquad \textbf{c)}\ u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Conseils

Essayer de majorer $|y_n - l|$.

⚠ $|x_p - l| \leqslant \varepsilon$ n'est applicable que pour $p \geqslant n_0$.

Il est inutile de tout refaire. On cherche à appliquer le résultat de la question **1)** à une autre suite.

Solution

1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que : $\forall p \geqslant n_0 \quad |x_p - l| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant n_0 \qquad y_n - l = \dfrac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}(x_p - l)$.

D'où $\qquad |y_n - l| \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{p=1}^{n_0-1}|x_p - l| + \dfrac{1}{n}\sum_{p=n_0}^{n}|x_p - l|$.

n_0 étant fixé, le premier terme de cette somme tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; il existe donc un entier n_1 tel que :

$$\forall n \geqslant n_1 \quad \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n_0-1}|x_p - l| \leqslant \varepsilon$$

Quant au second terme : $\quad \dfrac{1}{n}\sum_{p=n_0}^{n}|x_p - l| \leqslant \dfrac{n - n_0 + 1}{n}\varepsilon \leqslant \varepsilon$.

D'où $\quad \forall n \geqslant \max(n_0, n_1) \quad |y_n - l| \leqslant 2\varepsilon, \quad$ c'est-à-dire $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

La réciproque est fausse ; avec $x_n = (-1)^n$, la suite (y_n) converge vers 0 bien que la suite (x_n) ne converge pas.

2) Appliquons le résultat de la question **1)** à la suite (x'_n), où $x'_n = x_{n+1} - x_n$:

$$y'_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} x'_p = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}(x_{p+1} - x_p) = \frac{x_{n+1} - x_1}{n}.$$

Comme (x'_n) converge vers l, (y'_n) converge aussi vers l ; donc $\left(\dfrac{x_{n+1}}{n}\right)$ converge vers l ; il en est de même de $\left(\dfrac{x_{n+1}}{n+1}\right)$; donc de $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$.

C'est la même question que le **2)** en remplaçant une différence par un quotient : penser à la fonction logarithme.

Ici aussi, la réciproque est fausse ; avec $x_n = (-1)^n$, la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$ converge vers 0 bien que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ ne converge pas.

3) Il suffit d'appliquer le résultat de la question **2)** à la suite $(\ln x_n)$; la suite $(\ln x_{n+1} - \ln x_n)$ converge vers $\ln l$, donc la suite $\left(\dfrac{\ln x_n}{n}\right)$ converge aussi vers $\ln l$; or $\dfrac{\ln x_n}{n} = \ln \sqrt[n]{x_n}$, donc la suite $(\sqrt[n]{x_n})$ converge vers l.

La réciproque est encore fausse : il suffit de considérer la suite $(e^{(-1)^n})$.

4) a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

b) $$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!\,n!^2}{(n+1)!^2(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\ ;$$

donc $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4.$$

c) $$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\ .$$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; on en déduit donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

b) Si la suite $(|x_n|)$ converge vers l, la suite (x_n) converge vers l ou vers $-l$.

c) Si la suite (x_n) converge vers l, la suite (x_{n^2}) converge vers l.

d) La relation $(x_n)\mathcal{R}(y_n) \iff \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

e) Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.

f) Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.

g) La différence de deux suites équivalentes converge vers 0.

h) Le quotient de deux suites non nulles équivalentes converge vers 1.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n = 1$.

j) De toute suite d'éléments de $[a, b]$, on peut extraire une suite qui converge vers un élément de $[a, b]$.

Convergence

2 Montrer que toute suite d'entiers strictement monotone est divergente.

3 Soit (x_n) une suite réelle. On suppose que les suites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent. Démontrer que la suite (x_n) converge.

4 Montrer que, si une suite (x_n) est convergente, la suite $(x_{2n} - x_n)$ converge vers 0. En déduire que la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente.

5* x étant un irrationnel positif et (r_n) une suite de rationnels convergeant vers x, on note $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers premiers entre eux.
Montrer que les suites (p_n) et (q_n) tendent vers $+\infty$.

6* Soit $u_n = \sin n\alpha$ et $v_n = \cos n\alpha$.
Étudier les suites (u_n) et (v_n) lorsque $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$.
Dans le cas contraire, montrer que la convergence de l'une entraîne la convergence de l'autre et conclure.
Qu'en est-il de $\sin\sqrt{n}\alpha$?

7 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$$

est un entier pair.
En déduire que la suite $\left(\sin\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right)\right)$ converge.

Limites – Équivalents

8 Déterminer les limites éventuelles des suites :

a) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

b) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$

c) $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$ **d)** $u_n = \dfrac{E\left((n+\frac{1}{2})^2\right)}{E\left((n-\frac{1}{2})^2\right)}$

e) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} E(kx) \quad (x \in \mathbb{R})$

f) $u_n = (n)^{\frac{1}{\ln n}}$ **g)** $u_n = (\ln n)^{\frac{1}{n}}$

h) $u_n = (n)^{\frac{\sin n}{n}}$ **i)** $u_n = \left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$

j) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$

k) u_n est la n ième décimale de $\sqrt{2}$.

9 Trouver une suite simple équivalente à la suite :

a) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ **b)** $x_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

c) $x_n = n\sin\dfrac{1}{n^2}$ **d)** $x_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

e) $x_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ **f)** $x_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)$

g) $x_n = \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)\right]^n$

h) $x_n = \left[\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)\right]^\pi$

10 Utiliser des équivalents pour calculer les limites :

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$

11 Étudier la convergence de la suite :

$$x_n = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n} p!$$

Indication : Montrer que $\forall m \geqslant 1 \quad \displaystyle\sum_{p=1}^{m} p! \leqslant (m+1)!$.

12 On considère la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$$

Montrer que $x_n^2 \leqslant 1 + x_n\sqrt{2}$. En déduire que (x_n) converge.

13 Pour tout entier n strictement positif, on considère le polynôme :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

1) Montrer que le polynôme P_n admet une unique racine positive α_n.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(\alpha_{n+1}) < 0$. En déduire le sens de variation de la suite (α_n) et démontrer qu'elle converge.

3) Simplifier l'expression de $P_n(x)$ pour $x \neq 1$ et en déduire la limite de la suite (α_n).

Suites adjacentes

14 Montrer que les suites :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes. Que peut-on en conclure ?

15 Montrer que les suites :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$$

sont adjacentes.

Montrer, à l'aide d'un graphique, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leqslant \ln 2 \leqslant S'_n.$$

Que peut-on en conclure ?

16 On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (S_n) converge.

Généralisation : soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0. Démontrer que la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ converge.

17 Montrer que les suites :

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont adjacentes.

18* Soit $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a\,, \quad v_0 = b\,, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\,, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune et exprimer cette limite à l'aide de l'unique réel $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{a}{b}$.

19* Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1\,, \quad v_0 = 2\,, \quad \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\,, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

sont rationnelles, adjacentes et que leur limite est $\sqrt{2}$.

Suites complexes

20 Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n) \\[2mm] y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite complexe $(z_n = x_n + iy_n)$, puis des suites (x_n) et (y_n).

21 Étudier la convergence de la suite (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \dfrac{i}{2}z_n + 1$.

22* Soit $z = x + iy$ un complexe donné. Démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Exercices posés aux oraux des concours

23 (Petites Mines 2007)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant v_n$.

On suppose que la suite (v_n) est convergente.

1) Peut-on affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

2) Peut-on le dire si on suppose de plus que (u_n) est croissante ?

24 (Petites Mines 2006)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

25 (CCP 2006)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k\,k!}\right) \quad ; \quad v_n = u_n\left(1 + \frac{1}{n\,n!}\right)$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite.

17 Fonctions d'une variable réelle

INTRODUCTION

Les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ *sont utilisées dans toutes les applications des mathématiques pour représenter l'évolution d'un phénomène au cours du temps.*
Habituellement, la notion de limite est introduite avant celle de continuité. Nous préférons ici présenter la continuité comme la situation « normale » et définir la limite en un point par la possibilité de prolonger la fonction par une fonction continue en un point où elle n'est pas définie. C'est bien ce que l'on fait lorsqu'on « lève une indétermination ». Historiquement, la notion de fonction a d'abord une signification géométrique chez Isaac Newton ou Gottfried Wilhelm Leibniz.
La première définition autonome est due à Jean Bernoulli en 1718 *et les notions de continuité et de limites, encore très floues au* XVII^{e} *siècle, ne trouvent une définition rigoureuse qu'avec Augustin Cauchy en* 1821.

OBJECTIFS

- Définir précisément les notions de continuité et de limites.
- Étudier les propriétés des fonctions continues sur un intervalle.
- Étendre brièvement ces résultats aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les fonctions

1.1 • Propriétés globales d'une fonction

On appelle fonction d'une variable réelle à valeurs réelles une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La partie D est appelée ensemble de définition de la fonction.

La fonction f définie sur D est dite :

- **croissante,** si $\forall (x, x') \in D^2 \quad (x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x'))$
- **décroissante,** si $\forall (x, x') \in D^2 \quad (x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x'))$
- **strictement croissante,** si $\forall (x, x') \in D^2 \quad (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$
- **strictement décroissante,** si $\forall (x, x') \in D^2 \quad (x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$
- **monotone,** si elle est croissante ou décroissante
- **strictement monotone,** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante
- **majorée,** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$
  si f est majorée, elle admet une borne supérieure (plus petit majorant), notée $\sup\limits_D f$
- **minorée,** si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geqslant m$
  si f est minorée, elle admet une borne inférieure (plus grand minorant), notée $\inf\limits_D f$
- **bornée,** si elle est majorée et minorée
- **paire,** si $\forall x \in D \quad -x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$
- **impaire,** si $\forall x \in D \quad -x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$
- **périodique,** si $\exists T \in \mathbb{R}^* \ \forall x \in D \ \begin{cases} x + T \in D \\ x - T \in D \end{cases} \ \text{et} \ f(x+T) = f(x)$
- **lipschitzienne,** si $\exists k \in \mathbb{R}_+ \ \forall (x, x') \in D^2 \quad |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|$

f bornée $\iff$ $|f|$ majorée

1.2 • Propriétés locales d'une fonction

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

– Si D' est une partie de D, on dit que la fonction f possède une certaine propriété **sur** D' si la restriction de f à D' possède cette propriété.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ (sa restriction à $\mathbb{R}^*_-$ est décroissante) et sur $\mathbb{R}^*_+$ (idem). Mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$!

– Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f possède une certaine propriété **au voisinage de** $\boldsymbol{a}$ s'il existe un intervalle ouvert I de centre a tel que f possède cette propriété sur $I \cap D$.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin x$ est croissante au voisinage de 0 (elle est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$).

– De même, on dit que f possède une certaine propriété **au voisinage de** $+\infty$ s'il existe un intervalle non majoré I tel que f possède cette propriété sur $I \cap D$.

Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} + \sin x$ est bornée au voisinage de $+\infty$ ($\forall x \in [1, +\infty[\quad -1 \leqslant f(x) \leqslant 2$).

– On dit que f présente un maximum local (resp. minimum local) s'il existe un intervalle ouvert I de centre a inclus dans D tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).

1.3 • Opérations sur les fonctions

On peut définir sur l'ensemble $\mathbb{R}^D$ des fonctions définies sur D :

- **Une addition** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D & \to & \mathbb{R}^D \\ (f,g) & \mapsto & f+g \end{array} \right.$ définie par :

$$\forall x \in D \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- **Une multiplication interne** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D & \to & \mathbb{R}^D \\ (f,g) & \mapsto & fg \end{array} \right.$ définie par :

$$\forall x \in D \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

On montre que $(\mathbb{R}^D, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Selon le contexte, la notation f^n peut concerner la multiplication ou la composition.
Dans beaucoup de problèmes, on notera :

$$f^2(x) = f \circ f\,(x)$$

mais $\sin^2 x = (\sin x)^2$.

- **Une multiplication externe par les réels** $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D & \to & \mathbb{R}^D \\ (\alpha, f) & \mapsto & \alpha \cdot f \end{array} \right.$

définie par :

$$\forall x \in D \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

$(\mathbb{R}^D, +, \times, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- **Une relation d'ordre**

$$f \leqslant g \iff \forall x \in D \quad f(x) \leqslant g(x)$$

Cet ordre est partiel.

On peut définir les fonctions :

$$h = \sup\,(f,g) \ : \quad \forall x \in D \quad h(x) = \max(f(x), g(x))$$

$$k = \inf\,(f,g) \ : \quad \forall x \in D \quad k(x) = \min(f(x), g(x))$$

$$f^+ = \sup\,(f, 0)$$

$$f^- = \sup\,(-f, 0)$$

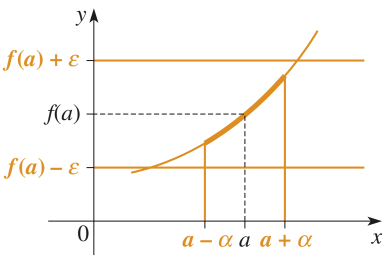
on remarque que :

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

- Si $f(D_f) \subset D_g$, on peut définir également la composée des deux fonctions f et g par :

$$\forall x \in D_f \quad g \circ f\,(x) = g\big(f(x)\big)$$



Doc. 1 Fonction continue en a.

Si $D = \{a\}$, f est nécessairement continue en a. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{-x}$, qui est définie sur $\{0\}$, est continue en 0. Ce cas, qui semble sans intérêt, est utile pour valider certains théorèmes (ex : la somme de deux fonctions continues en a est continue en a).

2 Continuité

2.1 • Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur D et $a \in D$. On dit que f est continue en a si $f(x)$ est aussi voisin que l'on veut de $f(a)$ quand x est suffisamment voisin de a (*Doc.* 1). C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Exemples :

1) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en $a = 0$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |x| \leqslant \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x}| \leqslant \varepsilon.$

2) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en $a = 1$:

comme $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |\sqrt{x} - 1| = \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} \leqslant |x - 1|,$

alors $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |x - 1| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| \leqslant \varepsilon.$

De même qu'une suite convergente est bornée, on peut énoncer :

Théorème 1
Une fonction continue en a est bornée au voisinage de a.

Démonstration
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in D \quad |x-a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.
Donc $f(x)$ est borné par $f(a) - \varepsilon$ et $f(a) + \varepsilon$ sur $[a - \alpha, a + \alpha] \cap D$, donc au voisinage de a.

2.2 • Cas des fonctions lipschitziennes

Théorème 2
Toute fonction lipschitzienne sur D est continue en tout point de D.

Démonstration
Soit f une fonction lipschitzienne de rapport k sur D.

- Si $k = 0$, f est constante donc continue.
- Si $k > 0$, soit $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$; alors, pour tout $a \in D$:

$$\forall x \in D \quad |x - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{k} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

donc f est continue en a.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point sans être lipschitzienne au voisinage de ce point. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais elle n'est lipschitzienne sur aucun intervalle contenant 0, car $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ n'est pas bornée sur $]0, \beta]$ où $\beta > 0$.

2.3 • Continuité à droite, à gauche

Soit f une fonction définie sur D et $a \in D$. f est dite continue à droite en a si la restriction de f à $[a, +\infty[\cap D$ est continue en a.
f est dite continue à gauche en a si la restriction de f à $]-\infty, a] \cap D$ est continue en a.

Exemple : La fonction partie entière est continue à droite, mais non à gauche en tout point a entier.

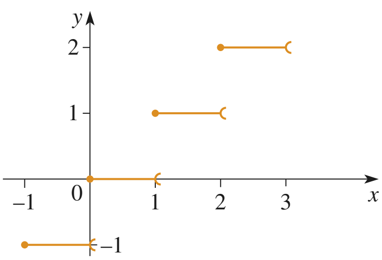
Il est clair que f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite et à gauche en 0 (à gauche : $]-\infty, 0] \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$, et toute fonction définie sur $\{0\}$ est continue en 0).

Rappelons que f est continue **sur** $[a, b]$ si sa restriction à $[a, b]$ est continue en tout point de $[a, b]$, c'est-à-dire si :

- f est continue à droite en a ;
- f est continue à gauche en b ;
- f est continue en tout point de $]a, b[$.

Pour s'entraîner : ex. 3 et 4



Doc. 2 La fonction partie entière.

La fonction partie entière est continue sur $[0, 1[$, mais elle n'est pas continue en 0 (c'est sa restriction à $[0, 1[$ qui est continue en 0) (*Doc.* 2).

3 Limites

3.1 • Limite d'une fonction en un point

Soit I un intervalle, a un point de I, et f une fonction définie sur I, sauf peut-être au point a. On dit que f admet une limite en a s'il existe une fonction $\bar{f}$ prolongeant f à I et continue en a. On pose alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \bar{f}(a)$.

La définition de la limite de f revient donc à celle de la continuité de $\bar{f}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

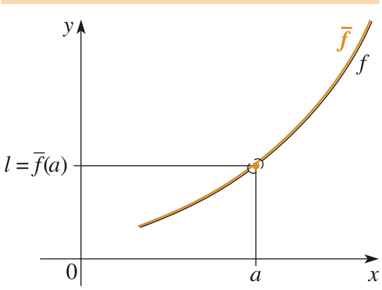
La limite de f en a est aussi notée $\lim\limits_{a} f$.

Deux cas se présentent :

- f est définie en a. Le seul prolongement de f à I est f elle-même. Dans ce cas, f admet une limite en a si et seulement si elle est continue en a, et alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f n'est pas définie en a. f admet une limite en a s'il existe un réel l tel que la fonction $\bar{f}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x \in I \setminus \{a\}, & \bar{f}(x) = f(x) \\ \text{si} \quad x = a, & \bar{f}(a) = l \end{cases}$$

est continue en a. Dans ce cas, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (*Doc.* 3).



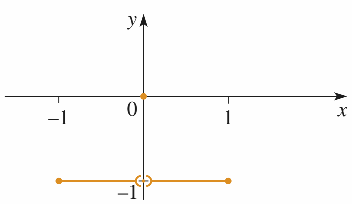
Doc. 3 Prolongement par continuité en a.

Ce réel l, s'il existe, est unique. Voir la démonstration de l'unicité de la limite d'une suite.

L'existence d'une limite à droite et d'une limite à gauche en a, mêmes égales, n'entraîne pas l'existence d'une limite en a.
Par exemple (*Doc.* 4) :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} E(-x^2) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} E(-x^2) = -1$$

mais la fonction $x \mapsto E(-x^2)$ n'a pas de limite en 0, puisqu'elle est définie et non continue en ce point.
La restriction de cette fonction à $\mathbb{R}^*$ a pour limite 0 en 0.



Doc. 4 Exemple de fonction n'admettent pas de limite en 0.

Exemple : On pose $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\forall x \in D \; f(x) = x + 1$.

La fonction $\overline{f} : x \mapsto x + 1$ prolonge f à $\mathbb{R}$ et elle est continue en 1.

D'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \overline{f}(1) = 2$. On écrit :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

3.2 • Limite à droite, limite à gauche

On dit que f admet une limite à droite en a si la restriction de f à $]a, +\infty[\cap I$ admet une limite en a.

Notations :

$$\lim_{x \to a+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a+} f$$

f admet une limite à gauche en a si la restriction de f à $]-\infty, a[\cap I$ admet une limite en a.

Notations : $$\lim_{x \to a-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{a-} f$$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{|x|}{x} = -1 \qquad \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{|x|}{x} = 1$

APPLICATION 1

Étude de la continuité d'une fonction

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Sur l'intervalle $[n, n+1[$, la fonction partie entière est constante, donc f est continue sur cet intervalle. On en déduit que :

- f est continue en tout point de $]n, n+1[$.
- f est continue à droite en n, donc

$$\lim_{x \to n+} f(x) = f(n) = n.$$

Il reste à vérifier la continuité à gauche en n. Calculons pour cela la limite à gauche de f au point n :

$$\forall x \in [n-1, n[\quad f(x) = n - 1 + \sqrt{x - n + 1},$$

d'où :

$$\lim_{x \to n-} f(x) = n - 1 + 1 = n.$$

f est donc aussi continue à gauche en $n \in \mathbb{Z}$.

En définitive, f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

3.3 • Extension de la notion de limite

On peut étendre la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = l$ aux cas où l appartient à $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ f(x) \geqslant A$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ f(x) \leqslant A$$

De même, si f est définie sur un intervalle I non majoré, on dit qu'elle admet une limite en $+\infty$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists A \in \mathbb{R} \ \forall x \in I \ x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \ \exists B \in \mathbb{R} \ \forall x \in I \ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

Le lecteur est invité à écrire de la même façon les définitions des cas :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3.4 • Cas des fonctions monotones

Comme les suites monotones, les fonctions monotones ont un comportement très simple du point de vue des limites :

Théorème 3

Soit f une fonction croissante sur l'intervalle $[a, b[$.

- Ou bien f est bornée sur $[a, b[$, et $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in [a,b[} f(x)$.
- Ou bien f n'est pas bornée sur $[a, b[$, et $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.

On montre de même qu'une fonction croissante sur $]a, b]$ admet une limite, finie ou infinie, en a. Le résultat s'étend bien sûr aux fonctions décroissantes. Autrement dit, toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite à droite et une limite à gauche, finies ou infinies, en tout point.

Démonstration

1) Si f est bornée, elle admet une borne supérieure M sur $[a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de f ; il existe donc $x_0 \in [a, b[$ tel que

$$M - \varepsilon < f(x_0) \leqslant M$$

Comme f est croissante :

$$\forall x \in [x_0, b[\quad M - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{donc} \quad |f(x) - M| \leqslant \varepsilon$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{x \to b} f(x) = M$$

2) Supposons f non bornée. Soit A un réel quelconque. A n'est pas un majorant de f, il existe donc $x_0 \in [a, b[$ tel que $f(x_0) > A$. Comme f est croissante :

$$\forall x \in [x_0, b[\quad f(x) \geqslant f(x_0) > A$$

ce qui signifie que :

$$\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$$

4 Opérations sur les limites

4.1 • Limites finies

Comme pour les suites, on démontre successivement que :

Théorème 4
La somme de deux fonctions admettant pour limite 0 en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ admet pour limite 0 en a.

L'ensemble des fonctions de limite 0 en a est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5
Le produit d'une fonction admettant pour limite 0 en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et d'une fonction bornée admet pour limite 0 en a.

Il est souvent pratique de se ramener à une limite en 0 en posant

$$x = a + h.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h).$$

Par exemple :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h\right) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1 - \sqrt{3}\sin h}{h}$$

$$= -\sqrt{3}$$

Théorème 6
1) Si f et g admettent des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f + g$ admet une limite finie en a et :

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

2) Si f et g admettent des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, fg admet une limite finie en a et :

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

3) Si f et g admettent des limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, la limite de g étant non nulle, f/g admet une limite finie en a et :

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

(Adapter les démonstrations faites pour les suites au chapitre précédent.)

Corollaire 6.1
La somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues est continu partout où il est défini.

Il s'ensuit que l'ensemble des fonctions continues sur une partie D de $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^D$, notés $C(D, \mathbb{R})$, ou $C(D)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

4.2 • Limites infinies

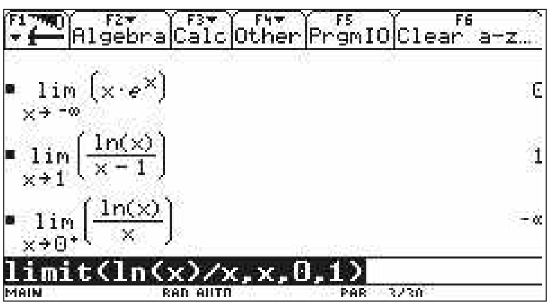
Les tableaux résumant les différents cas de limites de sommes, de produits, de quotients faisant intervenir des limites infinies, que nous avons vus à propos des suites, restent valables pour les limites de fonctions en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

4.1 • Sommes

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	l	minorée	l	majorée	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

4.2 • Produits

Pour simplifier, on n’étudiera que des fonctions **positives**.



Calcul de limites avec la TI-92/Voyage 200.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$l'>0$	minorant >0	0	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	$l\,l'$	$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$

4.3 • Quotients

On ne considère également que des fonctions **positives**.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	minorant >0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	majorée
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'>0$	0	0	minorant >0	0	l'	majorée	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	$+\infty$	$+\infty$	0	?	$+\infty$	$+\infty$	?	0

Pour s’entraîner : ex. 6

4.3 • Limites et inégalités

Toujours en parallèle avec l’étude des suites, rappelons :

Théorème 7

Soit f et g deux fonctions ***admettant une limite*** (finie ou non) en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si, au voisinage de a, $\forall x \in D\ f(x) \leqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$

On dit qu’on peut « passer à la limite » dans une inégalité. Attention : ce passage à la limite élargit l’inégalité : même si $\forall x \in D\ \ f(x) < g(x)$, la conclusion est une inégalité large.

Ce théorème est appelé « théorème des gendarmes », ou plus sérieusement « théorème d'encadrement ».

Théorème 8

Soit f, g et h trois fonctions telles qu'au voisinage de a :

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Si f et h admettent une même limite l en a, alors g admet aussi pour limite l en a.

De même, soit f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$: $f(x) \leqslant g(x)$.

Si f tend vers $+\infty$ en a, il en est de même en g ; si g tend vers $-\infty$ en a, il en est de même en f.

APPLICATION 2

Calcul d'une limite par encadrement

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$, *en justifiant son existence.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$$

Pour $x > 0$, $\quad 1 - x < x\,E\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$;

donc il existe une limite à droite :

$$\lim_{x \to 0+} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Pour $x < 0$, $\quad 1 \leqslant x\,E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$;

donc il existe une limite à gauche :

$$\lim_{x \to 0-} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

En définitive :

$$\lim_{x \to 0} x\,E\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

4.4 • Limite de la composée de deux fonctions

Théorème 9

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I (sauf peut-être en b) et J (sauf peut-être en a) tels que $g(J) \subset I$.

Si $\lim\limits_{a} g = b$ et $\lim\limits_{b} f = c$, alors $\lim\limits_{a} f \circ g = c$

Démonstration

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - b| \leqslant \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - c| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \in J \quad |t - a| \leqslant \beta \;\Rightarrow\; |g(t) - b| \leqslant \alpha$$

Or, pour tout $t \in J$, $g(t) \in I$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta > 0 \quad \forall t \in J \quad |t - a| \leqslant \beta \;\Rightarrow\; |f\left(g(t)\right) - c| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve bien que $\quad \lim\limits_{a} f \circ g = c$.

Ce théorème s'étend sans difficulté aux cas où a, b et c sont éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Corollaire 9.1
La composée de deux fonctions continues en tout point est continue en tout point.

Démonstration
C'est le cas où $\lim\limits_a g = g(a)$ et $\lim\limits_{g(a)} f = f\left(g(a)\right)$, d'où $\lim\limits_a f \circ g = f \circ g\,(a)$.

Corollaire 9.2
Si (x_n) est une suite qui converge vers l, et f une fonction continue en l, alors la suite $\left(f(x_n)\right)$ converge vers $f(l)$.

Démonstration
C'est le cas où la fonction g est définie sur $\mathbb{N}$; on prend $a = +\infty$, $b = l$ et $c = f(l)$.

Pour s'entraîner : ex. 11

5 Comparaison locale des fonctions

5.1 • Fonction dominée par une autre

Si f ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, il est équivalent de dire que le quotient $\dfrac{g}{f}$ est borné au voisinage de a.

Soit I un intervalle et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, élément ou extrémité de I. Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est dominée par la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction bornée au voisinage de a :

$$\forall x \in I \quad g(x) = f(x)h(x)$$

et

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[\quad |h(x)| \leqslant M$$

Notation : On écrit $g(x) \underset{(a)}{=} O(f(x))$ (lire « grand O de $f(x)$ au voisinage de a »).

Exemples :

$$x \sin\frac{1}{x} \underset{(0)}{=} O(x)$$

$$\frac{E(x)}{x-1} \underset{(1)}{=} O\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

5.2 • Fonction négligeable devant une autre

Si f ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, ceci revient à dire que le quotient $\dfrac{g}{f}$ admet pour limite 0 en a.

Soit I un intervalle et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, élément ou extrémité de I. Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est négligeable devant la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction tendant vers 0 au point a :

$$\forall x \in I \quad g(x) = f(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 0$$

Notation :

On écrit $g(x) \underset{(a)}{=} o(f(x))$ (lire « petit o de $f(x)$ au voisinage de a »).

Exemple : $$x^2 \sin \frac{1}{x} \underset{(0)}{=} o(x)$$

Comme pour les suites, on peut montrer que :

$$\forall(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad |\ln x|^\alpha \underset{(0)}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad (\ln x)^\alpha \underset{(+\infty)}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{(+\infty)}{=} o(e^{\gamma x})$$

5.3 • Fonctions équivalentes

Si f ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$, ceci revient à dire que le quotient $\frac{g}{f}$ admet pour limite 1 en a.

Soit I un intervalle et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, élément ou extrémité de I. Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est équivalente à la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction tendant vers 1 au point a :

$$\forall x \in I \quad g(x) = f(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

Notation :

On écrit $g(x) \underset{(a)}{\sim} f(x)$ (lire « équivaut à $f(x)$ au voisinage de a »).

Exemples à retenir :

- $\sin x \underset{(0)}{\sim} x$;
- $1 - \cos x \underset{(0)}{\sim} \frac{x^2}{2}$;
- $\ln(1+x) \underset{(0)}{\sim} x$;
- $e^x - 1 \underset{(0)}{\sim} x$;
- si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{(0)}{\sim} \alpha x$.

Pour s'entraîner : ex. 7

***Remarques** :*

***1)** Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a, elles sont de même signe au voisinage de a.*

***2)** L'équivalence est compatible avec la multiplication, mais pas avec l'addition : dans un calcul de limite on peut remplacer une fonction par une fonction équivalente dans un produit ou un quotient, mais jamais dans une somme ou une différence.*

Comme pour les suites, on peut démontrer que :

Théorème 10

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a.

$$f(x) \underset{(a)}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{(a)}{=} o(g(x))$$

Ainsi, les équivalences précédentes peuvent s'exprimer sous la forme :

- $\sin x \underset{(0)}{=} x + o(x)$;
- $\cos x \underset{(0)}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$;
- $\ln(1+x) \underset{(0)}{=} x + o(x)$;
- $e^x \underset{(0)}{=} 1 + x + o(x)$;
- $(1+x)^\alpha \underset{(0)}{=} 1 + \alpha x + o(x)$.

- En particulier : $$\frac{1}{1+x} \underset{(0)}{=} 1 - x + o(x)$$

Cette écriture s'appelle développement limité au voisinage de a. Cette notion sera étudiée plus en détail dans le chapitre 21.

APPLICATION 3

Calcul d'une limite à l'aide de développements limités

Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x$$

avec $(a, b) \in]1, +\infty[^2$.

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x = e^{x \ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}$$

Or : $$\begin{cases} a^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln a} = 1 + \dfrac{1}{x}\ln a + o\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ b^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln b} = 1 + \dfrac{1}{x}\ln b + o\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$$

D'où : $$\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} = 1 + \frac{1}{x}\left(\frac{\ln a + \ln b}{2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x}\ln\sqrt{ab} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{ab}$ tend vers 0 :

$$\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right) \sim \frac{1}{x}\ln\sqrt{ab} \quad (\text{car } \sqrt{ab} > 1)$$

Donc : $$x \ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right) \sim \ln\sqrt{ab}$$

Et : $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x = \sqrt{ab}$$

Pour s'entraîner : ex. 8

6 Fonctions continues sur un intervalle

6.1 • Théorème des valeurs intermédiaires

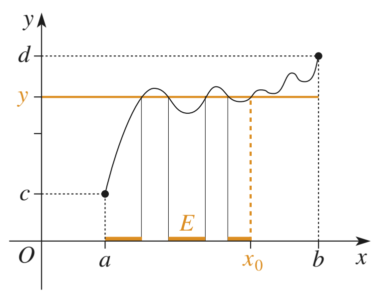
Théorème 11

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f prend sur I deux valeurs c et d, elle prend sur I toute valeur intermédiaire entre c et d.

Ce théorème n'admet pas de réciproque : il existe des fonctions discontinues qui possèdent « la propriété des valeurs intermédiaires ». Il en est ainsi, par exemple, de toute fonction dérivée, qui n'est pourtant pas nécessairement continue.

Démonstration

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $f(a) = c$ et $f(b) = d$. Supposons, pour fixer les idées, que $a < b$ et $c < d$. Soit $y \in]c, d[$; montrons que y possède un antécédent dans $[a, b]$.



Doc. 5 E admet une borne supérieure x_0 .

Posons $E = \{x \in [a, b]\ ,\ f(x) \leqslant y\}$. E est non vide, car $a \in E$; E est majoré par b, donc E admet une borne supérieure x_0 (*Doc.* 5).

Il existe une suite (a_n) d'éléments de E qui converge vers x_0. Comme f est continue en x_0, la suite $f(a_n)$ converge vers $f(x_0)$, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(a_n) \leqslant y$, on a aussi $f(x_0) \leqslant y$.

Puisque $f(b) > y$, on est sûr que $x_0 \neq b$. Or, pour tout $x \in]x_0, b[$: $f(x) > y$; on en déduit que la limite à droite de f en x_0, qui n'est autre que $f(x_0)$ puisque f est continue, est supérieure ou égale à y : $f(x_0) \geqslant y$.

En définitive : $\qquad f(x_0) = y$.

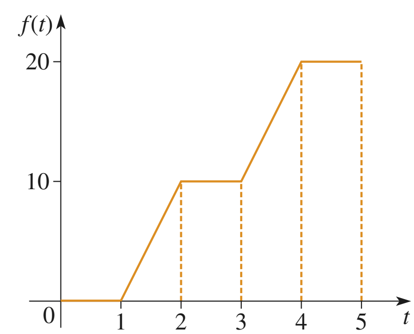
APPLICATION 4

Démonstration d'existence par le théorème des valeurs intermédiaires

Un randonneur parcourt 20 km *en* 5 h. *Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a fait exactement* 4 km.
Il prétend que, sur n'importe quel intervalle de deux heures, il a parcouru 10 km. *Est-ce possible ?*

Soit f la fonction définie sur $[0, 5]$ représentant la distance parcourue en fonction du temps.
La distance parcourue durant l'intervalle de temps $[t, t+1]$ est $g(t) = f(t+1) - f(t)$. La fonction g est continue sur $[0, 4]$. Comme $g(0) + g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = 20$, l'une au moins de ces valeurs est inférieure ou égale à 4, et l'une au moins est supérieure ou égale à 4.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $t_0 \in [0, 4]$ tel que $g(t_0) = 4$.
On ne peut pas refaire le même raisonnement avec une période de deux heures, car elle n'est pas contenue un nombre entier de fois dans l'intervalle de 5 h.

L'affirmation du randonneur est possible : il a commencé par se reposer une heure, il a marché 10 km pendant une heure, il a fait une nouvelle pause d'une heure, puis à nouveau 10 km en une heure et il est arrivé une heure en avance (*Doc.* 6)...



Doc. 6

Pour s'entraîner : ex. 12 et 13

6.2 • Image d'un intervalle par une fonction continue

Corollaire 11.1
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

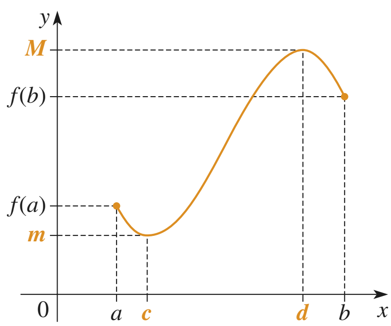
Démonstration
Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Dès que $f(I)$ contient deux éléments c et d, il contient tous les éléments intermédiaires : par définition, $f(I)$ est un intervalle.

Exemples : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f(]0, 1]) = [1, +\infty[$

$f(x) = \sin x \qquad f(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$

On voit, sur ces exemples, que le caractère ouvert, fermé, borné de l'intervalle n'est pas toujours conservé.

Cependant l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé et borné sera toujours un intervalle fermé et borné :



Doc. 7 Fonction continue sur $[a, b]$.

Si f n'est pas monotone, ses bornes sur $[a, b]$ sont en général différentes de $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème 12

Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes. L'image de $[a, b]$ est donc un segment :

$$f\big([a, b]\big) = [m, M] \quad \text{où} \quad m = \inf_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad M = \sup_{[a,b]} f$$

Démonstration

Posons $J = f([a, b])$, et $M = \sup J \in \overline{\mathbb{R}}$: M est un réel ou $+\infty$ suivant que J est majoré ou non.

Dans les deux cas, il existe une suite (y_n) d'éléments de J telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = M$ (la suite (y_n) converge vers M si $M \in \mathbb{R}$; elle tend vers $+\infty$ si $M = +\infty$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f([a, b])$, c'est-à-dire qu'il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = y_n$.

La suite (x_n) est bornée, on peut donc en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit l la limite de cette suite extraite ; comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \in [a, b]$, on a aussi $l \in [a, b]$.

f est continue en l, et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)} = f(l)$. La suite (y_n) ne tend donc pas vers $+\infty$; elle converge, et sa limite est la même que celle de la suite extraite $(y_{\varphi(n)})$:

$$M = f(l), \quad \text{d'où} \quad M \in f([a, b])$$

ce qui montre que l'intervalle J est majoré et que sa borne supérieure M est atteinte. On démontrerait de même que J est minoré et que sa borne inférieure m est atteinte.

En définitive (*Doc.* 7) :

$$J = [m, M]$$

On peut exprimer le résultat en disant qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Pour s'entraîner : ex. 14

6.3 • Fonction continue strictement monotone sur un intervalle

Théorème 13

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I.

1) $f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.

2) f est une bijection de I dans $f(I)$.

3) La bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone de même sens que f.

C'est le théorème que nous avons utilisé au chapitre 2 pour construire les fonctions circulaires réciproques et hyperboliques réciproques.

Démonstration

Supposons, pour fixer les idées, que f soit strictement croissante, et posons $I =]a, b[$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (on pourra généraliser sans problème aux autres cas d'intervalles).

1) $\forall x \in]a, b[\quad \lim\limits_a f < f(x) < \lim\limits_b f$ donc $f(I) \subset \left] \lim\limits_a f, \lim\limits_b f \right[$.

Réciproquement, soit $y \in \left] \lim\limits_a f, \lim\limits_b f \right[$. y n'étant ni un minorant ni un majorant de $f(I)$, il existe $(x_1, x_2) \in I^2 \quad f(x_1) < y < f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in I \; f(x_0) = y$, d'où $y \in f(I)$.

En définitive, $f(I) = \left] \lim\limits_a f, \lim\limits_b f \right[$.

2) Par définition, f est une surjection de I dans $f(I)$.

Montrons qu'elle est injective. Soit $(x, x') \in I^2$ tel que $f(x) = f(x')$.

- Si $x < x'$, $f(x) < f(x')$: contradiction.
- Si $x > x'$, $f(x) > f(x')$: contradiction.

Donc $x = x'$. f est bijective.

3) Soit $(y, y') \in f(I)^2 \quad y < y'$. Posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$.

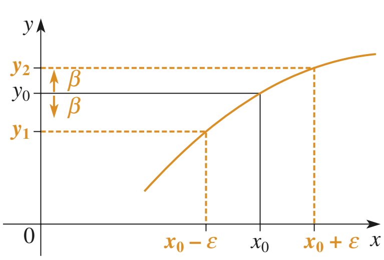
Si $x \geqslant x' \quad f(x) \geqslant f(x')$, c'est-à-dire $y \geqslant y'$: contradiction. Donc $x < x'$: f^{-1} est strictement croissante.

Montrons qu'elle est continue. Choisissons encore $I =]a, b[$. Soit $y_0 \in f(I)$. Posons $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 - \varepsilon \in I$ et $x_0 + \varepsilon \in I$. Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. f étant strictement croissante : $y_1 < y_0 < y_2$.

$\forall y \in [y_1, y_2] \quad f^{-1}(y_1) \leqslant f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_2)$, c'est-à-dire

$$x_0 - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon$$

Il existe donc $\beta > 0$ tel que $\quad |y - y_0| \leqslant \beta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon$.
Par conséquent, f^{-1} est continue en y_0 (*Doc.* 8).



Doc. 8 Fonction continue strictement croissante.

Exemples :

I	f	$f(I)$	f^{-1}
$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}_+$	$y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto a^x$ $(a > 0$ et $a \neq 1)$	$\mathbb{R}_+^*$	$y \mapsto \log_a y$ $(a > 0$ et $a \neq 1)$
$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$x \mapsto \sin x$	$[-1, 1]$	$y \mapsto \operatorname{Arcsin} y$
$[0, \pi]$	$x \mapsto \cos x$	$[-1, 1]$	$y \mapsto \operatorname{Arccos} y$
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R}$	$y \mapsto \operatorname{Arctan} y$

Représentation graphique de f^{-1} (*Doc.* 9)

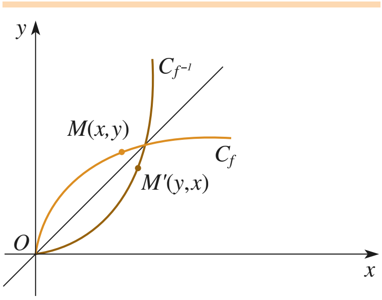
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ celle de f^{-1}.

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Donc :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$$

$\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie par rapport à la droite d'équation $(y = x)$ parallèlement à la droite d'équation $(y = -x)$.



Doc. 9 Graphes de f et de f^{-1}.

APPLICATION 5

Exemple de fonction continue strictement monotone sur un intervalle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on précisera. Déterminer sa bijection réciproque.

f est continue sur $\mathbb{R}$, car composée de fonctions continues.

On remarque qu'elle est impaire ; il suffit donc d'étudier son sens de variation sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_2}{1+x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}$$

Donc, $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$:

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est impaire, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

D'après le théorème 13, f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f[$, c'est-à-dire $]-1, 1[$.

Soit $y \in]-1, 1[$; résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x}{1+|x|} = y \implies x \text{ et } y \text{ de même signe}$$

- si $y \geqslant 0$, $\dfrac{x}{1+x} = y \iff x = \dfrac{y}{1-y}$
- si $y \leqslant 0$, $\dfrac{x}{1-x} = y \iff x = \dfrac{y}{1+y}$

En définitive :

$$\forall y \in]-1, 1[\quad f(x) = y \iff x = \frac{y}{1-|y|}$$

f^{-1} est donc l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{y}{1-|y|} \end{array} \right.$$

7 Continuité uniforme

7.1 • Fonction uniformément continue

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.

f est continue en tout point de D si :

$$\underline{\forall x \in D} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\underline{\exists \alpha > 0}} \quad \underline{\forall y \in D} \quad |x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

α peut dépendre de ε et de x.

On dit que f est uniformément continue sur D s'il existe α ne dépendant que de ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\underline{\exists \alpha > 0}} \quad \underline{\forall (x, y) \in D^2} \quad |x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Il est clair que si f est uniformément continue sur D, elle est continue en tout point de D.
La réciproque est fausse : montrons, par exemple, que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $\varepsilon = 1$, quel que soit $\alpha > 0$, on peut trouver deux réels x et y tels que $|x - y| \leqslant \alpha$ et $|x^2 - y^2| > 1$ (par exemple : $x = \dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{4}$, $y = \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{4}$).

7.2 • Cas des fonctions lipschitziennes

Théorème 14
Toute fonction lipschitzienne sur D est uniformément continue sur D.

Démonstration
$\forall (x, y) \in D^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

- Si $k = 0$, f est constante donc uniformément continue.
- Si $k > 0$, il suffit que $|x - y| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{k}$ pour que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

7.3 • Continuité uniforme sur un segment

Théorème 15 (Théorème de Heine)
Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Démonstration
Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Supposons que f ne soit pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists (x, y) \in [a, b]^2 \quad |x - y| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

En particulier, pour $\alpha = \dfrac{1}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2 \quad |x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

La suite (x_n) est bornée, on peut donc en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$. Soit l sa limite.
Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$, la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge aussi vers l.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, donc $a \leqslant l \leqslant b$: l appartient à $[a, b]$.
f étant continue, les suites $(f(x_{\varphi(n)}))$ et $(f(y_{\varphi(n)}))$ convergent vers $f(l)$ et, par conséquent, $(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}))$ converge vers 0, ce qui contredit l'inégalité :

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$$

Donc f est uniformément continue sur $[a, b]$.

APPLICATION 6

Continuité uniforme de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$

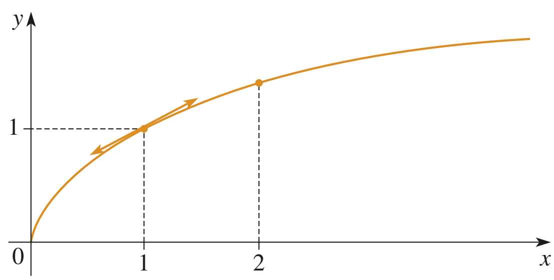
Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
f est continue sur le segment $[0, 2]$, donc uniformément continue sur ce segment (*Doc.* 11).
Par ailleurs, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après le théorème des accroissements finis (vu en Terminale, et que nous reverrons dans le *chapitre* 18) :

$$\forall (a, b) \in [1, +\infty[^2 \quad |f(a) - f(b)| \leqslant \frac{1}{2}|a - b|$$

f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$, elle est donc uniformément continue sur cet intervalle.



Doc. 11.

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que :

$$\forall (x,y) \in [0,2]^2 \quad |x-y| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall (x,y) \in [1,+\infty[^2 \quad |x-y| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Il suffit de choisir $|x-y| \leqslant 1$ pour être sûr que x et y sont dans le même intervalle $[0,2]$ ou $[1,+\infty[$.

Donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \; |x-y| \leqslant \min(1,\alpha_1,\alpha_2) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque *: On pouvait démontrer directement la continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}_+$, en démontrant d'abord que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

Pour s'entraîner : ex. 15 à 17

8 Fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes

8.1 • Continuité et limites

L'étude des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (fonctions de la variable complexe) est beaucoup plus difficile et n'est pas au programme.

On peut étendre aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ toutes les propriétés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

On peut se représenter une telle fonction comme un « mouvement » dans le plan complexe, c'est-à-dire une courbe paramétrée dans ce plan.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ est dite continue en un point t_0 de D si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall t \in D \quad |t-t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t)-f(t_0)| \leqslant \varepsilon$$

La fonction f est dite uniformément continue sur D si :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha > 0 \; \forall (t,t') \in D^2 \qquad |t-t'| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t)-f(t')| \leqslant \varepsilon$$

On dit que f est bornée si $|f|$ est majorée.

Les résultats suivants restent valables :

- Toute fonction continue en t_0 est bornée au voisinage de t_0.
- La somme de deux fonctions continues est continue.
- Le produit de deux fonctions continues est continu.
- Le quotient de deux fonctions continues est continu en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.

On peut étendre aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ les notions de :

- Continuité à droite, à gauche.
- Limite, limite à droite, limite à gauche.
- Limite en $\pm\infty$.
- Fonction dominée, négligeable, équivalente.

8.2 • Partie réelle et partie imaginaire d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Théorème 16
Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est continue si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont continues.

Démonstration
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in D$, posons $f(t) = x(t) + i\,y(t)$ avec $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1) Si les fonctions réelles x et y sont continues, la somme $x + iy$ est continue.

2) Si la fonction complexe f est continue :

$\forall t_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall t \in D$

$$\longrightarrow \; |(x(t) - x(t_0)) + i(y(t) - y(t_0))| \leqslant \varepsilon$$

Or $|x(t) - x(t_0)| \leqslant |(x(t) - x(t_0)) + i(y(t) - y(t_0))|$, donc x est continue.
et $|y(t) - y(t_0)| \leqslant |(x(t) - x(t_0)) + i(y(t) - y(t_0))|$, donc y est continue.

On en déduit que si f est continue, $\overline{f}$ et $|f|$ sont continues.

De même, une fonction complexe f possède une limite en un point t_0 si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire possèdent des limites en t_0 et :

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} \mathrm{Re}\,(f(t)) = \mathrm{Re}\,(l) \\ \lim\limits_{t \to t_0} \mathrm{Im}\,(f(t)) = \mathrm{Im}\,(l) \end{cases}$$

Pour s'entraîner : ex. 18 et 19

MÉTHODE

Pour montrer qu'une fonction f est continue en un point a, on peut :

- utiliser directement la définition *(cf. Application* 1*)*;
- majorer $|f(x) - f(a)|$ en fonction de $|x - a|$ *(cf. exercices* 3 *et* 4*)*;
- appliquer les opérations sur les fonctions continues *(cf. exercices* 1, 2 *et* 4*)*.

Pour montrer qu'une fonction f est discontinue en un point a, on peut :

- trouver une limite à droite et une limite à gauche différentes ;
- montrer que f n'a pas de limite finie en a ;
- prouver que f n'est pas bornée au voisinage de a ;
- trouver un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$ tel que $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$ *(cf. Application* 1*)*;
- trouver une suite (u_n) qui converge vers a, alors que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

Pour calculer une limite, on peut :

- essayer d'utiliser les opérations sur les limites ;
- en cas d'indétermination, transformer l'expression de la fonction afin de « lever l'indétermination » *(cf. exercice* 6*)*;
- encadrer la fonction par deux fonctions de même limite *(cf. Application* 2*)*;
- utiliser des équivalents *(cf. Application* 3 *et exercice* 8*)*.

Pour montrer l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, où f est une fonction continue sur un intervalle I :

- on cherche deux éléments a et b de I tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires et on applique le théorème des valeurs intermédiaires *(cf. Application* 4 *et exercices* 12 *et* 13*)*;
- si, de plus, f est strictement monotone, c'est une bijection de I dans $f(I)$; on obtient l'existence et l'unicité de la solution.

Pour montrer qu'une fonction f est uniformément continue sur un intervalle I, on peut :

- majorer $|f(x) - f(y)|$ en fonction seulement de $|x - y|$ *(cf. exercice* 17*)*;
- montrer que f est lipschitzienne sur I (par exemple, grâce au théorème des accroissements finis) ;
- vérifier que I est un segment et appliquer le théorème de Heine ;
- découper I en une réunion finie d'intervalles sur chacun desquels f est uniformément continue *(cf. Application* 6 *et exercice* 16*)*.

Pour étudier la continuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on peut étudier la continuité de la partie réelle et de la partie imaginaire de cette fonction *(cf. exercices* 18, 19*)*.

Exercice résolu

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^{E(x)}}{E(x)^x}$$

1 ***a)*** *Montrer que f est continue à droite en tout point de I.*

b) *Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la limite à gauche de f en p.*

f est-elle continue à gauche en tout point de I ?

2 *Calculer les limites des suites $\big(f(u_n)\big)$ pour :*

$$\textbf{a) } u_n = n \quad ; \quad \textbf{b) } u_n = n + \frac{1}{2} \quad ; \quad \textbf{c) } u_n = n + \frac{1}{\ln(n)}$$

3 *La fonction f admet-elle une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?*

4 *Démontrer que pour tout $a \in [0, 1]$, il existe une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers a.*

Conseils

Pour tout entier p :
$\lim\limits_{\substack{x \to p \\ <}} E(x) = p - 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ >}} E(x) = p$.

Solution

1) a) La fonction partie entière est continue à droite en tout point, donc f est continue à droite sur I, comme composée de fonctions continues à droite.

b) La limite à gauche de $E(x)$ en p est $p - 1$, d'où :

$$\lim_{\substack{x \to p \\ <}} f(x) = \frac{p^{p-1}}{(p-1)^p}$$

La fonction f est continue à gauche en p si et seulement si cette limite est égale à $f(p)$, c'est-à-dire à 1. Or, si $p \geqslant 2$, les entiers p^{p-1} et $(p-1)^p$ sont de parités différentes, et par conséquent l'égalité $\dfrac{p^{p-1}}{(p-1)^p} = 1$ est impossible. Conclusion : f n'est jamais continue à gauche en un point entier.

2) a) Pour tout n entier : $f(n) = 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 1$.

b) $E\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = n$, donc :

$$f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(n + \frac{1}{2})^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= e^{n \ln(n+\frac{1}{2}) - (n+\frac{1}{2}) \ln n}$$

$$= e^{n \ln n + n \ln(1+\frac{1}{2n}) - (n+\frac{1}{2}) \ln n}$$

$$= e^{n \ln(1+\frac{1}{2n}) - \frac{1}{2} \ln n}$$

Or : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\sim\dfrac{1}{2}$, qui est négligeable devant $-\dfrac{1}{2}\ln n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)-\dfrac{1}{2}\ln n=-\infty$, et :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(n+\frac{1}{2}\right)=0$$

c) De même, pour tout $n\geqslant 3$, $\dfrac{1}{\ln n}<1$, donc $E\left(n+\dfrac{1}{\ln n}\right)=n$.

$$f\left(n+\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{\left(n+\frac{1}{\ln n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{\ln n}}}=\mathrm{e}^{n\ln\left(n+\frac{1}{\ln n}\right)-\left(n+\frac{1}{\ln n}\right)\ln n}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)-1}$$

Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{n\ln n}\right)\sim\dfrac{1}{n\ln n}$, donc $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n\ln n}\right)\sim\dfrac{1}{\ln n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. L'exposant tend donc vers -1 et :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(n+\frac{1}{\ln n}\right)=\mathrm{e}^{-1}$$

Les résultats précédents sont-ils compatibles avec l'existence d'une limite – finie ou infinie – de f en $+\infty$?

3) Si la fonction f admettait une limite ℓ (dans $\overline{\mathbb{R}}$) en $+\infty$, les suites $\big(f(n)\big)$, $\big(f(n+\frac{1}{2})\big)$ et $\big(f(n+\frac{1}{\ln n})\big)$ tendraient toutes vers ℓ. Comme ces suites convergent vers des limites différentes, la fonction f n'admet aucune limite en $+\infty$.

Modifier légèrement l'exemple **c)**.

4) On peut s'inspirer de la troisième limite trouvée, en changeant $\dfrac{1}{\ln n}$ en $\dfrac{k}{\ln n}$, où $k\in\mathbb{R}_+$; on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(n+\frac{k}{\ln n}\right)=\mathrm{e}^{-k}$$

Or e^{-k} peut prendre n'importe quelle valeur dans $]0,1]$ lorsque k décrit $\mathbb{R}_+$. Comme on a déjà trouvé en **b)** une suite tendant vers 0, on peut donc obtenir n'importe quelle limite dans $[0,1]$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) La somme de deux fonctions monotones est monotone.

b) La composée de deux fonctions monotones est monotone.

c) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.

d) Toute fonction périodique monotone est constante.

e) Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.

f) Toute fonction monotone sur $\mathbb{R}$ admet une limite à gauche et une limite à droite (finie ou infinie) en tout point.

g) Toute fonction admettant en un point une limite à gauche et une limite à droite égales est continue en ce point.

h) Pour toute fonction, il existe au moins un intervalle ouvert non vide sur lequel elle est monotone.

i) Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a, leur différence tend vers 0 en a.

j) Deux fonctions dont la différence tend vers 0 en a sont équivalentes au voisinage de a.

k) S'il existe une suite (x_n) convergeant vers a telle que $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$, alors f est continue en a.

l) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.

m) Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.

n) La fonction partie entière est continue sur $[0, 1[$.

o) $e^x \sim 1 - x$ au voisinage de 0.

p) $\sqrt{1+2x} = 1 + x + o(x)$ au voisinage de 0.

2

Montrer que toute fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport à 0 est, de façon unique, la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Continuité

3

Étudier la continuité des fonctions définies par :

1) $f(x) = x - E(x) - (x - E(x))^2$;

2) $f(x) = (-1)^{E(x)}\left(x - E(x) - \dfrac{1}{2}\right)$;

3) $\begin{cases} \text{si } x \neq 0 & f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ \text{si } x = 0 & f(x) = 0 \,; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \text{si } x \in \mathbb{Q} & f(x) = x \\ \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} & f(x) = 0. \end{cases}$

4

Pour a et b réels, écrire $\max(a, b)$ et $\min(a, b)$ à l'aide de sommes, de différences et de valeurs absolues. En déduire que, si f et g sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ le sont aussi. Appliquer ce résultat aux fonctions :

$$f_+ \begin{cases} f_+(x) = f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ f_+(x) = 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

et

$$f_- \begin{cases} f_-(x) = 0 & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ f_-(x) = -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

5

Trouver une application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ bijective et discontinue en tout point.

Limites – Équivalents

6

Déterminer les limites suivantes, si elles existent :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x$; **d)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$; **f)** $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x$; **h)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} |\ln x|^x$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

7

Trouver un équivalent simple de f au voisinage de 0 :

a) $f(x) = \cos(\sin x)$; **b)** $f(x) = \ln(\cos x)$;

c) $f(x) = \ln(\sin x)$; **d)** $f(x) = \cos(ax) - \cos(bx)$;

e) $f(x) = a^x - b^x \quad (a > 0,\ b > 0)$;

f) $f(x) = \tan \dfrac{\pi}{2x+1}$; **g)** $\sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x^2}$;

h) $\sqrt[4]{16+x} - \sqrt[3]{8+x}$; **i)** $\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

8

Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

a) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x$; **b)** $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$; **d)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x \,\ln(1+\ln(1+x))$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^{\cos x-1}-1)$;

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{x^x-1}$;

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

9 Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left([(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]^{1/n}-x\right)$$

10 Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$.

Fonctions continues

11 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, et telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(2x)=f(x)$$

Montrer que f est constante.

12 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles et p et q deux réels positifs. Montrer que :

$$\exists c\in[a,b]\quad pf(a)+qf(b)=(p+q)f(c)$$

13 Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \exists x\in[0,1]\quad f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x)$$

14 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ admettant une limite finie en $+\infty$. Démontrer que f est bornée et qu'elle atteint au moins l'une de ses bornes :

1) par une démonstration directe ;

2) en posant $F=f\circ\varphi$, où φ est l'application :

$$\left|\begin{array}{ccc}[0,1[& \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}_+\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x}\end{array}\right.$$

et en prolongeant F par continuité en 1.

Continuité uniforme

15 Soit f une fonction uniformément continue sur D et (x_n), (y_n) deux suites d'éléments de D. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$$

La fonction $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sin(x^2)\end{array}\right.$ est-elle uniformément continue ?

16 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que f soit uniformément continue sur $]-\infty,a]$ et sur $[b,+\infty[$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

17 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Fonctions à valeurs complexes

18 Calculer $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{r^t\mathrm{e}^{i\alpha t}-1}{t}$ $(r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha\in\mathbb{R})$.

19 Montrer que si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, la fonction $t\mapsto|f(t)|$ est continue. Réciproque ?

18 Dérivation des fonctions d'une variable réelle

INTRODUCTION

La notion de dérivée permet d'étudier finement les propriétés locales (approximation affine, tangente) et globales (sens de variation, convexité) d'une fonction. L'invention du calcul différentiel fit l'objet au XVII*e siècle d'une âpre controverse entre l'anglais Newton et l'allemand Leibniz. Il s'agit en fait de découvertes simultanées, à partir de méthodes différentes, qui viennent couronner les travaux de très nombreux autres mathématiciens de l'époque : Descartes, Cavalieri, Fermat, Pascal, Toricelli, Roberval, Huygens, etc.*

OBJECTIFS

- Définir rigoureusement la notion de dérivée.
- Réviser et élargir les calculs de dérivées étudiés en Première et Terminale.
- Étudier les propriétés des fonctions dérivables.
- Découvrir la convexité des fonctions et l'utiliser pour démontrer des inégalités.
- Étendre la notion de dérivée aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1 Fonction dérivable

1.1 • Dérivabilité en un point

Pour que cette limite existe, il est nécessaire que $f(x) - f(x_0)$ tende vers 0 quand x tend vers x_0 : **toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0**.
La réciproque est fausse : les fonctions $(x \mapsto |x|)$ ou $(x \mapsto \sqrt{x})$, par exemple, sont continues, mais non dérivables en 0.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I contenant au moins deux points, et x_0 un élément de I. La fonction f est dite dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée dérivée de f en x_0, et notée $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il est souvent pratique de se ramener à une limite en 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

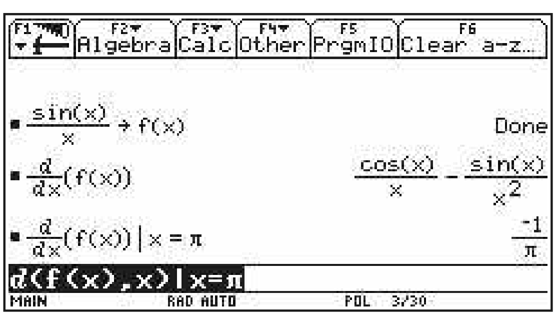
La fonction f est dite dérivable à droite (respectivement à gauche) en x_0 si la restriction de f à $I \cap [x_0, +\infty[$ (respectivement $I \cap]-\infty, x_0]$) est dérivable en x_0.

D'après cette définition, f est dérivable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b. Par exemple, la fonction $(x \mapsto |x|)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0 (c'est sa restriction à $\mathbb{R}_+$ qui est dérivable en 0...).

La fonction f est dite dérivable sur une partie A de I si sa restriction à A est dérivable en tout point de A. On peut alors définir la fonction dérivée de f :

$$\left| \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f'} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

Notations : La fonction dérivée de f peut être notée f' ou Df ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Cette dernière notation, qui rappelle que la dérivée est la limite du taux d'accroissement $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ quand Δx tend vers 0, est très pratique dans les applications de la dérivation (Physique, Chimie, Mécanique, etc.). Nous l'utiliserons en géométrie différentielle (étude des courbes paramétrées). La signification du symbole $\mathrm{d}f$, pris isolément, sera vue plus tard (c'est une application linéaire appelée différentielle).



La TI-92/Voyage 200 calcule des fonctions dérivées, dont on peut demander la valeur en un point. Pour vérifier la dérivabilité en certains points particuliers, il faut revenir à la définition sous forme de limite.

1.2 • Développement limité d'ordre 1

La dérivabilité de f en x_0 équivaut à :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1)$$

c'est-à-dire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)$$

Réciproquement, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

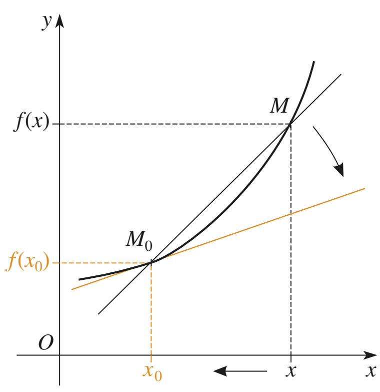
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a\,h + o(h),$$

on dit que f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 ; alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$. La dérivée de f en x_0 est le coefficient de h dans ce développement.

Exemples (les dérivées des fonctions usuelles étant supposées connues) :

- $e^h = 1 + h + o(h)$ (au voisinage de $h = 0$).
- $\ln(1 + h) = h + o(h)$ (au voisinage de $h = 0$).
- $(1 + h)^\alpha = 1 + \alpha h + o(h)$ (au voisinage de $h = 0$).

En particulier, $\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + o(h)$ (au voisinage de $h = 0$).



Doc. 1 Limite du taux d'accroissement.

1.3 • Interprétation graphique

Le quotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ représente le taux d'accroissement de la fonction f entre x_0 et x. C'est la pente de la sécante joignant les points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ de la courbe représentative de f.

Si f est dérivable, cette sécante a une position limite, que l'on appelle tangente à la courbe en M_0. La dérivée $f'(x_0)$ représente la pente de cette tangente (*Doc.* 1).

Une équation de cette tangente est donc :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

1.4 • Interprétation cinématique

Si $f(t)$ représente la position à l'instant t d'un mobile sur un axe, le quotient $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ représente la vitesse moyenne du mobile sur l'intervalle de temps $[t_0, t]$. La dérivée $f'(t_0)$, si elle existe, représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

2 Opérations sur les dérivées

2.1 • Dérivée d'une somme

Soit f et g deux fonctions dérivables en x_0. Écrivons les développements limités de ces deux fonctions en x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h) \quad \text{et} \quad g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + o(h)$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$(f + g)(x_0 + h) = (f + g)(x_0) + h(f'(x_0) + g'(x_0)) + o(h)$$

La fonction $f + g$ est donc dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Si f et g sont dérivables sur l'intervalle I, $f + g$ est dérivable sur I et :

$$(f + g)' = f' + g'$$

2.2 • Dérivée d'un produit

De même, en multipliant membre à membre les développements limités de f et g en x_0, on obtient :

$$(fg)(x_0+h) = (fg)(x_0) + h\left(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\right) + h^2 f'(x_0)g'(x_0) + o(h)\left(f(x_0) + g(x_0) + hf'(x_0) + hg'(x_0) + o(h)\right)$$

Tous les termes de la seconde ligne sont négligeables devant h. D'où :

$$(fg)(x_0+h) = (fg)(x_0) + h\left(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\right) + o(h)$$

La fonction fg est donc dérivable en x_0 et :

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Si f et g sont dérivables sur l'intervalle I, fg est dérivable sur I et :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

2.3 • Dérivée d'un quotient

On suppose, de plus, que $g(x_0) \neq 0$. Comme g est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall h \in]-\alpha, \alpha[\quad g(x_0+h) \neq 0$$

$$\frac{1}{g(x_0+h)} = \frac{1}{g(x_0) + hg'(x_0) + o(h)} = \frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{1 + h\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)} + o(h)}$$

$$= \frac{1}{g(x_0)}\left(1 - h\frac{g'(x_0)}{g(x_0)} + o(h)\right) = \frac{1}{g(x_0)} - h\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} + o(h).$$

La fonction $\dfrac{1}{g}$ est donc dérivable en x_0 et : $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Si g est dérivable sur l'intervalle I et qu'elle ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

En multipliant par f, on obtient : $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = f\left(\dfrac{1}{g}\right)' + f'\dfrac{1}{g} = -\dfrac{fg'}{g^2} + \dfrac{f'}{g}$, soit :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

2.4 • Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable en x_0, et f une fonction dérivable en $u(x_0)$. Écrivons les développements limités de u et f, respectivement en x_0 et $u(x_0)$:

$$u(x_0+h) = u(x_0) + h\,u'(x_0) + o(h)$$
$$f(u(x_0)+k) = f(u(x_0)) + k\,f'(u(x_0)) + o(k)$$

Posons $k = h\,u'(x_0) + o(h)$. Toute fonction négligeable devant k est négligeable devant h. On peut donc écrire :

$$f(u(x_0+h)) = f(u(x_0)) + [h\,u'(x_0) + o(h)]\,f'(u(x_0)) + o(h)$$

c'est-à-dire :

$$f\circ u(x_0+h) = f\circ u(x_0) + h\,u'(x_0)\,f'(u(x_0)) + o(h)$$

La fonction $f\circ u$ est donc dérivable en x_0 et :

$$(f\circ u)'(x_0) = u'(x_0)\,f'(u(x_0))$$

Si u est dérivable sur un intervalle I et f dérivable sur l'intervalle $u(I)$, la fonction $f\circ u$ est dérivable sur I et :

$$(f\circ u)' = u'\cdot f'\circ u$$

Avec la notation de Leibniz, cette formule devient « transparente », à condition de noter $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$ la dérivée de la fonction f (c'est-à-dire $u\mapsto f(u)$) et $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ celle de la fonction $F = f\circ u$ (c'est-à-dire $x\mapsto f(u(x))$) :

$$\begin{tikzcd} & u(x) \arrow[dr, "f"] & \\ x \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "F"'] & & f(u(x)) \end{tikzcd}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

Exemples importants :

Si u est une fonction dérivable :

- $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$ (si u ne s'annule pas) ;
- $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$;
- $(u^\alpha)' = \alpha u'\,u^{\alpha-1}$ (si $u > 0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$).

2.5 • Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une bijection continue et strictement monotone de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$. On sait que la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J. Supposons, de plus, que f est dérivable sur I. Qu'en est-il de f^{-1} ?

Soit y_0 et y deux éléments distincts de J. Posons $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et $x = f^{-1}(y)$. Comme f^{-1} est injective, $x \neq x_0$.

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Lorsque y tend vers y_0, du fait de la continuité de f^{-1}, x tend vers x_0. Si $f'(x_0)\neq 0$, le quotient ci-dessus tend vers $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

La fonction f^{-1} est alors dérivable en y_0 et :

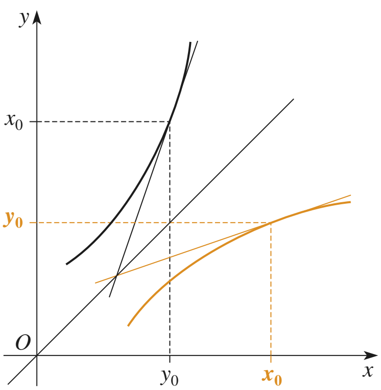
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si f' ne s'annule pas sur I, f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Interprétation graphique :

Dans un repère orthonormé, les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ et $\mathcal{C}_f$ respectivement aux points (y_0, x_0) et (x_0, y_0) sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Leurs pentes sont donc inverses l'une de l'autre (*Doc.* 2).

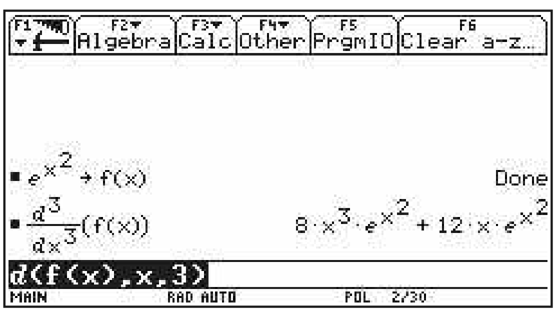


Doc. 2 Dérivée d'une fonction réciproque.

Exemple : La dérivation d'une fonction réciproque a été largement exploitée dans le chapitre *Fonctions usuelles*. Rappelons simplement ici le calcul de la dérivée de la fonction exponentielle népérienne. Le logarithme népérien est, par définition, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est une fonction continue strictement croissante, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$; la bijection réciproque $x \mapsto e^x$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(e^x)} = e^x$$

Pour s'entraîner : ex. 6



La dérivée n-ième d'une fonction f se note `d(f(x),x,n)`.

3 Dérivées successives

3.1 • Définitions

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Sa dérivée f' peut être elle-même dérivable. On appelle alors dérivée seconde la dérivée de f', notée f''. Cette fonction peut être elle-même dérivable, etc. Si f est n fois dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée d'ordre n (ou dérivée n-ième).

On dit que f est de classe C^n sur I si elle admet une dérivée d'ordre n **continue** sur I. On dit que f est de classe C^∞ si elle admet des dérivées successives de tout ordre (qui sont nécessairement continues puisque dérivables).

Leibniz, 1616-1716, philosophe et mathématicien allemand.

3.2 • Dérivée n-ième d'un produit

Théorème 1 (formule de Leibniz)

Si f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur un intervalle I, la fonction fg est n fois dérivable sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration

Raisonnons par récurrence. La propriété est vérifiée pour $n = 0$ (par convention, $f^{(0)} = f$). Soit n un entier naturel pour lequel la propriété est satisfaite. Soit f et g deux fonctions $(n+1)$ fois dérivables sur I. $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable et :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

La propriété est vérifiée pour l'entier $n+1$.

Par récurrence, elle est donc établie pour tout naturel n.

On remarquera l'analogie avec la démonstration de la formule du binôme.

Conséquences : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I, noté $C^n(I)$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau commutatif.

De même, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I, noté $C^\infty(I)$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau commutatif.

APPLICATION 1

Un calcul de dérivée *n*-ième

Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^n(1+x)^n$. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme. Appliquons la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} (1+x)^k \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^{n-k} (1+x)^k
\end{aligned}$$

Or, le monôme dominant du polynôme $f(x)$ est x^{2n}, donc celui de $f^{(n)}(x)$ est $\dfrac{(2n)!}{n!} x^n$.

En identifiant le coefficient dominant de $f^{(n)}(x)$ dans les deux expressions trouvées, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n}$$

Pour s'entraîner : ex. 7

4 Propriétés des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

4.1 • Extremum local

L'adjectif *local* signifie que la valeur $f(x_0)$ est extrémale sur un voisinage *à droite* et *à gauche* de x_0. Le minimum de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 n'est pas *local*, car cette fonction n'est pas définie à gauche de 0.

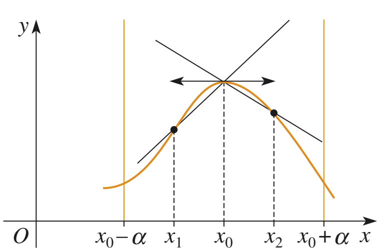
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie D et x_0 un élément de D. On dit que f présente un maximum local en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset D \quad \text{et} \quad \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

On définit de même un minimum local.

Théorème 2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie D. Si f présente un extremum **local** en $x_0 \in D$, et si elle est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.



Doc. 3 Dérivée en un extremum local.

Démonstration

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un maximum local (*Doc.* 3).

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

$$\forall x_1 \in]x_0 - \alpha, x_0[\quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geqslant 0, \text{ d'où } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \text{ soit } f'(x_0) \geqslant 0$$

$$\forall x_2 \in]x_0, x_0 + \alpha[\quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leqslant 0, \text{ d'où } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \text{ soit } f'(x_0) \leqslant 0$$

D'où, en définitive, $f'(x_0) = 0$.

Graphiquement, la courbe représentative de f admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

***Remarques** :*

1) Ce théorème ne concerne évidemment que les fonctions dérivables. Une fonction peut présenter un extremum local en un point sans être dérivable en ce point : par exemple, $x \mapsto |x|$ en 0.

2) Ce théorème ne concerne que les extrema locaux. Une fonction dérivable peut présenter un extremum en un point sans que sa dérivée ne s'annule en ce point : par exemple, l'application identique du segment $[0, 1]$ présente un maximum en 1, bien que sa dérivée en ce point soit égale à 1.

3) Ce théorème n'admet pas de réciproque : une fonction dérivable dont la dérivée s'annule en un point ne présente pas nécessairement d'extremum local en ce point : par exemple, $x \mapsto x^3$ en 0.

APPLICATION 2

Pour quelques frites de plus...

Dans un disque de papier de rayon R, on découpe un secteur angulaire d'angle x radians ($x \in [0, 2\pi]$), avec lequel on confectionne un cornet de frites conique. Déterminer x pour que le volume du cornet soit maximal.

Le rayon r de la section du cône est tel que :

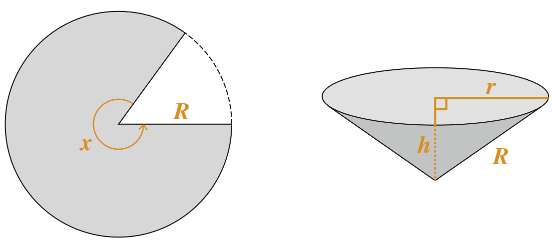
$$2\pi r = Rx\,; \quad \text{d'où} \quad r = \frac{Rx}{2\pi}$$

La hauteur h du cône est telle que (*Doc.* 4) :

$$h^2 + r^2 = R^2\,; \quad \text{d'où} \quad h = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Le volume du cône est donc :

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$



Doc. 4

La fonction V est continue sur $[0, 2\pi]$.

Elle admet donc sur ce segment un maximum, qui est strictement positif (car $V(\pi) > 0$).

La fonction V est dérivable sur $[0, 2\pi[$, et :

$$V'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2\frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$$

C'est-à-dire :

$$V'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}\,\frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$.

Comme $V(0) = V(2\pi) = 0$, le maximum de la fonction V sur $[0, 2\pi]$ ne peut être atteint qu'en $x = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$. La valeur de ce maximum est :

$$V\left(\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}R^3}{27}.$$

4.2 • Théorème de Rolle

Théorème 3 (théorème de Rolle)

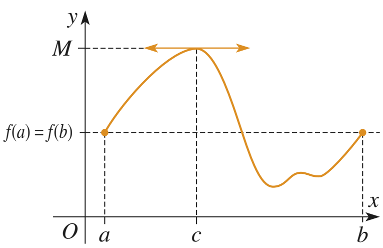
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$).
Si $f(a) = f(b)$, la dérivée de f s'annule sur $]a, b[$.

$$\exists c \in\,]a, b[\quad f'(c) = 0$$

Démonstration

f étant continue, l'image du segment $[a, b]$ est un segment $[m, M]$. Les bornes m et M sont atteintes. Montrons que l'une au moins d'entre elles est un extremum local.

- Si $m = M$, f est constante et f' est nulle sur $]a, b[$.
- Si $m < M$, l'une au moins de ces deux bornes est différente de $f(a)$ (et donc de $f(b)$). Elle est, par conséquent, atteinte en un point $c \in\,]a, b[$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $]c-\alpha, c+\alpha[\subset]a, b[$: f présente un extremum local en c. D'après le théorème précédent, $f'(c) = 0$.



Doc. 5 Théorème de Rolle.

Graphiquement, le théorème de Rolle signifie que la courbe représentative d'une fonction dérivable, qui passe par deux points de même ordonnée, possède au moins une tangente horizontale entre ces deux points (*Doc.* 5). Du point de vue cinématique, un mobile sur un axe qui repasse deux fois au même point voit nécessairement sa vitesse s'annuler entre ces deux points.

APPLICATION 3

Une propriété des polynômes réels

Soit P un polynôme de degré n $(n \geqslant 2)$ à coefficients réels. Montrer que, si P est scindé, son polynôme dérivé P' est aussi scindé.

Posons $P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i}$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et les a_i sont les racines réelles distinctes de P, que l'on peut ranger dans l'ordre croissant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$. L'entier m_i est l'ordre de multiplicité de la racine a_i.

P est scindé si et seulement si $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$.

Si $m_i \geqslant 2$, a_i est une racine d'ordre $m_i - 1$ du polynôme P'. Par conséquent, P' est divisible par le polynôme $Q = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i - 1}$ (les facteurs où $m_i = 1$ ne sont pas gênants puisqu'ils valent 1).

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, la fonction polynomiale P est continue et dérivable sur $[a_i, a_{i+1}]$ et $P(a_i) = P(a_{i+1}) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in \,]a_i, a_{i+1}[$ $P'(c_i) = 0$. P' est divisible par $R = \prod_{i=1}^{p-1} (X - c_i)$.

P' est divisible par les polynômes Q et R qui sont scindés et n'ont pas de racine commune, il est donc divisible par leur produit. Or :

$$\deg(QR) = \sum_{i=1}^{p} (m_i - 1) + p - 1$$
$$= (n - p) + (p - 1) = n - 1 = \deg(P')$$

Donc $P' = \alpha QR$, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Comme QR est scindé, il en est de même de P'.

4.3 • Théorème des accroissements finis

Un simple changement de repère permet de généraliser le théorème de Rolle :

Théorème 4 (égalité des accroissements finis)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$).

$$\exists c \in \,]a, b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Démonstration

Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'autre part :

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

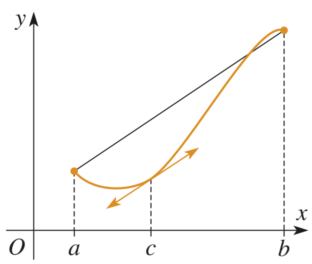
$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = g(a)$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g :

$$\exists c \in]a,b[\quad g'(c) = 0$$

C'est-à-dire $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

Graphiquement, ce théorème signifie que tout arc de la courbe représentative d'une fonction dérivable possède au moins une tangente parallèle à la corde joignant les extrémités de cet arc (*Doc.* 6). Du point de vue cinématique, un mobile se déplaçant sur un axe pendant un intervalle de temps possède au moins une fois une vitesse instantanée égale à sa vitesse moyenne sur cet intervalle.



Doc. 6 Théorème des accroissements finis.

Le plus souvent, dans la pratique, on ne sait rien d'un élément c qui réalise l'égalité des accroissements finis. Mais de sa simple existence, on peut déduire le corollaire suivant, extrêmement utile dans les applications, et qui a l'avantage de rester valable pour des fonctions à valeurs complexes ou vectorielles (voir § 6.2).

Corollaire 4.1 (inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (avec $a<b$).

1) Si $\forall x \in]a,b[\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$,
alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$

2) Si $\forall x \in]a,b[\quad |f'(x)| \leqslant k$,
alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$

Démonstration

1) Il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, d'où $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

2) Pour tout couple $(x,y) \in [a,b]^2$, on peut appliquer le résultat précédent. On en déduit $|f(x)-f(y)| \leqslant k\,|x-y|$.

Pour s'entraîner : ex. 9 à 11

4.4 • Dérivées et sens de variation

Les résultats précédents permettent d'établir le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.

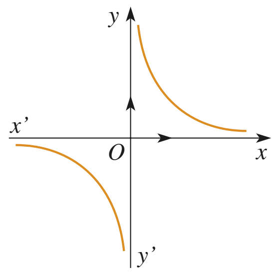
Corollaire 4.2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un **intervalle** I contenant au moins deux points.

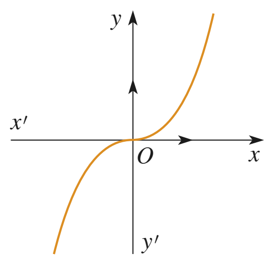
f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.

f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.



Doc. 7 Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$



Doc. 8 Fonction $x \mapsto x^3$.

Démonstration

Si f est croissante sur I : $\quad \forall x_0 \in I \backslash \{x_0\} \quad \forall x \in I \quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$

D'où, en passant à la limite quand x tend vers x_0, $f'(x_0) \geqslant 0$.

Réciproquement, supposons f' positive sur I. D'après l'égalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in I^2 \; x < y \;\Rightarrow\; \exists c \in]x, y[\quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \quad \text{d'où} \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant 0$$

f est donc croissante.

La démonstration est la même pour une fonction décroissante ou constante.

- Ces résultats ne sont valables que sur un **intervalle** : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (*Doc.* 7) n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, bien que sa dérivée y soit toujours négative... ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle).
- Si f' est strictement positive sur un intervalle I, f est strictement croissante sur I ; mais la réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto x^3$ (*Doc.* 8) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée s'annule en 0.

Pour s'entraîner : ex. 8

4.5 • Prolongement d'une dérivée

Enfin, le théorème des accroissements finis permet dans certains cas d'obtenir la dérivée d'une fonction en un point particulier en prolongeant par continuité la dérivée calculée sur un intervalle :

Théorème 5

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$.

- Si f' admet une limite finie en a, alors f est dérivable en a et :

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} f'(x) \qquad (f' \text{ est continue en } a)$$

- Si f' tend vers $\pm\infty$ en a, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers $\pm\infty$ en a et f n'est pas dérivable en a.

Insistons sur le fait que ce théorème donne une condition de dérivabilité en a qui est suffisante, mais non nécessaire : une fonction peut être dérivable en a sans que f' admette une limite finie en a.

Exemple :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \text{si} \quad x \neq 0, \quad f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

donc f' n'admet pas de limite en 0. Autrement dit, f' est définie en 0, mais elle n'est pas continue en ce point.

Démonstration

Pour tout $x \in]a, b]$, la fonction f vérifie l'égalité des accroissements finis sur $[a, x]$:

on peut choisir $c_x \in]a, x[\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

Si $\lim\limits_{a} f' = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \rightarrow a} f'(c_x) = l$, d'où $\lim\limits_{x \rightarrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.

Si l est fini, on en déduit que f est dérivable en a et que $f'(a) = l$.

Si l est infini, f n'est pas dérivable en a, sa courbe représentative possède une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées en ce point.

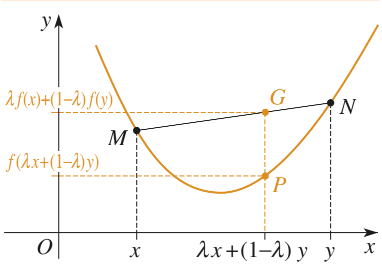
Pour s'entraîner : ex. 12

5 Fonctions convexes

5.1 • Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



Doc. 9 Fonction convexe.

Interprétation graphique :

Soit M et N les points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives x et y.

Soit G le barycentre du système $(M,\lambda),(N,1-\lambda)$.

Les coordonnées de G sont $(\lambda x + (1-\lambda)y\,,\ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$.

Soit P le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$. L'ordonnée de P est $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$. La définition de la convexité de f exprime donc que le point P est situé en dessous de G (*Doc.* 9).

Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de sa courbe représentative est situé en dessous de la corde correspondante.

Exemple : la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est convexe.

Une fonction est dite concave si son opposée est convexe. La propriété est inversée : tout arc est *au-dessus* de sa corde.

APPLICATION 4

Généralisation : inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Démontrer que $\forall n \geqslant 2 \quad \forall (x_i) \in I^n \quad \forall (\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Effectuons une récurrence sur n. Pour $n=2$, on reconnaît la définition d'une fonction convexe (on écrit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ au lieu de $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$) :

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2 \quad \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\Longrightarrow \ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 pour lequel la propriété est vraie, et soit $(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right)$$

Posons $\Lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

- Si $\Lambda \neq 0$: soit ξ le barycentre de $(x_1,\lambda_1),\cdots,(x_n,\lambda_n)$; comme I est un intervalle, $\xi \in I$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \Lambda \xi \quad \text{et} \quad \Lambda + \lambda_{n+1} = 1$$

Alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) = f(\Lambda\xi + \lambda_{n+1}x_{n+1})$$
$$\leqslant \Lambda f(\xi) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

Or :

$$\xi = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\Lambda}x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\Lambda} = 1$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$f(\xi) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\Lambda}f(x_i)$$

D'où, en définitive :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) \leqslant \Lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\Lambda}f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i)$$

• Si $\Lambda = 0$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i = 0$ et $\lambda_{n+1} = 1$; l'inégalité est immédiate.

La récurrence est établie : la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Pour s'entraîner : ex. 14

5.2 • Croissance des pentes des sécantes dont une extrémité est fixée

Théorème 6

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, la fonction :

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

Démonstration

1) Supposons f convexe sur I. Soit $x_0 \in I$ et x_1, x_2 deux éléments de $I\setminus\{x_0\}$. Supposons, pour fixer les idées, que $x_0 < x_1 < x_2$. On peut poser $x_1 = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_2$, avec $\lambda \in]0, 1[$. f étant convexe :

$$f(x_1) \leqslant \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_2)$$

d'où :

$$f(x_1) - f(x_0) \leqslant (1-\lambda)(f(x_2) - f(x_0))$$

or $\quad x_1 - x_0 = (1-\lambda)(x_2 - x_0) \quad$ et $\quad x_1 - x_0 > 0$; $\quad$ d'où :

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

La démonstration est pratiquement la même lorsque $x_1 < x_0 < x_2$ ou $x_1 < x_2 < x_0$.

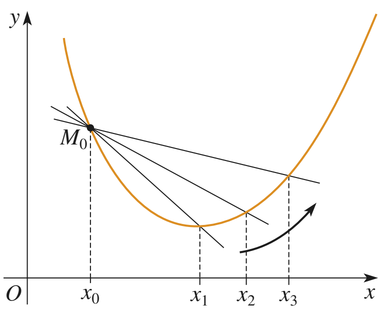
On en déduit que l'application $\left|\begin{array}{ccc} I\setminus\{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}\right.$ est croissante.

2) Réciproquement, supposons cette application croissante pour tout $x_0 \in I$. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$, et $\lambda \in]0, 1[$. Posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, d'où $x < z < y$:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x};$$

d'où $\quad f(z) \leqslant f(x) + \dfrac{z - x}{y - x}(f(y) - f(x))$.

Or $\quad \dfrac{z - x}{y - x} = 1 - \lambda$; $\quad$ d'où $\quad f(z) \leqslant f(x) + (1-\lambda)(f(y) - f(x))$.



Doc. 10 Croissance de la pente d'une sécante.

Et, enfin : $\qquad pt \quad f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Cette inégalité est évidente pour $\lambda = 0$ ou 1 ; elle est donc établie pour tout $\lambda \in [0, 1]$; par conséquent, f est convexe.

Graphiquement, cette propriété signifie que la pente d'une sécante dont on fixe une extrémité est une fonction croissante de l'autre extrémité (*Doc.* 10).

De même, f est concave si et seulement si cette même application est décroissante.

Pour s'entraîner : ex.13

5.3 • Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Théorème 7

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) Supposons f convexe sur I. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. Pour tout $z \in]x, y[$, on a :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

En faisant tendre z vers x à droite , on obtient $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

En faisant tendre z vers y à gauche, on obtient $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$;

d'où $\qquad f'(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$.

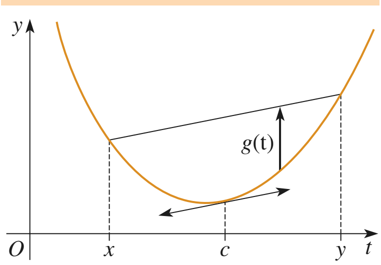
f' est donc croissante sur I.

2) Supposons f' croissante sur I. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $y = mx + p$ l'équation de la droite joignant les points d'abscisses x et y de la courbe représentative de f. Soit g la fonction définie par $g(t) = f(t) - (mt + p)$, pour $t \in I$. g est dérivable sur $[x, y]$ et $g'(t) = f'(t) - m$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = m$, c'est-à-dire $g'(c) = 0$. La fonction g' étant croissante, elle est négative sur $[x, c]$ et positive sur $[c, y]$.

D'où les variations de g :

t	x		c		y
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

La fonction g est donc toujours négative : la courbe est en dessous de sa corde, f est donc convexe sur I (*Doc.* 11).



Doc. 11 Croissance de la dérivée.

De même, une fonction dérivable est concave sur I si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I.

Corollaire 7.1

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.

Démonstration

Sur l'intervalle I : f' croissante $\Longleftrightarrow$ f'' positive.

De même, cette fonction est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur I.

En un point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe, la courbe change de concavité : on dit qu'il s'agit d'un point d'inflexion.

5.4 • Position par rapport à une tangente

Théorème 8

La courbe représentative d'une fonction convexe dérivable sur un intervalle I est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration

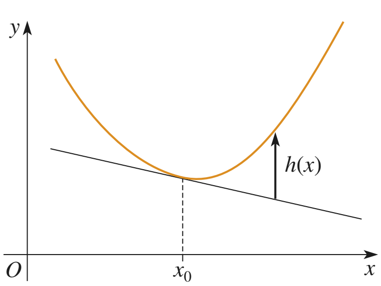
Soit f une fonction convexe dérivable sur I. L'équation de la tangente à sa courbe représentative en un point x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Posons $h(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)$.

La fonction h est dérivable sur I et $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. f' étant croissante sur I, les variations de h sont données par le tableau ci-dessous :

x		x_0	
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$	0	$\nearrow$

On en déduit que h est toujours positive : la courbe est au-dessus de sa tangente (*Doc.* 12).



Doc. 12 La courbe est au dessus de sa tangente.

De même, la courbe d'une fonction concave sur I est en dessous de ses tangentes. En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

6 Dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

6.1 • Définition

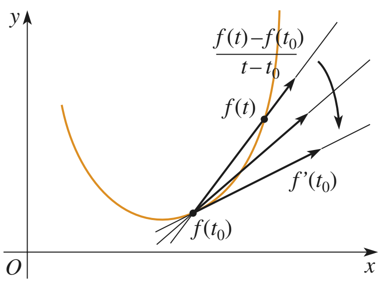
On peut étendre sans problème la définition de la dérivabilité au cas d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie sur un intervalle I contenant au moins deux points et $t_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en t_0 si l'application $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ admet une limite finie quand t tend vers t_0.

Cette limite, complexe, est alors appelée dérivée de f en t_0, et notée $f'(t_0)$.

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



Doc. 13 Dérivée vectorielle.

Graphiquement, $f'(t_0)$ peut être interprété comme un « vecteur-vitesse » dans le plan complexe. Il est tangent à la trajectoire du point $f(t)$ en t_0 (*Doc.* 13).

Comme nous l'avons déjà démontré pour les limites, la dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes est équivalente à la dérivabilité de sa partie réelle et de sa partie imaginaire et :

$$\text{si} \quad f(t) = x(t) + i\,y(t) \quad \text{avec} \quad (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$
$$f'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$$

On peut étendre aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ les notions de dérivabilité à droite, à gauche, ainsi que toutes les opérations sur les dérivées.

APPLICATION 5

Dérivée de l'exponentielle complexe

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculer la dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{\lambda t}$.

Posons $\lambda = a + i\,b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(t) = e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}\cos bt + i\,e^{at}\sin bt$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(t) = (a\,e^{at}\cos bt - b\,e^{at}\sin bt) + i\,(a\,e^{at}\sin bt + b\,e^{at}\cos bt)$$

$$f'(t) = e^{at}(a + i\,b)(\cos bt + i\,\sin bt) = (a + i\,b)\,e^{(a+ib)t}$$

D'où $(e^{\lambda t})' = \lambda\,e^{\lambda t}$.

Remarque : *C'est ce qui justifie la notation introduite au chapitre Nombres complexes :* $\cos x + i\,\sin x = e^{ix}$.

6.2 • Propriétés des fonctions dérivables complexes

La notion d'extremum local n'a plus aucun sens pour les fonctions à valeurs complexes.

Aussi faut-il prendre garde que **le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont pas vérifiés par les fonctions à valeurs complexes.**

Exemple : La fonction $f : t \mapsto e^{it}$ est continue et dérivable sur $[0, 2\pi]$ et $f(0) = f(2\pi)$. Le théorème de Rolle indiquerait que f' s'annule en un point de $]0, 2\pi[$, ce qui est impossible puisque $f'(t) = i\,e^{it}$.

D'un point de vue cinématique, contrairement à un point d'un axe, un mobile dans le plan complexe peut passer deux fois au même point sans s'arrêter.

Cependant, l'inégalité des accroissements finis est conservée, sous la forme :

Théorème 9

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$).

Si $\forall t \in]a, b[\quad |f'(t)| \leqslant M$, alors $\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant M$.

Démonstration

Posons $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = r\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $(r,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et considérons la fonction g définie par :

$$\forall t \in [a,b] \qquad g(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$$

On a donc $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = r \in \mathbb{R}$. Posons $g(t) = x(t) + i\,y(t)$ et appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction réelle x :

$$\forall t \in]a,b[\qquad |x'(t)| \leqslant |g'(t)| = |f'(t)| \leqslant M$$

D'où : $\left|\dfrac{x(b)-x(a)}{b-a}\right| \leqslant M$

ce qui équivaut à $\left|\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}\right| \leqslant M$, puisque $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$ est réel.

C'est-à-dire $r \leqslant M$, soit $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant M$.

En particulier, si f' est nulle sur $]a,b[$, f est constante sur $[a,b]$.

Pour s'entraîner : ex. 16 à 18

MÉTHODE

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, on peut :

- appliquer les opérations sur les fonctions dérivables ;
- chercher si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0 ;
- chercher si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 *(cf. exercices* 2 *et* 5*)* ;
- si f est continue en x_0 et dérivable sur un voisinage de x_0 privé de x_0, chercher si f' admet une limite finie en x_0.

Pour calculer une dérivée n-ième, on peut :

- essayer de conjecturer le résultat au vu des premières dérivées successives, puis le vérifier par récurrence *(cf. exercice* 7 **a)** *et* **b)***)* ;
- si la fonction se présente comme un produit, appliquer le théorème de Leibniz *(cf. Application* 1 *et exercice* 7 **f)***)* ;
- transformer l'expression pour faciliter les dérivations successives *(cf. exercice* 7 **c)**, **d)** *et* **e)***)*.

Pour trouver un extremum d'une fonction réelle dérivable sur un intervalle I, on peut :

- chercher les points de I où la dérivée s'annule, puis vérifier pour chacun d'entre eux s'il s'agit bien d'un extremum *(cf. Application* 2*)* ;
- examiner la valeur de la fonction aux extrémités de I (où f peut présenter un extremum non local).

Pour étudier les variations d'une fonction réelle dérivable :

- on étudie le signe de sa dérivée (pour cela, on peut être amené à étudier les variations d'une fonction annexe) *(cf. exercice* 8*)*.

Pour montrer qu'une fonction f est convexe, on peut :

- appliquer la définition (*ex* : $x \mapsto |x|$) ;
- chercher si tout arc de sa représentation graphique est situé en dessous de la corde correspondante ;
- si f est dérivable, montrer que f' est croissante *(cf. exercice* 14*)* ;
- si f est deux fois dérivable, montrer que f'' est positive.

Ne pas confondre :

- la définition de la dérivée en a :
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$
on peut l'utiliser lorsque, connaissant des propriétés concernant le taux d'accroissement, on veut obtenir des propriétés concernant la dérivée *(cf. exercice* 5 *)* ;
- le théorème des accroissements finis :
$$\exists c \in]a, b[\qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
on peut l'utiliser lorsque, connaissant des propriétés de la dérivée, on veut obtenir des propriétés du taux d'accroissement *(cf. exercice* 11*)*.

Exercice résolu

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, positive, bornée, deux fois dérivable, telle que $f \leqslant f''$.

1 *Montrer que f est convexe.*

2 *Montrer que f est décroissante.*

3 *Montrer que f' et f tendent vers 0 en $+\infty$.*

4 *On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = f(x)e^x$, $h(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}$.*

a) *Étudier le sens de variation et le signe de h.*

b) *En déduire le sens de variation de g.*

c) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) \leqslant f(0)\,e^{-x}$.*

Conseils

Raisonner par l'absurde.

Toute fonction monotone bornée a une limite finie en $+\infty$.

Dériver $h(x)$.

Dériver $g(x)$.

Solution

1) f'' est positive, donc f' est croissante : f est convexe.

2) La courbe représentative de f est au dessus de sa tangente en tout point. S'il existait un point où cette tangente avait un coefficient directeur strictement positif, f tendrait vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui est impossible puisqu'elle est bornée. Donc f' est partout négative : f est décroissante.

3) Comme f est décroissante et minorée par 0, elle a une limite ℓ positive en $+\infty$. Si $\ell > 0$, $f'' > \ell$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $f'(x) > f'(0) + \ell x$; f' tendrait vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui est exclu. Donc $\ell = 0$.

De même, : f' est croissante et majorée par 0, elle a une limite ℓ' négative en $+\infty$. Si $\ell' < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) < f(0) - \ell' x$; f tendrait vers $-\infty$ en $+\infty$, ce qui est exclu ; donc $\ell' = 0$.

4 a) h est dérivable et $h'(x) = (f''(x) - f(x))e^{-x} \geqslant 0$. Donc h est croissante et comme elle tend vers 0 en $+\infty$, elle est négative sur $\mathbb{R}_+$.

b) g est dérivable et $g'(x) = (f'(x) + f(x))e^x = h(x)e^{2x} \leqslant 0$; g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) \leqslant g(0)$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant f(0)\,e^{-x}$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Toute fonction continue est dérivable.

b) Toute fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.

c) Une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de ce point.

d) Si une fonction dérivable admet un extremum local en un point, sa dérivée s'annule en ce point.

e) Si la dérivée d'une fonction s'annule en un point, cette fonction admet un extremum en ce point.

f) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $\exists k \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant k$, f est k-lipschitzienne sur I.

g) Si f est dérivable sur un intervalle I contenant un point a, $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = f'(a)$.

h) Toute fonction convexe est dérivable et sa dérivée est croissante.

i) Toute fonction dérivable sur I dont la dérivée est croissante est convexe sur I.

j) Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont dérivables.

Dérivabilité en un point

2

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x^{n+1} + x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

b) $\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = x \sin \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

3

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0. Si $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, cette limite est appelée dérivée symétrique de f en x_0. Montrer que, si f est dérivable à droite et à gauche en x_0, elle admet une dérivée symétrique en x_0. La réciproque est-elle vraie ?

4

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par :

$$\begin{cases} x \neq 0 & f(x) = \dfrac{x}{\ln|x|} \cos \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$.

2) On considère les suites :

$$u_n = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Calculer les limites des suites $(f'(u_n))$ et $(f'(v_n))$.

3) En déduire que la fonction f' n'est pas bornée au voisinage de 0.

5*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre 0, continue en 0, telle que $f(0) = 0$ et :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

1) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{f\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}{\dfrac{x}{2^k}} + \frac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{x}.$$

2) En déduire que f est dérivable en 0.

Calculs de dérivées, dérivées successives, études de fonctions

6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$;

b) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^a}{a^x} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$;

d) $f(x) = x^x$;

e) $f(x) = \ln \left| \tan \dfrac{x}{2} \right|$;

f) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

g) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;

h) $f(x) = \ln\left(\tan\left(1 + \sqrt{\sin(x^2)}\right)\right)$.

7 Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; **d)** $f(x) = \cos^3 x$;

e) $f(x) = e^x \sin x$; **f)** $f(x) = x^2(1+x)^n$.

8 Étudier les variations des fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives :

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$; **b)** $f(x) = \dfrac{\ln|2x+1|}{\ln|3x+1|}$.

Accroissements finis

9 Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

a) $\sqrt{10001} \approx 100$; **b)** $\dfrac{1}{0,999^2} \approx 1$; **c)** $\cos 1 \approx \dfrac{1}{2}$.

10 Constante d'Euler

1) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln \frac{k+1}{k} \leqslant \frac{1}{k}$$

2) En déduire un encadrement de la suite :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

3) Démontrer que la suite (S_n) converge.

11 Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$ et que f' soit croissante sur $]0, +\infty[$. Démontrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante.

12* **Règle de L'Hôpital**

1) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

Démontrer que :

$$\exists c \in]a, b[\quad f'(c)\,\big[g(b) - g(a)\big] = g'(c)\,\big[f(b) - f(a)\big]$$

2) En déduire la règle de L'Hôpital *(mathématicien français du XVII^e siècle)* : si f et g sont deux fonctions continues sur $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, et $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$ $g'(x) \neq 0$; montrer que si la fonction $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite l en x_0, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet aussi l pour limite en x_0, soit :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

3) Appliquer cette règle pour déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$; **b)** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

4) La règle de L'Hôpital admet-elle une réciproque ?

Fonctions convexes

13 Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est constante.

14 **1)** Montrer que la fonction $(x \mapsto -\ln x)$ est convexe.

2) En déduire l'inégalité :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n} \quad \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

(on pourra utiliser l'inégalité de Jensen, *cf. Application* 5).

3) *Application* : Démontrer les inégalités :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc \quad \text{et} \quad (a+b+c)^3 \geqslant 27abc$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

15* **1)** Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad \text{avec} \quad \alpha + \beta = 1$$

$$x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y$$

2) En déduire *l'inégalité de Hölder* :

$$\forall (a_i) \in \mathbb{R}_+^{*n} \quad \forall (b_i) \in \mathbb{R}_+^{*n} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$$

avec $\alpha + \beta = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta$$

Indication :

Poser $\quad x = \dfrac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}}$ et $y = \cdots$

3) Qu'obtient-on lorsque $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ (interpréter géométriquement) ?

Fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

16 Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1) Montrer que la fonction $\overline{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

2) Montrer que la fonction $|f|$ est dérivable en tout point où elle ne s'annule pas et calculer sa dérivée.

17 a et b étant deux nombres complexes, calculer la dérivée de l'application

$$\left|\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (at+b)^n\end{array}\right. \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{Z}$$

18 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} t \neq 0 & f(t) = t^2\,\mathrm{e}^{i/t} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Exercices posés aux oraux des concours

19 (Petites Mines 2002)

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^{1+1/x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue et étudier sa dérivabilité en 0.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leqslant x + 1$; calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$; étudier son signe et en déduire le sens de variation de f.

3) Calculer la limite de f en $+\infty$; étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$ (on pourra chercher un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.

20 (Petites Mines 2003)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x) \quad (1)$$

1) Calculer $f(0)$.

2) Montrer que f est dérivable et qu'elle est solution d'une équation différentielle.

3) Conclure.

21 (Petites Mines 2003)

Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$.

1) Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est prolongeable par continuité en a.

2) En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

19 Intégration sur un segment

INTRODUCTION

La notion générale d'intégrale d'une fonction est difficile. Née au XVII^e^ *siècle à la suite du calcul différentiel, elle s'est peu à peu éloignée du problème des primitives qui n'y est bien corrélé que pour les fonctions continues. Des définitions successives données notamment par Riemann, Darboux ont conduit au début du* XX^e^ *siècle à l'intégrale de Lebesgue, théorie très aboutie mais trop difficile à notre niveau.*

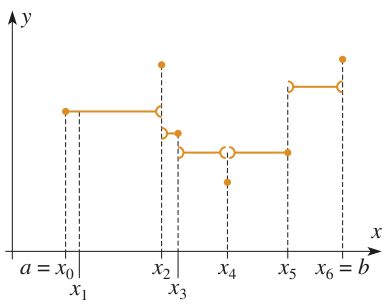
Nous nous contenterons de définir l'intégrale d'une fonction en escalier, puis celle d'une fonction continue par morceaux, que l'on peut, comme nous le verrons, approcher d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier.

OBJECTIFS

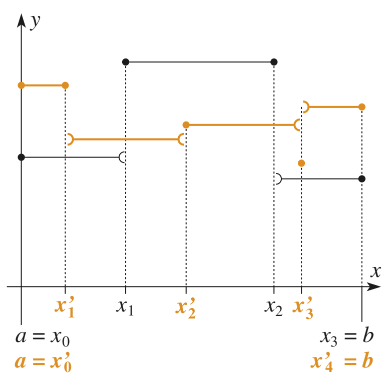
- Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux, à partir de l'intégration des fonctions en escalier.
- Utilisation des sommes de Riemann pour des calculs de limites.

1 Approximation par des fonctions en escalier

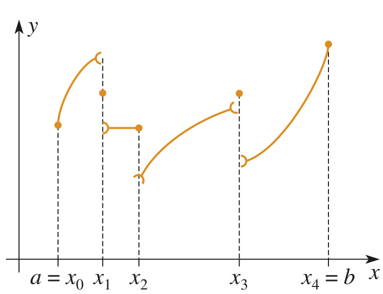
Remarque *: Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire,* $[a, b]$ *désignera un segment non vide et non réduit à un point, c'est-à-dire tel que* $a < b$.



Doc. 1 Fonction enn escalier.



Doc. 2 Deux fonctions en escalier.



Doc. 3 Fonction continue par morceaux.

1.1 • Fonctions en escalier sur un segment

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a, b]$. On dit que f est **en escalier** s'il existe une partition de $[a, b]$ en un **nombre fini** d'intervalles sur chacun desquels f est constante.

Il existe alors une suite finie strictement croissante $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ (les valeurs prises par f aux points x_i n'ont pas d'importance) (*Doc.* 1).

Une telle suite est appelée **subdivision** de $[a, b]$ **adaptée** à la fonction en escalier f. Elle n'est pas unique : certains points de subdivision peuvent être retirés sans nuire à la définition, et il est toujours possible d'ajouter arbitrairement des points de subdivision. Toute subdivision contenant une subdivision adaptée à f est adaptée à f.

Étant donné deux fonctions en escalier f et g sur $[a, b]$, il existe une subdivision adaptée simultanément aux deux fonctions : il suffit de réunir deux subdivisions adaptées respectivement à chacune d'entre elles (*Doc.* 2).

On en déduit que l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est stable par combinaison linéaire et par multiplication. Comme il contient la fonction constante unité, c'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair également que si f est en escalier sur $[a, b]$, alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a, b]$.

1.2 • Fonctions continues par morceaux sur un segment

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $[a, b]$. On dit que f est **continue par morceaux** si elle n'a qu'un **nombre fini** de points de discontinuité en chacun desquels elle présente une limite à droite et une limite à gauche finies.

Autrement dit, il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur cet intervalle et prolongeable par continuité à l'intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$. Une telle subdivision est dite **adaptée** à f (*Doc.* 3).

Comme pour les fonctions en escalier, on montre facilement que l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour s'entraîner : ex. 2

1.3 • Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier

Nous allons démontrer que toute fonction continue par morceaux sur un segment peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier :

Théorème 1

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que :

$$\forall x \in [a, b] \quad |\phi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f.

Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ est continue sur cet intervalle et prolongeable par continuité au segment $[x_i, x_{i+1}]$, donc uniformément continue sur ce segment. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_i > 0 \quad \forall (x, y) \in]x_i, x_{i+1}[\quad |x - y| \leqslant \alpha_i \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\quad \alpha = \inf\limits_{i \in [\![0,n-1]\!]} \alpha_i$.

Considérons une subdivision $\sigma' = (x'_j)_{j \in [\![0,n']\!]}$ contenant σ et telle que :

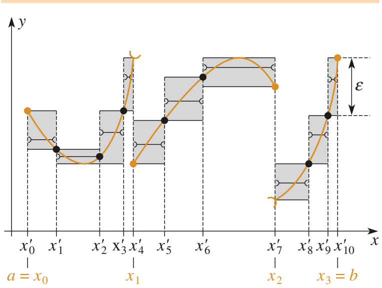
$$\forall j \in [\![0, n'-1]\!] \quad |x'_{j+1} - x'_j| \leqslant \alpha$$

Choisissons dans chaque intervalle $]x'_j, x'_{j+1}[$ un réel ξ_j et construisons la fonction en escalier ϕ suivante (*Doc.* 4) : $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{cases} \text{si} \quad \exists j \in [\![0, n']\!] \quad \text{t.q.} \quad x = x'_j, \quad \phi(x) = f(x'_j) \\ \text{si} \quad \exists j \in [\![0, n'-1]\!] \quad \text{t.q.} \quad x \in]x'_j, x'_{j+1}[, \quad \phi(x) = f(\xi_j) \end{cases}$$

Dans le premier cas, $|\phi(x) - f(x)| = 0$.

Dans le second, $|\xi_j - x| \leqslant \alpha$, donc $|f(\xi_j) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $|\phi(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.



Doc. 4 Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier.

Corollaire 1.1

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$$

Démonstration

D'après le théorème précédent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b] \quad |\phi(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

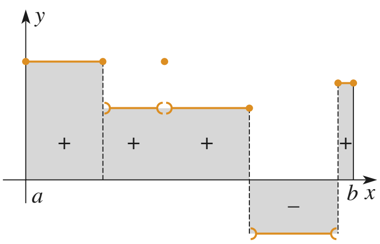
On a alors : $\forall x \in [a, b] \quad \phi(x) - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant \phi(x) + \dfrac{\varepsilon}{2}$

Les fonctions en escalier $\varphi = \phi - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\psi = \phi + \dfrac{\varepsilon}{2}$ conviennent.

2 Intégration sur un segment

2.1 • Intégrale d'une fonction en escalier

Il est clair que cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à f choisie. Elle est également indépendante des valeurs particulières de f aux points de subdivision. Il en résulte qu'on peut changer la valeur de f en un nombre fini de points sans changer son intégrale.



Doc. 5 Intégrale d'une fonction en escalier.

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f, avec $\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad f(x) = y_i$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ la somme :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i$$

Géométriquement, $(x_{i+1} - x_i)\, y_i$ est l'aire du rectangle limité par l'axe (Ox), les droites d'équation $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ et la droite d'équation $y = y_i$, affectée du signe $+$ si ce rectangle est au dessus de (Ox) et du signe $-$ dans le cas contraire (*Doc.* 5).

Propriétés

- **Linéarité.** Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à la fois à f et à g, avec :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[\quad f(x) = y_i, \quad g(x) = z_i$$

Pour tous réels α et β, $\alpha f + \beta g$ est en escalier et :

$$\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,(\alpha y_i + \beta z_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i + \beta \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, z_i = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$$

L'application qui à une fonction en escalier sur $[a, b]$ fait correspondre son intégrale est donc une forme linéaire.

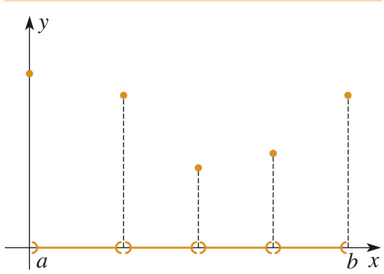
- **Croissance.** Soit f une fonction en escalier positive sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f, avec :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[\quad f(x) = y_i$$

Comme f est positive, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $y_i \geqslant 0$, donc l'intégrale de f est positive.

$$f \geqslant 0 \implies \int_{[a,b]} f \geqslant 0$$

Attention : Contrairement aux fonctions continues, une fonction en escalier positive peut avoir une intégrale nulle sur $[a, b]$ sans que f soit nulle sur tout ce segment (*Doc.* 6).



Doc. 6 Fonction positive d'intégrale nulle.

Plus généralement, soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $f \leqslant g$. La fonction $g - f$ est positive sur $[a, b]$, son intégrale est donc positive, c'est-à-dire :

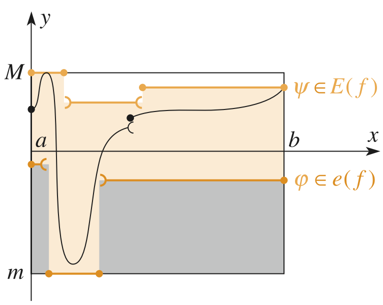
$$f \leqslant g \implies \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$$

L'application qui à une fonction en escalier sur $[a, b]$ fait correspondre son intégrale est croissante.

- **Additivité des intervalles.** Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Choisissons une subdivision $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ adaptée à f et contenant c $(\exists p \in [\![1, n-1]\!]\ ,\ c = x_p)$, telle que
 $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[\quad f(x) = y_i$.
 f est encore en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i + \sum_{i=p}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, y_i = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

2.2 • Intégrale d'une fonction continue par morceaux



Doc. 7 Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, et σ une subdivision adaptée. f est bornée sur chaque intervalle de la subdivision σ, donc bornée sur $[a, b]$.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in [a, b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Désignons par $e(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier inférieures à f sur $[a, b]$. Cet ensemble est non vide, puisqu'il contient la fonction constante m. L'ensemble des intégrales sur $[a, b]$ des éléments de $e(f)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par $M(b-a)$. Il possède donc une borne supérieure (*Doc.* 7).

De même l'ensemble $E(f)$ des fonctions en escalier supérieures à f sur $[a, b]$ est non vide, puisqu'il contient la fonction constante M. L'ensemble des intégrales sur $[a, b]$ des éléments de $E(f)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par $m(b-a)$. Il possède donc une borne inférieure.

$$\forall (\varphi, \psi) \in e(f) \times E(f) \quad \varphi \leqslant \psi \quad \text{donc} \quad \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$

d'où :

$$\sup_{\varphi \in e(f)} \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \inf_{\psi \in E(f)} \int_{[a,b]} \psi$$

Montrons que ces bornes sont égales :

Théorème 2

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, la borne supérieure des intégrales sur $[a, b]$ des fonctions en escalier qui minorent f est égale à la borne inférieure des intégrales sur $[a, b]$ des fonctions en escalier qui majorent f.

Démonstration

Supposons que $\sup_{\varphi \in e(f)} \int_{[a,b]} \varphi < \inf_{\psi \in E(f)} \int_{[a,b]} \psi$, et posons :

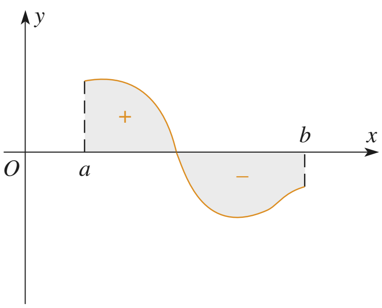
$$\varepsilon = \inf_{\psi \in E(f)} \int_{[a,b]} \psi - \sup_{\varphi \in e(f)} \int_{[a,b]} \varphi$$

Nous avons vu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

On en déduit que $\varphi \in e(f)$, $\psi \in E(f)$ et $\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui contredit la définition de ε. Donc :

$$\sup_{\varphi \in e(f)} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\psi \in E(f)} \int_{[a,b]} \psi$$



Doc. 8 Signe de l'intégrale.

La valeur commune de ces deux bornes est appelée **intégrale** de f sur $[a, b]$.

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\varphi \in e(f)} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\psi \in E(f)} \int_{[a,b]} \psi$$

Remarque *: Nous admettrons que $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire algébrique de la région du plan limitée par l'axe Ox, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$, $x = b$, en affectant d'un signe $+$ les parties situées au dessus de l'axe Ox et d'un signe $-$ les parties situées en dessous (Doc. 8).*

2.3 • Caractérisation de l'intégrale

Théorème 3

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, et I un réel. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ φ et ψ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \,, \quad \int_{[a,b]} \varphi \leqslant I \leqslant \int_{[a,b]} \psi \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$$

alors $I = \int_{[a,b]} f$.

Démonstration

Supposons que $I \neq \int_{[a,b]} f$ et posons $\varepsilon = \frac{1}{2}\left|I - \int_{[a,b]} f\right|$.

Les fonctions en escalier φ et ψ correspondantes vérifient :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \psi \,, \quad \int_{[a,b]} \varphi \leqslant I \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$

d'où :

$$\left|I - \int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire $2\varepsilon \leqslant \varepsilon$, ce qui est absurde. Donc $I = \int_{[a,b]} f$.

Pour s'entraîner : ex. 6

3 Propriétés de l'intégrale

Elles se déduisent de celles de l'intégrale d'une fonction en escalier.

3.1 • Linéarité

- Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_1 \in e(f_1)$ et $\psi_1 \in E(f_1)$ ainsi que $\varphi_2 \in e(f_2)$ et $\psi_2 \in E(f_2)$ telles que :

$$\int_{[a,b]} (\psi_1 - \varphi_1) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} (\psi_2 - \varphi_2) \leqslant \varepsilon$$

On a donc :

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 \leqslant f_1 + f_2 \leqslant \psi_1 + \psi_2 \\ \displaystyle\int_{[a,b]} (\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \int_{[a,b]} f_1 + \int_{[a,b]} f_2 \leqslant \int_{[a,b]} (\psi_1 + \psi_2) \\ \displaystyle\int_{[a,b]} (\psi_1 + \psi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant 2\varepsilon \end{cases}$$

ce qui prouve, d'après le théorème de caractérisation de l'intégrale, que :

$$\int_{[a,b]} (f_1 + f_2) = \int_{[a,b]} f_1 + \int_{[a,b]} f_2$$

- De même, soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in e(\alpha f)$ et $\psi \in E(\alpha f)$ telles que $\displaystyle\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$.

On a :

$$\begin{cases} \alpha\varphi \leqslant \alpha f \leqslant \alpha\psi \\ \displaystyle\int_{[a,b]} \alpha\varphi \leqslant \alpha \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \alpha\psi \\ \displaystyle\int_{[a,b]} (\alpha\psi - \alpha\varphi) \leqslant \alpha\varepsilon \end{cases}$$

ce qui prouve, d'après le théorème de caractérisation de l'intégrale, que :

$$\int_{[a,b]} \alpha f = \alpha \int_{[a,b]} f$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$, la démonstration est la même en échangeant les rôles des fonctions $\alpha\varphi$ et $\alpha\psi$.
- En définitive, on peut conclure :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$$

L'application qui à une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ fait correspondre son intégrale est une forme linéaire.

3.2 • Croissance

Soit f une fonction continue par morceaux positive sur $[a, b]$. La fonction nulle sur $[a, b]$ appartient à $e(f)$; son intégrale est donc inférieure ou égale à l'intégrale de f, qui est par conséquent positive :

$$f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{[a,b]} f \geqslant 0$$

Attention : Comme une fonction en escalier, une fonction continue par morceaux positive peut avoir une intégrale nulle sur $[a, b]$ sans que f soit nulle sur tout ce segment.

Plus généralement, soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ telles que $f \leqslant g$. La fonction $g - f$ est positive sur $[a, b]$, son intégrale est donc positive, c'est-à-dire :

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$$

L'application qui à une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ fait correspondre son intégrale est croissante.

En particulier, de $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, on déduit :

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

La valeur absolue d'une intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue.

Pour s'entraîner : ex. 3

3.3 • Additivité des intervalles

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in e(f)$ et $\psi \in E(f)$ telles que :

$$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \varepsilon$$

On sait que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{[a,c]} \varphi \leqslant \int_{[a,c]} f \leqslant \int_{[a,c]} \psi \\[2ex] \displaystyle\int_{[c,b]} \varphi \leqslant \int_{[c,b]} f \leqslant \int_{[c,b]} \psi \end{cases}$$

d'où : $$\int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \leqslant \int_{[a,c]} \psi + \int_{[c,b]} \psi$$

et, d'après les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi = \int_{[a,b]} \varphi \qquad ; \qquad \int_{[a,c]} \psi + \int_{[c,b]} \psi = \int_{[a,b]} \psi$$

On a donc :

$$\begin{cases} \varphi \leqslant f \leqslant \psi \\ \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[b,c]} f \leqslant \int_{[a,b]} \psi \\ \displaystyle\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

ce qui prouve, d'après le théorème de caractérisation de l'intégrale, que :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

3.4 • Inégalité de la moyenne

Théorème 4

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$.

$$\left| \int_{[a,b]} f\,g \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

Démonstration

On sait que :

$$\left| \int_{[a,b]} f\,g \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f\,g|$$

$|f|$ étant continue par morceaux sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$: $\sup\limits_{[a,b]} |f|$ existe. On a alors :

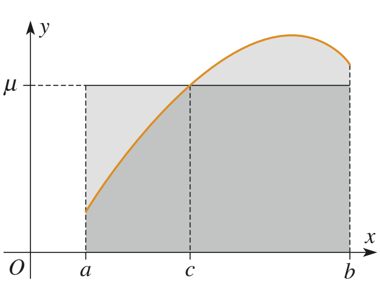
$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)g(x)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \ |g(x)|$$

On obtient l'inégalité cherchée en intégrant sur $[a, b]$.

En particulier en prenant $g = 1$, on obtient :

$$\boxed{\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant (b - a) \sup_{[a,b]} |f|}$$

Le scalaire $\mu = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_{[a,b]} f$ est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$. C'est la valeur d'une fonction constante qui a la même intégrale que f sur $[a, b]$ (*Doc.* 9).



Doc. 9 Valeur moyenne d'une fonction.

Le résultat précédent indique que $|\mu| \leqslant \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

3.5 • Extension

Ici, on ne suppose plus nécessairement que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit le réel

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par :

$$\text{si } a < b \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f$$

$$\text{si } a = b \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\text{si } a > b \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{[b,a]} f$$

***Remarques** :*

- *Le nom donné à la variable ne joue aucun rôle. Il est équivalent d'écrire* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *ou* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$*. On dit qu'il s'agit d'une variable muette.*
- *Il faut bien noter que si* $a > b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *n'est pas l'intégrale de* f *sur un segment. En particulier, elle n'a plus la propriété de croissance énoncée ci-dessus.*
  Dans la pratique, si l'on sait que $a > b$, *on a intérêt à écrire* $\displaystyle -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *plutôt que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- *Quel que soit l'ordre des réels* a, b, c *appartenant à* I, *on a :*
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
  *C'est la **relation de Chasles**.*

Pour s'entraîner : ex. 4 et 5

4 Cas des fonctions continues

4.1 • Une fonction continue atteint sa valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, et $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_{[a,b]} f$ sa valeur moyenne sur $[a, b]$. On sait que f est bornée, et qu'elle atteint ses bornes. De plus :

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant f \leqslant \sup_{[a,b]} f \quad \Rightarrow \quad (b-a)\inf_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

d'où :

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant \mu \leqslant \sup_{[a,b]} f$$

μ est comprise entre les bornes de f ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend la valeur μ sur $[a, b]$:

$$\exists c \in\,]a, b[\quad \mu = f(c) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{[a,b]} f = (b-a)f(c)$$

Remarque *: Ce résultat peut tomber en défaut pour une fonction non continue : par exemple, la fonction Partie entière a pour valeur moyenne* $\frac{1}{2}$ *sur* $[0, 2]$, *mais cette valeur n'est pas atteinte.*

4.2 • Fonction continue positive d'intégrale nulle

Théorème 5

Soit f une fonction continue positive sur le segment $[a, b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est nulle si et seulement si f est nulle sur $[a, b]$.

Démonstration

Si f est nulle, son intégrale est nulle.

Réciproquement, supposons que $\int_{[a,b]} f = 0$ et que f ne soit pas partout nulle sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Appliquons la définition de la continuité de f en c, avec $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$:

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |x - c| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$$

Si l'on pose $\beta = \min(\alpha, \frac{b-a}{2})$, l'un au moins des segments $[c - \beta, c]$, $[c, c + \beta]$ est inclus dans $[a, b]$; or l'intégrale de f sur ce segment est supérieure ou égale à $\beta\varepsilon$, donc strictement positive. *A fortiori*, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est strictement positive, en contradiction avec l'hypothèse. Donc f est nulle sur le segment $[a, b]$ tout entier.

Pour s'entraîner : ex. 7

4.3 • Produit scalaire sur $\mathcal{C}(I)$

Nous avons étudié la notion de produit scalaire dans l'espace vectoriel des vecteurs du plan ou de l'espace de dimension 3. Nous généraliserons cette notion dans le chapitre 28 : *Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens* : on appelle **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$:

- Bilinéaire ; chacune des applications $x \mapsto \varphi(x, y)$ (pour y fixé) et $y \mapsto \varphi(x, y)$ (pour x fixé) est linéaire.
- Symétrique ; pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- Définie positive ; pour tout $x \in E$:

$$\begin{cases} \varphi(x, x) \geqslant 0 \\ \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0 \end{cases}$$

Théorème 6

L'application de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathbb{R}$:

$$(f, g) \mapsto \int_{[a,b]} fg$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}(I)$.

Démonstration

- La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale ; pour toutes fonctions f_1, f_2, g continues sur $[a, b]$ et tous réels α_1, α_2 :

$$\int_{[a,b]} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)g = \alpha_1 \int_{[a,b]} f_1 g + \alpha_2 \int_{[a,b]} f_2 g$$

et

$$\int_{[a,b]} g(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \int_{[a,b]} g f_1 + \alpha_2 \int_{[a,b]} g f_2$$

- La symétrie est évidente : pour toutes fonctions f, g continues sur $[a, b]$:

$$\int_{[a,b]} fg = \int_{[a,b]} gf$$

- L'application est définie positive car pour toute fonction f continue sur $[a, b]$:

$$\int_{[a,b]} f^2 \geqslant 0$$

et

$$\int_{[a,b]} f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

d'après le théorème du paragraphe précédent.

Ce produit scalaire permet de mettre en œuvre de nombreuses méthodes issues de la géométrie dans le champ des fonctions continues (orthogonalité, distance euclidienne, projection orthogonale, etc.). Nous développerons ce point dans le chapitre 28 : *Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens.*

4.4 • Inégalité de Cauchy-Schwarz

Nous démontrerons plus tard cette inégalité dans le cadre des espaces vectoriels euclidiens. Restreignons-nous pour le moment au produit scalaire défini dans le paragraphe précédent.

Théorème 7

Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$.

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

Démonstration

Si la fonction f est nulle, l'inégalité est vérifiée, et c'est une égalité.

Supposons f non nulle ; soit λ un réel. Posons :

$$P(\lambda) = \int_{[a,b]} (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_{[a,b]} f^2 + 2\lambda \int_{[a,b]} fg + \int_{[a,b]} g^2$$

Comme $\int_{[a,b]} f^2 \neq 0$, P est un polynôme de degré 2 ; or pour tout réel λ : $P(\lambda) \geqslant 0$. P est un trinôme du second degré qui garde un signe constant : son discriminant est négatif :

$$\Delta' = \left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 - \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2 \leqslant 0$$

d'où l'inégalité cherchée.

Si f et g sont proportionnelles, soit $f = 0$ et nous avons déjà remarqué que l'inégalité est une égalité, soit il existe un réel k tel que $g = kf$; dans ce cas :

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2 = k^2 \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^2$$

Réciproquement, si l'égalité est vérifiée, soit $f = 0$ et elle est proportionnelle à g, soit le trinôme P a un discriminant nul, et donc une racine réelle λ_0 :

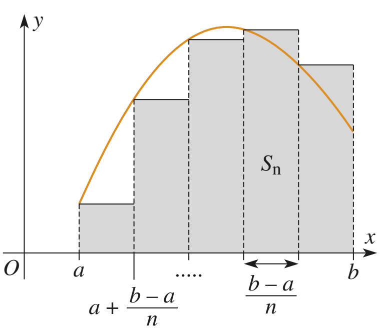
$$P(\lambda_0) = \int_{[a,b]} (\lambda_0 f + g)^2 = 0$$

d'où l'on déduit, puisque $\lambda_0 f + g$ est continue : $\lambda_0 f + g = 0$, soit $g = -\lambda_0 f$: les fonctions f et g sont proportionnelles.

5 Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$ et n un entier strictement positif. Partagons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur à l'aide de la subdivision : $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. On appelle somme de Riemann correspondant à cette subdivision la somme (*Doc.* 10) :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$



Doc. 10 Sommes de Riemann.

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 8

La suite des sommes de Riemann d'une fonction f continue sur $[a, b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_{[a,b]} f$$

Signalons seulement que la démonstration consiste à interpréter une somme de Riemann comme l'intégrale d'une fonction φ en escalier sur $[a, b]$, et à majorer la différence $|f - \varphi|$ sur $[a, b]$.

L'*exercice* 11 propose une démonstration dans le cas où f est monotone sur $[a, b]$.

On peut aussi choisir pour somme de Riemann la somme :

$$S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Ce théorème peut servir dans les deux sens :

- pour calculer une intégrale (ou une valeur approchée) à partir des sommes de Riemann ;
- pour trouver la limite d'une suite, en l'interprétant comme une somme de Riemann d'une certaine fonction.

APPLICATION 1

Limite d'une suite interprétée comme une somme de Riemann

Calculer la limite de la suite $S_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$.

On peut écrire :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

Sous cette forme, on reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, partagé en n intervalles de même longueur. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2$$

Pour s'entraîner : ex. 9 et 10

APPLICATION 2

Calcul d'une intégrale par les sommes de Riemann

Calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt$$

à l'aide de ses sommes de Riemann, pour :

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}.$$

On remarque que, pour $x \notin \{-1, 1\}$:

$$x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t > 0.$$

La fonction $t \mapsto \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ est donc définie et continue sur $[0, 2\pi]$.

$I(x)$ est la limite de la suite :

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)$$

$$= \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right)$$

$$= \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right)$$

Or $\prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ est le polynôme unitaire de degré n dont les racines sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité : c'est $(x^n - 1)$. Il en est de même de :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

D'où :

$$S_n = \frac{2\pi}{n} \ln(x^n - 1)^2 = \frac{4\pi}{n} \ln|x^n - 1|$$

- Si $|x| > 1$,

$$\ln|x^n - 1| = \ln|x^n| + \ln\left|1 - \frac{1}{x^n}\right| \sim \ln|x^n|$$

au voisinage de $+\infty$. Dans ce cas, $S_n \sim 4\pi \ln|x|$, d'où $I(x) = 4\pi\ln|x|$.

- Si $|x| < 1$, $|x^n - 1|$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Dans ce cas, $I(x) = 0$.

6 Extension aux fonctions à valeurs complexes

6.1 • Intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment

Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes définie sur le segment $[a, b]$. On peut lui associer les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$, à valeurs réelles, telles que : $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

Des propriétés des limites des fonctions à valeurs complexes, on déduit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. On définit dans ce cas l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f$$

6.2 • Propriétés

Les propriétés de l'intégrale qui ne font pas référence à la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ restent vraies pour l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, notamment :

- Linéarité :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad \int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$$

- Additivité des intervalles : si $c \in]a, b[$,

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[b,c]} f$$

Attention : Une fonction à valeurs complexes continue sur un segment n'atteint pas nécessairement sa valeur moyenne. Par exemple, la fonction $t \mapsto e^{it}$ a une valeur moyenne nulle sur $[0, 2\pi]$, mais elle ne prend jamais la valeur 0.

La propriété de croissance n'a plus de sens pour une fonction à valeurs complexes. Cependant, le résultat suivant demeure :

Théorème 9

Soit f une fonction à valeurs complexes continue par morceaux sur le segment $[a, b]$;

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

Le module de l'intégrale est inférieur ou égal à l'intégrale du module.

Démonstration

Écrivons l'intégrale de f sous la forme trigonométrique : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = r e^{i\theta}$.

Considérons la fonction g définie par : $g = e^{-i\theta} f$. On a par conséquent : $\displaystyle\int_{[a,b]} g = r$; cette intégrale est réelle, donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} \operatorname{Re} g = r$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \operatorname{Im} g = 0$.

On sait majorer la valeur absolue de l'intégrale de la fonction réelle $\operatorname{Re} g$:

$\left|\int_{[a,b]} \operatorname{Re} g\right| \leqslant \int_{[a,b]} |\operatorname{Re} g|$. Or $|\operatorname{Re} g| \leqslant |g|$, d'où : $r \leqslant \int_{[a,b]} |g|$. Comme $|g| = |f|$, on a bien montré que $r \leqslant \int_{[a,b]} |f|$, c'est-à-dire :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

L'inégalité de la moyenne reste valable pour des fonctions à valeurs complexes continues par morceaux sur $[a, b]$:

$$\left|\int_{[a,b]} f\,g\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

MÉTHODE

- Pour établir des propriétés (limites, continuité, dérivabilité) de fonctions définies par une intégrale que l'on ne sait pas calculer,

  on peut utiliser les propriétés générales de l'intégration : linéarité, croissance, additivité des intervalles *(cf. exercices* 3 *à* 7).

- Pour calculer la limite d'une suite,

  on peut parfois l'interpréter comme une suite de sommes de Riemann d'une fonction sur un intervalle *(cf. Application* 1 *et exercice* 10).

Exercice résolu

LEMME DE LEBESGUE

Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0$$

1. *pour une fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$,*
2. *pour une fonction f en escalier sur $[a, b]$,*
3. *pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.*

Conseils

Les méthodes de démonstration vont être très différentes suivant les hypothèses imposées à la fonction f. L'intégration par parties n'est possible que si f est de classe C^1.

Ici, il faut utiliser une subdivision adaptée à la fonction en escalier f.

Solution

1) Supposons f de classe C^1 sur $[a, b]$. On peut intégrer par parties :

$$\begin{cases} u'(t) = \sin nt & u(t) = -\dfrac{1}{n}\cos nt \\ v(t) = f(t) & v'(t) = f'(t) \end{cases}$$

$$\int_a^b f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\left[f(t)\cos nt\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t) \cos nt \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(f(a)\cos na - f(b)\cos nb\right) + \int_a^b f'(t) \cos nt \, \mathrm{d}t\right)$$

Or :
$$|f(a)\cos na - f(b)\cos nb| \leqslant |f(a)| + |f(b)|$$

et :
$$\left|\int_a^b f'(t) \cos nt \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t$$

Ces deux termes sont bornés, donc $\int_a^b f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Supposons f en escalier sur $[a, b]$. La fonction $t \mapsto f(t)\sin nt$ est alors continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $(x_0, \cdots, x_p)$ une subdivision adaptée à f :

$$\forall i \in [\![0, p-1]\!] \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[\quad f(x) = y_i$$

$$\int_a^b f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1} y_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nt \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1} y_i \left(\cos n x_i - \cos n x_{i+1}\right)$$

D'où :
$$\left|\int_a^b f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p-1} 2\,|y_i|$$

Et, par conséquent :
$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t = 0$$

Une fonction continue par morceaux peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier.

3) Supposons maintenant f continue par morceaux sur $[a, b]$. La fonction $t \mapsto f(t) \sin nt$ est aussi continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$; pour ε' que l'on choisira ultérieurement, il existe une fonction en escalier φ telle que $\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon'$.

$$\left| \int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}\,t - \int_a^b \varphi(t) \sin nt \,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| \,\mathrm{d}\,t \leqslant \varepsilon' (b - a)$$

D'où : $\left| \int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant \left| \int_a^b \varphi(t) \sin nt \,\mathrm{d}\,t \right| + \varepsilon' (b - a)$

On choisit $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. D'après le **2)**, il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \left| \int_a^b \varphi(t) \sin nt \,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où :

$$\left| \int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant \varepsilon$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f(t) \sin nt \,\mathrm{d}\,t = 0$.

Pour s'entraîner : ex. 8

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une fonction est en escalier sur un segment si et seulement si ce segment est une réunion d'intervalles sur chacun desquels la fonction est constante.

b) Une fonction qui n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.

c) Toute fonction continue par morceaux sur un segment peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier.

d) Toute fonction que l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.

e) Toute fonction en escalier sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.

f) Toute fonction continue par morceaux sur un segment possède des primitives sur ce segment.

g) Toute fonction qui possède des primitives sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.

h) Si une fonction f est continue sur un segment I, la suite des sommes de Riemann de f converge vers l'intégrale de f sur I.

Fonctions continues par morceaux

2 Construire une fonction f croissante sur $[0, 1]$ et non continue par morceaux.

3 Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que les fonctions f et g sont nulles sur $[0, 1]$.

4 Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$

5 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1) En utilisant la concavité de la fonction logarithme, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\setminus\{1\} \quad \forall t \in [1, x^2] \qquad \frac{2\ln x}{x^2-1}(t-1) \leqslant \ln t \leqslant t-1$$

2) En déduire que f admet une limite finie au point 1.

3) Montrer que la fonction f, prolongée par continuité en 1, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

4) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 1.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \forall x > 0 \quad f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f' est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Toute fonction admettant des primitives est-elle continue par morceaux ?

Toute fonction continue par morceaux admet-elle des primitives ?

7* Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le réel :

$$I_n = \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

Montrer que la suite (I_n) converge vers : $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

8 **1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\int_0^{\pi} (ax + bx^2)\cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$$

2) En déduire la limite quand p tend vers $+\infty$ de la somme $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2}$.

On se servira du lemme de Lebesgue (voir Exercice résolu).

Sommes de Riemann

9 Calculer, sans utiliser de primitives, les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$; **b)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$; **c)** $\displaystyle\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t$; **d)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t$.

10 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$;

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\cdots+\sqrt[n]{2^n}\right)$;

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}.$

11* Soit f une fonction continue par morceaux et croissante sur $[a,b]$. On considère les sommes de Riemann :

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

et

$$S'_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

1) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n\leqslant\int_{[a,b]}f\leqslant S'_n.$$

2) Calculer S'_n-S_n.

3) En déduire que les suites S_n et S'_n convergent vers :

$$\int_{[a,b]}f.$$

4) Généraliser au cas d'une fonction décroissante, puis au cas d'une fonction monotone par morceaux sur $[a,b]$ (c'est-à-dire qu'il existe une partition finie de $[a,b]$ en intervalles sur chacun desquels la fonction est monotone).

Exercices posés aux oraux des concours

12 (Petites Mines 2003)

Soit $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$

1) Donner l'ensemble de définition de f, montrer qu'elle est prolongeable par continuité en 0.

2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. Est-elle de classe C^1 ?

3) Montrer que la droite $y=x$ est asymptote à la courbe de f.

13 (Mines 2007)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$.

1) Montrer que :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\ln u_n\leqslant\frac{\ln(n+1)}{n}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x$$

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

20 Intégrales et primitives d'une fonction continue

INTRODUCTION

Dans le cas des fonctions continues sur un intervalle, l'intégrale définie au chapitre précédent permet de prouver l'existence de primitives ; réciproquement, la connaissance d'une primitive permet de calculer des intégrales.
Il n'existe malheureusement pas de moyen systématique de trouver une primitive d'une fonction continue. Nous nous contenterons de combiner les deux techniques connues : intégration par parties et changement de variable, pour tenter, lorsque c'est possible, d'exprimer une primitive à l'aide des fonctions usuelles.

OBJECTIFS

- Démontrer l'existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Exploiter le lien entre primitives et intégrale d'une fonction continue sur un segment.
- Calculer primitives et intégrales à l'aide d'intégrations par parties et de changements de variables.

1 Primitives et intégrale d'une fonction continue

1.1 • Primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction continue d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable dont la dérivée est f.

Attention : Il existe des fonctions continues par morceaux qui ne sont la dérivée d'aucune fonction (par ex : Partie entière) ; la définition d'une primitive ne peut être étendue sans changement au cas des fonctions continues par morceaux.

Si F est une primitive de f, alors toute fonction de la forme $x \mapsto F(x) + c$ est encore une primitive de f. La réciproque est vraie **sur un intervalle**, en effet :

F_1 et F_2 étant deux primitives d'une même fonction sur une partie D de $\mathbb{R}$, constituée d'une réunion d'intervalles, la fonction $F_1 - F_2$ a une dérivée nulle sur D : elle est constante sur chaque intervalle de D. Par conséquent, dès que l'on connaît une primitive F de f sur D, on connaît l'ensemble de ses primitives, qui est l'ensemble des fonctions $F + C$ où C est une fonction constante sur chaque intervalle de D.

Exemple : Sachant que $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des primitives de cette fonction est l'ensemble des fonctions F de la forme :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^* & F(x) = \ln(-x) + c_1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & F(x) = \ln(x) + c_2 \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires.

1.2 • Théorème fondamental

Théorème 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un point de I. La fonction :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Pour toute primitive F de f sur I :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

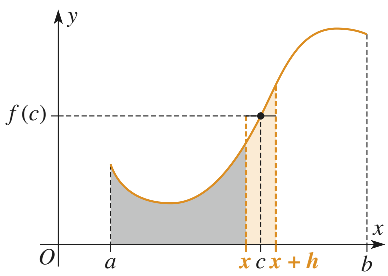
Démonstration

Désignons par φ la fonction définie sur I par :

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in I$. Montrons que φ est dérivable en x. Pour tout réel h non nul tel que $x + h \in I$,

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Doc. 1 Dérivée de φ.

C'est la valeur moyenne de f sur $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si $h<0$), et comme f est continue, elle est atteinte (*Doc.* 1) ; il existe un réel c strictement compris entre x et $x+h$ tel que :

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=f(c)$$

Lorsque h tend vers 0, c tend vers x, et comme f est continue, $f(c)$ tend vers $f(x)$. D'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=f(x)$$

Ce qui signifie que φ est dérivable et que sa dérivée est f ; φ est donc une primitive de f sur I. Il est clair qu'elle s'annule en a.
Toute primitive F de f sur I diffère de φ d'une constante :

$$\forall x \in I \quad F(x)=\varphi(x)+C$$

En particulier, $F(a)=C$, d'où :

$$\forall x \in I \quad \varphi(x)=F(x)-F(a)$$

Il en résulte que φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
En particulier, pour toute fonction f de classe C^1 sur I :

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

1.3 • Application aux calculs d'intégrales

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment se ramène donc, chaque fois que c'est possible, à la recherche des primitives de cette fonction. Si F est une primitive de f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b$$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x$:

On sait que $1+\tan^2 x$ est la dérivée de $\tan x$; $\tan^2 x$ est donc la dérivée de $\tan x - x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

Contrairement aux calculs de dérivées, il n'existe pas de moyen systématique pour trouver les primitives d'une fonction continue. Dans certains cas, l'expression des primitives peut être très compliquée ; il se peut même qu'aucune primitive ne puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles : il faut alors définir de nouvelles fonctions (c'est ce que nous avons fait dès le début de l'année en définissant le logarithme népérien comme la primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1).

Par commodité, on note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ l'ensemble des primitives de la fonction f ; il ne faut pas oublier qu'une telle primitive n'est définie qu'à une constante près.

Exemple : Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\displaystyle\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x - x + C$.

2 Calculs de primitives

2.1 • Primitives usuelles

Commençons par relever toutes les primitives simples que l'on peut obtenir en lisant à l'envers un tableau de dérivées.

intervalle	fonction	primitive
$\mathbb{R}_+^*$	x^m $(m \neq -1)$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	$e^{\lambda x}$ $(\lambda \neq 0)$	$\dfrac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C$
$\mathbb{R}$	a^x $(a>0$ et $a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a} a^x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos \omega x$ $(\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega} \sin \omega x + C$
$\mathbb{R}$	$\sin \omega x$ $(\omega \neq 0)$	$-\dfrac{1}{\omega} \cos \omega x + C$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ou $1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$]0, \pi[$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x} + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} \omega x$ $(\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega x + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} \omega x$ $(\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega} \operatorname{ch} \omega x + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ou $1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x + C$
$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}^*+$	$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\dfrac{1}{\operatorname{th} x} + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{Arctan} x + C$
$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Argth} x + C$
$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x + C$
$]1, +\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Argch} x + C$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Argsh} x + C$

2.2 • Transformations d'expressions

Pour obtenir les primitives d'une fonction continue f, il faut souvent transformer judicieusement l'expression de $f(x)$.

Exemples :

- Linéariser un polynôme trigonométrique : calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$

D'où :

$$\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}$$

- Utiliser la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, ce qui nous conduira à intégrer un polynôme et des termes en :

– $\dfrac{1}{(x-\alpha)^m} = (x-\alpha)^{-m}$,

– ou $\dfrac{2x}{(x^2+a^2)^m}$, de la forme $u'(x)u^{-m}(x)$,

– ou encore $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^m}$ comme nous le verrons dans l'Application 1.

Exemples :

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}dx$. Pour calculer la partie entière de la fraction rationnelle $\dfrac{X^3}{X+2}$, effectuons une division euclidienne :

$$x^3 = (x^2 - 2x + 4)(x+2) - 8$$

d'où : $\dfrac{x^3}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \dfrac{8}{x+2}$;

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln|x+2|\right]_0^1 = \frac{10}{3} + 8\ln\frac{2}{3}$$

2) Calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$.

Pour tout $x \in [2,3]$:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

On en déduit :

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Remarque *: Dans le tableau de primitives du paragraphe 2.1, nous avons donné* Argth x *comme primitive de* $\dfrac{1}{1-x^2}$ *sur l'intervalle* $]-1,1[$. *Cette primitive n'était pas applicable ici et celle que nous avons trouvée est plus générale.*

À RETENIR

Sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$,

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

3) Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

Pour tout $x \in [1, \sqrt{3}]$:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} &= \left(\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|x+1| - \mathrm{Arctan}\,(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{\ln(\sqrt{3}+1)}{2} - \frac{3\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

Pour s'entraîner : ex. 2 à 4

2.3 • Intégration par parties

Théorème 2

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

u, v, u' et v' étant continues sur $[a, b]$, les fonctions $u'v$ et uv' possèdent des primitives sur $[a, b]$. uv est une primitive sur $[a, b]$ de $u'v + uv'$. Donc si F est une primitive de uv', $uv - F$ est une primitive de $u'v$.

Exemples :

- $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$
- $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\,x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

APPLICATION 1

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

Calculer I_0, I_1, et I_{n+1} en fonction de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner I_2 et I_3.

Il est clair que $I_0 = 1$, $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et effectuons une intégration par parties :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = (x^2+1)^{-n} & v'(x) = -2nx(x^2+1)^{-n-1} \end{cases}$$

$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = I_n - I_{n+1}$$

D'où :

$$I_n = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

ce qui équivaut à :

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n},$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n\,2^{n+1}}$$

Ce qui donne :

$$I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \quad ; \quad I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

APPLICATION 2

Intégration par parties généralisée

***1)** Soit u et v deux fonctions de classe C^n sur $[a, b]$. Montrer que :*

$$\int u^{(n)} v = u^{(n-1)} v - u^{(n-2)} v' + \cdots + (-1)^{n-1} u\, v^{(n-1)} + (-1)^n \int u\, v^{(n)}$$

***2)** Exemple : Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,\mathrm{d}x$.*

1) La formule se démontre immédiatement par récurrence.

2)

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x) &= \sin x & u^{(3)}(x) &= -\cos x \\ u^{(2)}(x) &= -\sin x & u'(x) &= \cos x \\ u(x) &= \sin x & v(x) &= x^3 \\ v'(x) &= 3x^2 & v^{(2)}(x) &= 6x \\ v^{(3)}(x) &= 6 & v^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$I = \left[-x^3\cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - 6\sin x\right]_0^{\pi} = \pi^3 - 6\pi$$

On peut calculer de cette façon toutes les primitives de la forme :

$$\int P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int P(x)\cos\beta x\,\mathrm{d}x$$

$$\int P(x)\sin\beta x\,\mathrm{d}x$$

où P est un polynôme.

Pour s'entraîner : ex. 5

2.4 • Changement de variable

Théorème 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et φ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs dans I.

$$\int_a^b f\circ\varphi(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I. La fonction $(f\circ\varphi)\,\varphi'$ est la dérivée de $F\circ\varphi$ et elle est continue sur $[a, b]$ car $\varphi\circ f$ et φ' le sont. Par conséquent :

$$\int_a^b f\circ\varphi(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a)$$

On reconnaît l'intégrale $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque *: Dans la pratique, on pose :*

$$t = \varphi(x) \quad \textit{et} \quad \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Il faut penser à transformer :
- les bornes de l'intégrale ;
- l'expression de la fonction ;
- l'élément différentiel $\mathrm{d}t$.

On peut utiliser la formule dans les deux sens, c'est-à-dire :
- choisir une nouvelle variable fonction de l'ancienne ;
- ou bien exprimer la variable initiale comme une fonction d'une nouvelle variable, dont on précisera l'intervalle de variations.

ATTENTION

Il faut bien vérifier toutes les hypothèses du théorème, en particulier que la fonction φ utilisée soit bien de classe C^1 sur tout le segment $[a, b]$.
Trouver l'erreur dans le calcul suivant (vu dans un oral de concours !) :
On demande de calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x};$$

remarquant que :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\dfrac{1}{1+\tan^2 x}} = \int_0^{\pi} \frac{(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x},$$

le candidat pose $t = \tan x$, d'où $\mathrm{d}t = (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$; il obtient donc :

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan\pi} \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = 0 \quad ??$$

ce qui est manifestement faux puisqu'on intègre une fonction continue strictement positive...

Exemples :

■ Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$.

Posons $t = \mathrm{e}^x$, d'où $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

(Ici, φ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, qui est bien de classe C^1 sur $[0, 1]$.)

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[2\operatorname{Arctan} t\Big]_1^{\mathrm{e}} = 2\operatorname{Arctan}\mathrm{e} - \frac{\pi}{2}$$

■ Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Posons $t = \sin x$ avec $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, d'où $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

(Ici, φ est la fonction $x \mapsto \sin x$, qui est bien de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Pour s'entraîner : ex. 6 à 8

APPLICATION 3

Changement de variable affine

Un simple changement de variable affine peut être utile pour :

- *Exploiter la périodicité et les symétries de la fonction.*

  Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x.$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$ est impaire et périodique de période 2π ; effectuons le changement de variable $t = 2\pi - x$

$$I = \int_{2\pi}^{0} f(2\pi - t)(-\mathrm{d}t) = -\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = -I$$

D'où $I = 0$.

- *Se ramener à une primitive connue. (Cet exemple, important, est à retenir...)*

  Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ *(avec* $a > 0$*).*

Effectuons le changement de variable $t = \dfrac{x}{a}$ d'où $x = at, \mathrm{d}x = a\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \int \frac{a\mathrm{d}t}{a^2t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\, t + C$$

Soit :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\, \frac{x}{a} + C$$

On a de même :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Argth}\, \frac{x}{a} + C \quad \text{sur }]-a, a[$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\text{sur }]-\infty, -a[,\ ]-a, a[,\ ]a, +\infty[$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\, \frac{x}{a} + C \quad \text{sur }]-a, a[$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{Argch}\, \frac{x}{a} + C \quad \text{sur }]a, +\infty[$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \mathrm{Argsh}\, \frac{x}{a} + C \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Pour s'entraîner : ex. 9 et 10

APPLICATION 4

Primitives de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Les primitives de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$ (quotients de polynômes trigonométriques) peuvent souvent se calculer par changement de variable. Pour trouver un changement de variable intéressant, on examine les transformations qui laissent invariante la différentielle $f(x)\mathrm{d}x$ et on prend une nouvelle variable elle-même invariante par cette transformation.

- Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$, on prend pour variable $u = \cos x$.
- Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on prend pour variable $u = \sin x$.
- Si $f(x)\mathrm{d}x$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$, on prend pour variable $u = \tan x$, sur des intervalles ne contenant pas de valeur de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
- Dans tous les cas, on peut prendre pour variable $u = \tan \dfrac{x}{2}$ sur des intervalles ne contenant pas de valeur de la forme $\pi + 2k\pi$.

Exemples :

- $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

$\dfrac{dx}{\sin x}$ est invariant quand on change x en $-x$: on pose $u = \cos x$ (de classe C^1 sur $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$), d'où $du = -\sin x \, dx$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos^2 x} = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-du}{1 - u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{2}\ln 3$$

■ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \sin x}$

Aucune des règles d'invariance ne s'applique : on pose $u = \tan\dfrac{x}{2}$ (de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$),

d'où :

$$du = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx, \quad \text{ou} \quad dx = \frac{2\,du}{1 + u^2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{2\,du}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{u^2 + u + 1}$$

$$I = \int_0^1 \frac{du}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\,\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Rappel :

pour $t = \tan\dfrac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \; ; \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \; ; \; \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

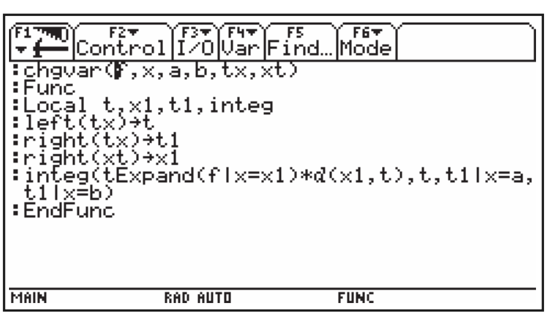
Pour s'entraîner : ex. 11 à 13

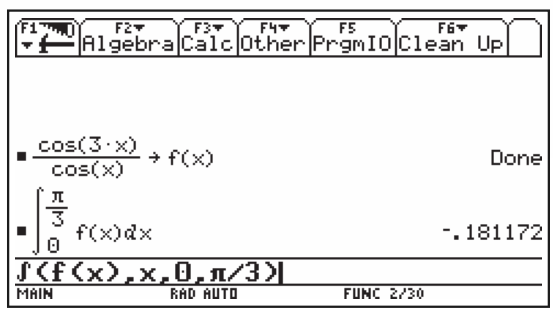
APPLICATION 5

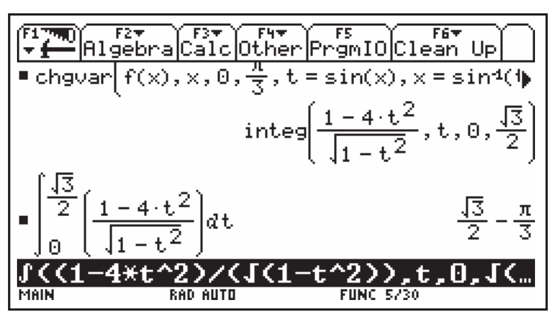
Un programme pour effectuer un changement de variable sur la calculatrice

Le programme suivant permet d'effectuer un changement de variable. Les paramètres à fournir sont :

- l'expression de la fonction, par exemple `cos(3x)/cos(x)` ;
- le nom de la variable, par exemple `x` ;
- les bornes, par exemple `0, π/3` ;
- la nouvelle variable en fonction de l'ancienne, par exemple : `t=sin(x)` ;
- l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, par exemple : `x=sin⁻¹(t)`.







Le résultat s'écrit : `integ(g(t),t,u,v)` qui donne la nouvelle intégrale. Pour la calculer, il suffira de remplacer le mot `integ` par le symbole $\int$:

Ici, le changement de variable a permis de calculer exactement une intégrale que la calculatrice ne savait calculer que de façon approchée.

MÉTHODE

Pour chercher les primitives d'une fonction continue, on peut :

- décomposer la fonction en une somme de fonctions plus simples, par exemple :
  – linéariser un polynôme trigonométrique,
  – décomposer en éléments simples une fraction rationnelle (*cf. exercices* 2 à 4) ;
- intégrer par parties, éventuellement plusieurs fois (*cf. exercice* 5) ;
- effectuer un changement de variables judicieux (*cf. exercices* 6 à 8).

Pour calculer l'intégrale sur le segment $[a, b]$ d'une fonction continue dont on ne connaît pas de primitive, il peut être intéressant d'effectuer le changement de variable $t = a + b - x$ qui échange les deux bornes ; on peut obtenir une équation vérifiée par l'intégrale. (*cf. exercices* 9 et 10)

Pour obtenir une relation de récurrence vérifiée par une intégrale dépendant d'un entier, on peut souvent utiliser une intégration par parties. (*cf. exercices* 15 à 17)

Exercice résolu

INTÉGRALES DE WALLIS

On considère la suite (I_n) *définie par* $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx.$

1 *Calculer* I_0 *et* I_1.

2 *Montrer que la suite* (I_n) *converge.*

3 *Établir une formule de récurrence liant* I_n *et* I_{n-2}.

4 *Montrer que le produit* $(n+1)I_nI_{n+1}$ *est constant.*

5 *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n\sqrt{n}$.

6 *Calculer* I_{2n} *et* I_{2n+1} *sous forme de produits et en déduire une suite de rationnels convergeant vers* π.

Conseils

Toute suite monotone bornée converge.

Les relations de récurrence sur les suites d'intégrales s'obtiennent souvent par intégration par parties.

Solution

1) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1.$

2) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\sin x - 1)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$. La suite (I_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

3) Intégrons I_n par parties pour $n \geqslant 2$:

$$u'(x) = \sin x \qquad u(x) = -\cos x$$
$$v(x) = \sin^{n-1} x \qquad v'(x) = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x$$

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x$$
$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

D'où :

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

4) En multipliant les deux membres de cette égalité par I_{n-1}, on obtient : $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$, ce qui exprime que la suite (nI_nI_{n-1}) est constante, égale à $I_0I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

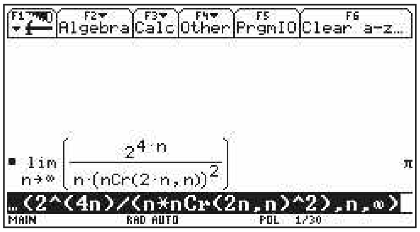
5) Si la limite de la suite (I_n) n'était pas nulle, $(n+1)I_nI_{n+1}$ tendrait vers l'infini. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Penser à réutiliser le sens de variation de la suite.

D'autre part, (I_n) étant décroissante, $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_n}{I_n}$, c'est-à-dire : $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

Par conséquent, $I_{n+1} \sim I_n$, d'où $nI_n^2 \sim (n+1)I_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$. On en conclut $\lim\limits_{n\to\infty} I_n\sqrt{n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

La TI-92/Voyage 200 confirme le calcul.



6) $$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} 2(2n+1)I_{2n+1}^2 = \pi$, on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{4n}}{n\dbinom{2n}{n}^2} = \pi.$

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Toute fonction qui possède des primitives sur un intervalle I est continue sur I.

b) Deux primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}^*$ diffèrent d'une constante.

c) Si f est une fonction continue positive sur un intervalle I,

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

d) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

e) En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, on peut écrire :

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}, \text{ ce qui revient à } \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \text{ ?!}$$

f) Toute primitive d'une fonction rationnelle est rationnelle.

g) Si on connaît des primitives de deux fonctions, on peut connaître une primitive de leur produit.

Primitives des fonctions usuelles

2 Calculer les intégrales :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+3}\mathrm{d}x$; **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-4x^2}}$;

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1)^2\mathrm{d}x$; **d)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

e) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^4-9}}\mathrm{d}x$; **f)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4-4}$.

3 Calculer pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t + \sin t} \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t + \sin t}$$

4 Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$; **b)** $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$; **c)** $\displaystyle\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$.

Intégration par parties

5 Calculer à l'aide d'une intégration par parties les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$; **b)** $\displaystyle\int \mathrm{Arcsin}\, x\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\, x\,\mathrm{d}x$; **d)** $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int x^2 \sin \alpha x\,\mathrm{d}x$; **f)** $\displaystyle\int x^2 \sin^3 x\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; **h)** $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$;

i) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x$.

Changement de variable

6 Simplifier le calcul des primitives des fonctions rationnelles suivantes, grâce à un changement de variable approprié :

a) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4-x^2-2}$; **b)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^3+1)}$;

c) $\displaystyle\int \frac{x^7\,\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

7 Calculer à l'aide d'un changement de variable :

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$; **b)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\, x}$;

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$; **d)** $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x$;

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{1-x^2}}\mathrm{d}x$; **f)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{2+\cos x}}\mathrm{d}x$.

8 Calculer de deux façons la primitive :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

9 Calculer l'intégrale suivante, grâce à un changement de variable échangeant les deux bornes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$$

10 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(a+b-x) = f(x)$$

Calculer

$$J = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{en fonction de} \quad I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Application : calculer les intégrales :

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}\ ; \qquad J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

11 On considère l'intégrale :

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \sin 2x}$$

1) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)(1+2u)}$.

2) Trouver 3 réels a, b, c tels que pour tout $u \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{1+2u}$$

3) En déduire I .

12 Calculer de deux façons l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$$

13 Calculer les intégrales suivantes, en discutant suivant les valeurs des réels strictement positifs a et b :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x}$$

14 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x \quad (a < b)$$

(On écrira le trinôme $(x-a)(b-x)$ sous la forme canonique, et on s'inspirera de l'exemple 2 du paragraphe 2.4.)

Suites d'intégrales

15 Calculer par récurrence l'intégrale :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

En déduire un encadrement de e.

16 On considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,\mathrm{d}x$$

1) Établir une formule de récurrence.

2) En déduire I_{2p} et I_{2p+1} sous forme de sommes.

17 On considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer que la suite (I_n) est convergente.

2) Établir une formule de récurrence liant I_n et I_{n-1}.

3) Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Intégrales et inégalités

18 Soit f une fonction dérivable strictement croissante sur $[0,a]$ telle que $f(0) = 0$. Soit g la fonction réciproque de f, définie sur $[0, f(a)]$.

1) On pose :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est dérivable, calculer $F'(x)$ et en déduire $F(x)$.

2) Soit u et v deux réels tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant u \leqslant a \\ 0 \leqslant v \leqslant f(a) \end{cases}$$

Montrer que :

$$uv \leqslant \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^v g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Distinguer 3 cas suivant la place de v par rapport à $f(u)$.)

19 Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)\cot \pi x$ admet une limite finie en 0 et en 1.

On désigne par g le prolongement continu de cette fonction sur $[0,1]$, et on considère la fonction $h = fg$.

2) Montrer que h est dérivable sur $]0,1[$ et que :

$$\forall x \in]0,1[\quad h'(x) = 2f'(x)g(x) - \pi\big(f(x)^2 + g(x)^2\big)$$

En déduire que h est de classe C^1 sur $[0,1]$.

3) Montrer que

$$\forall x \in [0,1] \quad h'(x) \leqslant \frac{1}{\pi}f'(x)^2 - \pi f(x)^2$$

4) En déduire que

$$\int_0^1 f'(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant \pi^2 \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Exercices posés aux oraux des concours

20 (Petites Mines 2003)

Calculer $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ admet en $+\infty$ une limite que l'on calculera.

21 (Petites Mines 2003)

Soit $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$. Calculer $\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)^n (t-\beta)^n \, dt$.

22 (Petites Mines 2003)

On pose $I_n(\lambda) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{\lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1} \, dx$.

1) Justifier l'existence de $I_n(\lambda)$ pour $|\lambda| \neq 1$.

2) Montrer que $I_n(-\lambda) = (-1)^n I_n(\lambda)$.

3) En exprimant $\cos(nx) + \cos((n+2)x)$ en fonction de n et x, trouver une relation entre I_{n+2}, I_{n+1} et I_n.

23 (Petites Mines 2003)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $\varphi'' + \varphi = f \quad (E)$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \cos x + \varphi'(0) \sin x + \int_0^x \sin(x-t) f(t) \, dt$$

24 (Petites Mines 2006)

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} \, dx$.

25 (CCP 2006)

Pour tout entier n strictement positif, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

26 (CCP 2006)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2) \, dx$$

1) Montrer que la suite (I_n) converge et trouver sa limite.

2) Trouver un équivalent de I_n.

27 (TPE 2006)

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$, et f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_a^b \frac{f(t) \sin nt}{t} \, dt$$

Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

21 Formules de Taylor Développements limités

INTRODUCTION

Nous avons étudié dans le chapitre 13 une formule de Taylor concernant les polynômes. Elle ne s'applique évidemment pas sans changement à une fonction non polynomiale. Il existe cependant une formule analogue pour les fonctions de classe C^p, *moyennant un terme supplémentaire appelé « reste ». Nous exprimerons d'abord ce reste sous forme d'une intégrale. Nous chercherons ensuite à le majorer, ce qui donne accès à des méthodes très efficaces d'approximation. Nous l'écrirons enfin comme une fonction négligeable devant une puissance de la variable, ce qui permet de calculer très aisément les développements limités des fonctions usuelles, que nous apprendrons à combiner pour obtenir des développements limités de fonctions composées. C'est en* 1715 *que Brook Taylor publia pour la première fois la formule à laquelle son nom reste attaché. Les développements limités lui sont antérieurs, même s'ils ne sont pas toujours formulés avec rigueur. En particulier, le célèbre « binôme de Newton » désigne le développement limité de* $(1 + x)^\alpha$ *au voisinage de* 0, *pour des valeurs de* α *qui ne sont pas nécessairement entières, généralisant ainsi la simple formule du binôme.*

OBJECTIFS

- Étudier différentes formes de la formule de Taylor et leurs applications.
- Appliquer la formule de Taylor-Young pour découvrir les développements limités usuels.
- S'entraîner au calcul de développements limités de fonctions composées.
- Utiliser les développements limités dans les calculs de limite et dans l'étude des courbes.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

ORTHOGRAPHE

Conformément au programme officiel, nous écrivons « reste intégral » où « intégral » est un adjectif comme dans « calcul intégral ». Certains préfèrent écrire « reste intégrale » où « intégrale » est un substantif.

Théorème 1

Soit $p \in \mathbb{N}$, f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, de classe C^{p+1} sur un intervalle I, et a un élément de I.

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\, \mathrm{d}\, t$$

Cette égalité est appelée formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p.

Démonstration

Raisonnons par récurrence sur l'entier p.

- $p = 0$: pour toute fonction f de classe C^1 :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}\, t$$

par définition de l'intégrale de la fonction continue f'.

- Soit p un entier naturel vérifiant la propriété et soit f une fonction de classe C^{p+2} sur I. *A fortiori*, f est de classe C^{p+1}, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\, \mathrm{d}\, t$$

Calculons par parties la dernière intégrale :

$$\begin{cases} u'(t) = \dfrac{(x-t)^p}{p!} & u(t) = -\dfrac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} \\ v(t) = f^{(p+1)}(t) & v'(t) = f^{(p+2)}(t) \end{cases}$$

(On vérifie que u et v sont de classe C^1 sur I.)

$$\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\, \mathrm{d}\, t = \left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)\, \mathrm{d}\, t$$

$$= \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t)\, \mathrm{d}\, t$$

On obtient bien la formule cherchée au rang $p+1$.

La propriété est donc établie pour tout entier naturel p.

Brook Taylor : mathématicien britannique (1685-1731).
Il s'intéressa à de multiples questions scientifiques : mouvement d'un projectile, trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu hétérogène. C'est en 1715 qu'il propose le développement d'une fonction au voisinage d'un point.

En posant $x = a + h$ et en effectuant le changement de variable $u = t - a$, on obtient :

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + h^p \frac{f^{(p)}(a)}{p!} + \int_0^h \frac{(h-u)^p}{p!} f^{(p+1)}(a+u)\, \mathrm{d}\, u$$

Exemples :

$$\mathrm{e}^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^p}{p!} + \int_0^h \frac{(h-u)^p}{p!} \mathrm{e}^u\, \mathrm{d}\, u$$

$$\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{h^{2p-1}}{(2p-1)!} + \int_0^h \frac{(h-u)^{2p-1}}{(2p-1)!} \sin\left(u + p\pi\right)\, \mathrm{d}\, u$$

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{h^{2p}}{(2p)!} + \int_0^h \frac{(h-u)^{2p}}{(2p)!} \cos\left(u + (2p+1)\frac{\pi}{2}\right)\, \mathrm{d}\, u$$

APPLICATION 1

Encadrement de la fonction sinus

Démontrer que :

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Écrivons la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction sinus à l'ordre 3, puis à l'ordre 4 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + I_3(x),$$

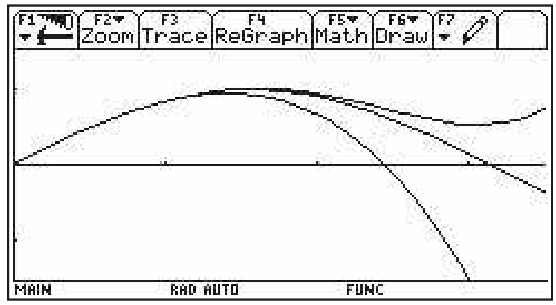
avec $\quad I_3(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin t \; \mathrm{d}\, t.$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + I_4(x),$$

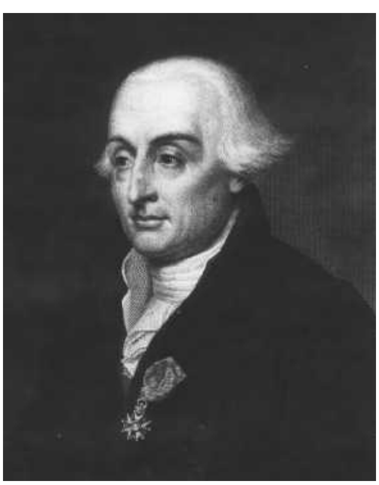
avec $\quad I_4(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos t \; \mathrm{d}\, t$

$x \in [0, \pi]$, donc $I_3(x) \geqslant 0$.

$$I_4(x) \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} |\cos t| \; \mathrm{d}\, t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \; \mathrm{d}\, t = \frac{x^5}{120}$$



D'où : $\qquad 0 \leqslant \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \leqslant \dfrac{x^5}{120}.$



Louis Lagrange : mathématicien français (1736-1813).
Auteur de très nombreux et importants travaux sur les séries, les équations différentielles, la théorie des nombres, les équations algébriques, les groupes.
Créateur de la mécanique analytique.

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Dans la pratique, on cherche surtout à majorer le reste intégral de la formule de Taylor.

Théorème 2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, de classe C^{p+1} sur un intervalle I, et a un élément de I. Si $\quad \forall t \in I \quad |f^{(p+1)}(t)| \leqslant M$, alors :

$$\forall x \in I \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Démonstration

- Si $x \geqslant a$:

$$\left| \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) \; \mathrm{d}\, t \right| \leqslant \int_a^x \left| \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) \right| \mathrm{d}\, t$$

$$\leqslant M \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \; \mathrm{d}\, t \leqslant M \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}$$

Pour $p = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis :
si $\forall t \in I \quad |f'(t)| \leqslant M$,
alors $|f(x) - f(a)| \leqslant M\,|x - a|$.

- Si $x < a$:

$$\left|\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^a \left|\frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\right|\ \mathrm{d}t$$

$$\leqslant M \int_x^a \frac{(t-x)^p}{p!}\ \mathrm{d}t \leqslant M\frac{(a-x)^{p+1}}{(p+1)!}$$

Dans tous les cas, le reste est majoré en valeur absolue par $M\dfrac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$.

Pour s'entraîner : ex. 2 à 5

3 Développements limités

3.1 • Généralités

En abrégé, **D.L.**

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, définie sur un intervalle I et a un élément ou une borne de I. Soit $n \in \mathbb{N}$; on dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \quad \text{au voisinage de } h = 0$$

C'est-à-dire :

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$$

Exemples :

$$\frac{1}{1-h} = \frac{1-h^{n+1}}{1-h} + \frac{h^{n+1}}{1-h} = 1 + h + h^2 + \cdots + h^n + \frac{h^{n+1}}{1-h}$$

Or, au voisinage de 0 : $\dfrac{h^{n+1}}{1-h} = o(h^n)$. D'où :

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \cdots + h^n + o(h^n) \qquad \text{au voisinage de } h = 0$$

De même, en changeant h en $-h$:

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + \cdots + (-1)^n h^n + o(h^n) \qquad \text{au voisinage de } h = 0$$

Remarques :

- *L'existence d'un développement limité d'ordre 0 : $f(a+h) = c_0 + o(1)$ équivaut à l'existence d'une limite en a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c_0$. Si f est définie en a, $c_0 = f(a)$. Sinon, c_0 est la valeur assurant un prolongement continu de f en a.*

- *L'existence d'un développement limité d'ordre 1 : $f(a+h) = c_0 + c_1 h + o(h)$ équivaut à la dérivabilité en a de f ou de son prolongement continu. Le coefficient c_1 est la valeur de la dérivée en a.*

On pourrait penser que l'existence d'un développement limité d'ordre 2 équivaut à l'existence d'une dérivée seconde en a de f ou de son prolongement continu... Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}$$

Comme :

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2) \quad \textit{au voisinage de 0.}$$

f admet donc un D.L. d'ordre 2 en 0. Elle est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement continu $\bar{f}$ est dérivable en 0 :

$$\begin{cases} \forall x \neq 0 \quad \bar{f}'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \\ \bar{f}'(0) = 0 \end{cases}$$

Mais :

$$\frac{\bar{f}'(x) - \bar{f}'(0)}{x} = 2 + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Ce quotient n'a pas de limite en 0 : $\bar{f}$ n'admet pas de dérivée seconde en 0 !

3.2 • Unicité d'un développement limité

Théorème 3

Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point a, ce développement est unique.

L'unicité du développement limité d'une fonction en un point ne doit pas laisser penser qu'un développement limité caractérise entièrement la fonction au voisinage de ce point, comme le montre l'*Application* 2.

Démonstration

Supposons que f admette deux développements limités différents à l'ordre n :

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n) = d_0 + d_1 h + d_2 h^2 + \cdots + d_n h^n + o(h^n)$$

Soit i le plus petit indice tel que $c_i \neq d_i$. On a alors :

$c_i h^i + o(h^i) = d_i h^i + o(h^i)$, d'où $c_i - d_i = o(1)$: contradiction !

APPLICATION 2

Une fonction non nulle dont le D.L. est nul à tout ordre

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. Déterminer le développement limité de f à l'ordre n en 0. En déduire que deux fonctions peuvent admettre le même développement limité à tout ordre en un point sans être égales en aucun point.

Déterminons la limite éventuelle de $\dfrac{f(x)}{x^n}$ en 0.

En posant $X = \dfrac{1}{x^2}$, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \to +\infty} X^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-X} = 0$$

Ce qui signifie, que pour tout entier positif n, $f(x)$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0. Le développement (très) limité de f en 0 est donc :

$$f(x) = o(x^n)$$

La fonction f a le même développement limité à tout ordre que la fonction nulle, bien qu'elle ne s'annule en aucun point (tant qu'on ne la prolonge pas par continuité en 0).

Plus généralement, en ajoutant cette fonction f à une fonction quelconque admettant un développement limité en 0, on obtiendra une fonction admettant exactement le même développement limité.

Ce corollaire n'admet pas de réciproque : si une fonction admet au voisinage de 0 un développement limité pair, fût-ce à tout ordre, elle n'est pas nécessairement paire : la fonction « $o(x^n)$ » n'a aucune raison d'être paire... Il ne faut pas perdre de vue qu'un développement limité au voisinage d'un point a est une propriété ***locale*** qui n'engage la fonction que sur un intervalle aussi petit que l'on veut autour de a, et qu'on ne peut en aucun cas en déduire des propriétés globales de la fonction comme la parité, la monotonie, etc.

Corollaire 3.1

Si une fonction paire (respectivement impaire) admet un développement limité au voisinage de 0, ce développement est pair (respectivement impair).

Démonstration

Soit f une fonction paire admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Comparons les développements limités de $f(x)$ et de $f(-x)$:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + o(x^n)$$
$$f(-x) = c_0 - c_1x + c_2x^2 - c_3x^3 + \cdots + (-1)^n c_nx^n + o(x^n)$$

Grâce à l'unicité d'un développement limité, on peut identifier les coefficients correspondants. Tous les coefficients d'indice impair sont nuls : le développement limité est pair.

Même raisonnement pour une fonction impaire.

3.3 • Intégration terme à terme d'un développement limité

Théorème 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dérivable sur un intervalle I.
Si sa dérivée f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point a de I :

$$f'(a+h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + \cdots + c_nh^n + o(h^n)$$

alors f admet au voisinage de a un développement limité d'ordre $n+1$ obtenu en intégrant terme à terme celui de f' :

$$f(a+h) = f(a) + c_0h + c_1\frac{h^2}{2} + c_2\frac{h^3}{3} + \cdots + c_n\frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1})$$

Démonstration

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $J = \{h \in \mathbb{R},\ a+h \in I\}$ par :

$$\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - c_0h - c_1\frac{h^2}{2} - c_2\frac{h^3}{3} - \cdots - c_n\frac{h^{n+1}}{n+1}$$

Il s'agit de démontrer que $\varphi(h)$ est négligeable devant h^{n+1} au voisinage de 0.

La fonction φ est dérivable sur J et :

$$\varphi'(h) = f'(a+h) - c_0 - c_1h - c_2h^2 - \cdots - c_nh^n = o(h^n)$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall h \in J \quad |h| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ |\varphi'(h)| \leqslant \varepsilon |h|^n$$

Pour tout réel t compris entre 0 et h : $|\varphi'(t)| \leqslant \varepsilon|t|^n \leqslant \varepsilon|h|^n$.

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\left|\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}\right| \leqslant \varepsilon |h|^n$$

Or $\varphi(0)=0$, donc $|\varphi(h)| \leqslant \varepsilon |h|^{n+1}$.

On a donc bien $\varphi(h) = o(h^{n+1})$ au voisinage de 0.

La réciproque du théorème est fausse : si une fonction dérivable f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a, sa dérivée n'admet pas nécessairement un développement limité d'ordre $n-1$.
Par exemple, la fonction

$$f : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$$

admet un D.L. d'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$f(x) = o(x^2)$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée f' n'est pas dérivable en 0 (cf. § 3.1), et, par conséquent, f' n'admet pas de développement limité d'ordre 1…
Cependant, **si l'on sait que f' possède un développement limité d'ordre $n-1$** au voisinage de a, on peut l'obtenir en dérivant terme à terme celui de f.

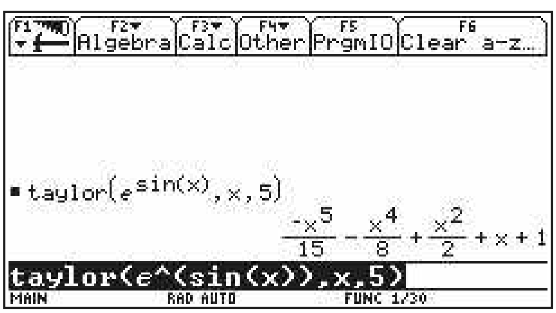
Exemple : En itérant l'intégration terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x)\\
-\cos x &= -1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\
-\sin x &= -x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{, etc.}
\end{aligned}$$

4 Formule de Taylor-Young

4.1 • Développement limité d'une fonction de classe C^p

Le théorème d'intégration terme à terme permet de démontrer que toute fonction de classe C^p possède un développement limité d'ordre p qui n'est autre que son développement de Taylor.



La fonction `taylor(f(x),x,n,a)` donne le développement de Taylor-Young de $f(x)$ à l'ordre n au voisinage de a, sans écrire le terme $o(x^n)$ qu'il faut penser à ajouter. On peut omettre d'indiquer a, la valeur par défaut étant alors 0.

Théorème

Soit $p \in \mathbb{N}$, et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, de classe C^p sur un intervalle I. f possède au voisinage de tout point a de I un développement limité d'ordre p donné par :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}h^p + o(h^p)$$

Cette égalité s'appelle formule de Taylor-Young à l'ordre p.

Démonstration

Raisonnons par récurrence.

- Pour $p=0$, toute fonction de classe C^0 (c'est-à-dire continue) possède un développement limité d'ordre 0 :

$$f(a+h) = f(a) + o(1)$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que toute fonction de classe C^p possède le développement limité d'ordre p annoncé. Soit f une fonction de classe C^{p+1} ; appliquons l'hypothèse de récurrence à sa dérivée f' :

$$f'(a+h) = f'(a) + f''(a)h + \cdots + \frac{f^{(p+1)}(a)}{p!}h^p + o(h^p)$$

Intégrons terme à terme :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}h^{p+1} + o(h^{p+1})$$

Par récurrence, le résultat est donc établi pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.

Pour s'entraîner : ex. 6 et 7

4.2 • Développements limités usuels

Appliquons la formule de Taylor-Young aux fonctions usuelles, dont il est facile de calculer les dérivées successives (tous ces D.L. sont donnés au voisinage de 0) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^p}{p!} + o(x^p)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

Pour tout réel α :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p + o(x^p)$$

On retrouve, pour $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^p x^p + o(x^p)$$

ou, en changeant x en $-x$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^p + o(x^p)$$

En intégrant terme à terme :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} + o(x^p)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^p}{p} + o(x^p)$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Pour s'entraîner : ex. 8 et 9

5 Opérations sur les développements limités

5.1 • Développement limité d'une somme

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, définies sur un intervalle I et admettant chacune un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point a de I.

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$$

$$g(a+h) = d_0 + d_1 h + d_2 h^2 + \cdots + d_n h^n + o(h^n)$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$(f+g)(a+h) = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)h + (c_2+d_2)h^2 + \cdots + (c_n+d_n)h^n + o(h^n)$$

La fonction $f+g$ admet donc un développement limité d'ordre n au voisinage de a, obtenu en ajoutant les développements limités d'ordre n de f et de g.

Exemple : $\sin x + \cos x = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ au voisinage de 0.

5.2 • Développement limité d'un produit

Avec les mêmes hypothèses, multiplions membre à membre les développements limités de f et de g, en négligeant tous les termes de degré supérieur à n :

$$fg(a+h) = c_0d_0 + (c_0d_1 + c_1d_0)h + (c_0d_2 + c_1d_1 + c_2d_0)h^2 + \cdots + \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} h^n + o(h^n).$$

La fonction fg admet donc un développement limité d'ordre n au voisinage de a, obtenu en conservant tous les termes de degré inférieur ou égal à n du produit des développements limités d'ordre n de f et de g.

Exemple :

$$\begin{aligned} e^x(1+\sin x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

5.3 • Développement limité d'une fonction composée

Soit u une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et admettant un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point a de I :

$$u(a+h) = u(a) + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$$

et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, définie sur l'intervalle $u(I)$ et admettant un développement limité d'ordre n au voisinage du point $u(a)$:

$$f(u(a)+k) = d_0 + d_1 k + d_2 k^2 + \cdots + d_n k^n + o(k^n)$$

Posons $k = c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$.

Comme $k = O(h)$, toute fonction négligeable devant k^n est négligeable devant h^n : $o(k^n) \subset o(h^n)$.

Il suffit de calculer les développements limités des puissances de k et de les combiner avec les coefficients (d_i) :

$$\begin{array}{c|cccccccc}
d_0 & 1 & = & 1 & & & & & \\
d_1 & k & = & & c_1 h & +c_2 h^2 & + \cdots & +c_n h^n & +o(h^n) \\
d_2 & k^2 & = & & & c_1^2 h^2 & + \cdots & + \cdots & +o(h^n) \\
\cdots & \cdots & & & & & & & \\
d_n & k^n & = & & & & & c_1^n h^n & +o(h^n) \\
\hline
 & f \circ u(a+h) & = & d_0 & +d_1 c_1 h & + & \cdots & & +o(h^n)
\end{array}$$

Si $c_1 = 0$, il est inutile d'aller jusqu'à k^n : on peut s'arrêter dès que l'on obtient des termes négligeables devant h^n.

Exemple : Calculer le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.
Posons

$$\begin{aligned} k &= \cos x - 1 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6). \end{aligned}$$

Ici, $k = O(x^2)$, donc $o(k^3) = o(x^6)$. Il suffit donc de développer le logarithme à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+k) \\ &= k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} + o(k^3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & k = & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^4}{24} & -\frac{x^6}{720} & +o(x^6) \\
-1/2 & k^2 = & & \frac{x^4}{4} & -\frac{x^6}{24} & +o(x^6) \\
1/3 & k^3 = & & & -\frac{x^6}{8} & +o(x^6) \\
\hline
 & \ln(\cos x) = & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^4}{12} & -\frac{x^6}{45} & +o(x^6)
\end{array}$$

Exemple : Calculer le développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto e^{\sin x}$.

Posons $k = \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$.

$f(x) = e^k = 1 + k + \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{k^3}{6} + \dfrac{k^4}{24} + \dfrac{k^5}{120} + o\left(k^5\right)$. Ici, $k \sim x$, donc $o(k^5) = o(x^5)$.

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
1 & 1 & = & 1 & & & & & & \\
1 & k & = & & x & & -\frac{x^3}{6} & & +\frac{x^5}{120} & +o\left(x^5\right) \\
1/2 & k^2 & = & & & x^2 & & -\frac{x^4}{3} & & +o\left(x^5\right) \\
1/6 & k^3 & = & & & & x^3 & & -\frac{x^5}{2} & +o\left(x^5\right) \\
1/24 & k^4 & = & & & & & x^4 & & +o\left(x^5\right) \\
1/120 & k^5 & = & & & & & & x^5 & +o\left(x^5\right) \\
\hline
 & e^{\sin x} & = & 1 & +x & +\frac{x^2}{2} & & -\frac{x^4}{8} & -\frac{x^5}{15} & +o\left(x^5\right)
\end{array}$$

5.4 • Développement limité d'un quotient

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, définies sur un intervalle I et admettant chacune un développement limité d'ordre n au voisinage d'un point a de I. Supposons, de plus, que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$$

$$g(a+h) = d_0 + d_1 h + d_2 h^2 + \cdots + d_n h^n + o(h^n)\ , \quad \text{avec} \quad d_0 \neq 0$$

$$\frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{d_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}h + \cdots + \frac{d_n}{d_0}h^n + o(h^n)}$$

En posant $k = \dfrac{d_1}{d_0}h + \cdots + \dfrac{d_n}{d_0}h^n + o(h^n)$ et en composant par le développement limité de $\dfrac{1}{1+k}$, on obtiendra le développement limité de $\dfrac{1}{g(a+h)}$ qu'il restera à multiplier par celui de $f(a+h)$.

Exemple :

$\tan x = \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$. Posons $k = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5) = O(x^2)$, donc $O(k^3) = o(x^5)$: il suffit de développer $\dfrac{1}{1+k}$ à l'ordre 2, avec un reste dominé par k^3.

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 + O(k^3)$$

1	$1 = 1$				
-1	$k =$		$-\dfrac{x^2}{2}$	$+\dfrac{x^4}{24}$	$+ o(x^5)$
1	$k^2 =$			$\dfrac{x^4}{4}$	$+ o(x^5)$
	$\dfrac{1}{\cos x} = 1$		$+\dfrac{x^2}{2}$	$+\dfrac{5x^4}{24}$	$+ o(x^5)$

D'où : $\quad \tan x = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Remarque *: Si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, il se peut que le quotient $\dfrac{f}{g}$ admette tout de même un développement limité au voisinage de a (il faut bien sûr que f ait également une limite nulle en a). On peut le calculer en simplifiant d'abord par une même puissance de x les développements limités de f et de g (ce qui a pour effet d'abaisser l'ordre du D.L. obtenu).*

Calculons, par exemple, le développement limité de $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{(-1)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)}$$

Posons :

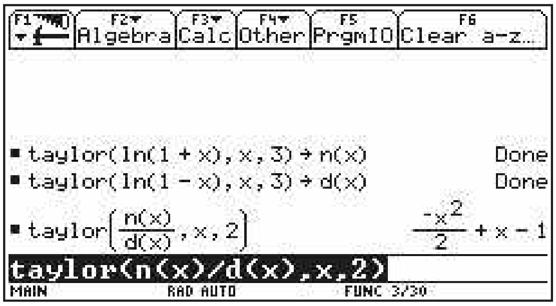
$$k = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 + o(k^2)$$

$$\begin{array}{r|lcccc}
1 & 1 & = 1 & & & \\
-1 & k & = & \frac{x}{2} & + \frac{x^2}{3} & + o(x^2) \\
1 & k^2 & = & & \frac{x^2}{4} & + o(x^2) \\
\hline
 & \frac{1}{1+k} & = 1 & -\frac{x}{2} & -\frac{x^2}{12} & + o(x^2)
\end{array}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \left(-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right)$$

$$= -1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$



La TI-92/Voyage 200 a beaucoup de mal à faire ce genre de calcul. On peut l'aider en décomposant le travail (attention à l'ordre du numérateur et du dénominateur).

Pour s'entraîner : ex. 10

6 Applications des développements limités

6.1 • Calcul de limites

Les développements limités permettent d'obtenir très facilement des équivalents (une fonction possédant un D.L. au voisinage de a est équivalente en ce point au premier terme non nul du D.L.), donc des limites.

APPLICATION 3

Utiliser les D.L. pour calculer une limite

Calculer : $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1 \underset{(0)}{\sim} \frac{x^2}{8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} - 1}{x^2} = \frac{1}{8}$$

Pour s'entraîner : ex. 12

6.2 • Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Si une fonction f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a, celui-ci détermine l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. Si on peut pousser ce D.L. à un ordre supérieur, le premier terme non nul qui suit permet de préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage du point d'abscisse a.

APPLICATION 4

Utiliser un D.L. pour placer une courbe par rapport à sa tangente

Exemple :
$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ *au voisinage de* 0.

$$f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

Posons $k = x + \frac{x^2}{2}$. On a :

$$o(k^3) = o(x^3)$$

$$\ln(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} + o(k^3)$$

$$\begin{array}{r|lllll}
1 & k = & x & +\frac{x^2}{2} & & \\
-1/2 & k^2 = & & x^2 & +x^3 & +o(x^3) \\
1/3 & k^3 = & & & x^3 & +o(x^3) \\
\hline
\multicolumn{2}{r}{\ln(1+k) =} & x & & -\frac{x^3}{6} & +o(x^3)
\end{array}$$

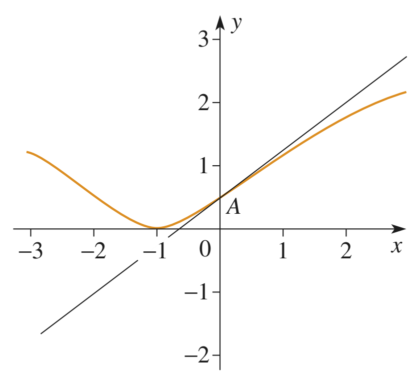
D'où :

$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

La courbe représentative de f admet au point A d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = \ln 2 + x$.

$$f(x) - (\ln 2 + x) \underset{(0)}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

Cette différence est donc positive au voisinage de 0_- et négative au voisinage de 0_+ : la courbe est au-dessus de sa tangente à gauche de A et en dessous à droite de A (*Doc.* 1) (ces considérations n'ont qu'une valeur locale : la courbe peut retraverser cette tangente non loin de A).



Doc. 1

6.3 • Position par rapport à une asymptote

Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on pose $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener à une variable tendant vers 0.

APPLICATION 5

Utiliser un D.L. pour trouver une asymptote et placer la courbe par rapport à cette asymptote

Exemple : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Pour $x \neq 0$, on pose $h = \dfrac{1}{x}$.

$f(x) = F(h) = \dfrac{1}{|h|}\sqrt{1+h+h^2}$.

- Quand x tend vers $+\infty$, h tend vers 0 et $h > 0$;

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h}\sqrt{1+h+h^2} \\ &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{8}h^2+o(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}h+o(h) \end{aligned}$$

d'où :

$$f(x) = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x+\dfrac{1}{2}$.

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{3}{8x}$$

Cette différence est positive au voisinage de $+\infty$: la courbe est au-dessus de son asymptote (*Doc.* 2).

- Quand x tend vers $-\infty$, h tend vers 0 et $h < 0$;

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{h}\sqrt{1+h+h^2} \\ f(x) &= -\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{8}h^2+o(h^2)\right) \\ &= -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}h+o(h) \end{aligned}$$

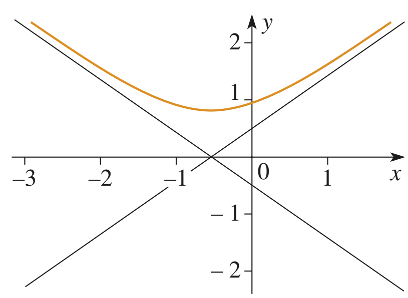
d'où :

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe représentative de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -x-\dfrac{1}{2}$.

$$f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right) \underset{(-\infty)}{\sim} -\frac{3}{8x}.$$

Cette différence est positive au voisinage de $-\infty$: la courbe est au-dessus de son asymptote.



Doc. 2

Pour s'entraîner : ex. 13

6.4 • Tangente en un point d'une courbe paramétrée

Soit $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$ une courbe paramétrée du plan, de classe C^k sur un intervalle I. Soit $t_0 \in I$ une valeur du paramètre. Supposons que f possède au voisinage de t_0 un développement limité de la forme :

$$\vec{f}(t_0+h) = \vec{f}(t_0)+\vec{V_p}\,h^p+\overrightarrow{o(h^p)}$$

où $\vec{V_p} \neq \vec{0}$, alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^p}\left(\vec{f}(t_0+h)-\vec{f}(t_0)\right) = \vec{V_p}$$

La courbe admet donc au point $M(t_0)$ une tangente dirigée par le vecteur $\vec{V_p}$.

Remarque *: Si $p = 1$, on a nécessairement $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{f}'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$; le point $M(t_0)$ est régulier et on retrouve le fait que la tangente est dirigée par le vecteur dérivée $\overrightarrow{f}'(t_0)$.*

Si $p > 1$, le point est stationnaire, et le développement limité nous donne une nouvelle méthode très simple pour trouver la tangente en un point stationnaire si elle existe.

Exemple : Démontrer l'existence d'une tangente au point $t_0 = 2$ à la courbe définie par :

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1} \quad ; \quad y(t) = \frac{t^3+4}{t-1}$$

Effectuons un développement limité d'ordre 2 au voisinage de t_0 :

$$\begin{cases} x(2+h) = \dfrac{(2+h)^2}{1+h} & = (4+4h+h^2)(1-h+h^2+o(h^2)) \\ & = 4+h^2+o(h^2) \\ y(2+h) = \dfrac{(2+h)^3+4}{1+h} & = (12+12h+6h^2+o(h^2))(1-h+h^2+o(h^2)) \\ & = 12+6h^2+o(h^2) \end{cases}$$

soit vectoriellement :

$$\overrightarrow{f}(2+h) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} h^2 + \overrightarrow{o(h^2)}$$

Il existe donc une tangente, dirigée par le vecteur $\overrightarrow{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

6.5 • Position par rapport à la tangente

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, supposons que $\overrightarrow{f}$ possède au voisinage de t_0 un développement limité de la forme :

$$\overrightarrow{f}(t_0+h) = \overrightarrow{f}(t_0) + \overrightarrow{V_p}\, h^p + \cdots + \overrightarrow{V_q}\, h^q + \overrightarrow{o(h^q)}$$

où $\overrightarrow{V_p} \neq \overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{V_q}$ non colinéaire à $\overrightarrow{V_p}$, q étant le plus petit entier pour lequel cette condition est réalisée.

La famille $(\overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$ étant libre, c'est une base du plan. Tous les termes compris entre l'ordre p et l'ordre q sont colinéaires à $\overrightarrow{V_p}$; le terme $\overrightarrow{o(h^q)}$ peut être décomposé sur la base $(\overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$. On obtient donc :

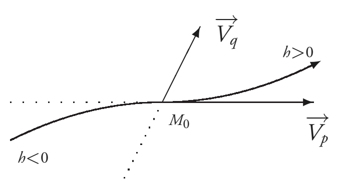
$$\overrightarrow{f}(t_0+h) = \overrightarrow{f}(t_0) + \overrightarrow{V_p}\,(h^p + o(h^p)) + \overrightarrow{V_q}\,(h^q + o(h^q))$$

En désignant par M_0 et M les points $M(t_0)$ et $M(t)$:

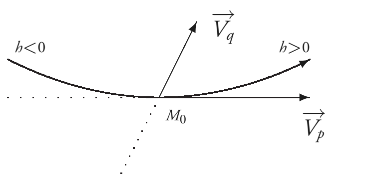
$$\overrightarrow{M_0M} = x_p\,\overrightarrow{V_p} + x_q\,\overrightarrow{V_q} \quad \text{avec} \quad x_p \sim h^p \quad x_q \sim h^q$$

Ceci nous permet de situer la courbe par rapport au repère $(M_0, \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$. Distinguons quatre cas suivant les parités de p et de q :

- ***p* et *q* impairs** (*Doc.* 3)
  x_p et x_q sont du signe de h.
  La courbe traverse donc sa tangente, il s'agit d'un **point d'inflexion**.

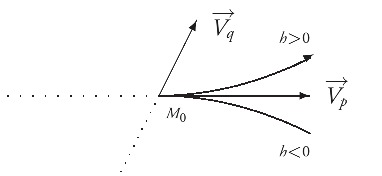


Doc. 3 p et q impairs.



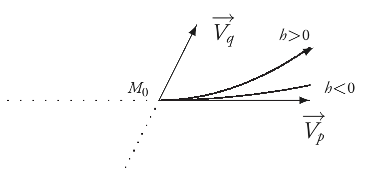
Doc. 4 p impair, q pair.

■ ***p* impair, *q* pair** (*Doc.* 4)
x_p est du signe de h,
mais x_q est toujours positif.
La courbe reste d'un même côté
de sa tangente.
C'est une disposition dite **ordinaire**.
(C'est le cas, par exemple, d'un point birégulier : $(p, q) = (1, 2)$.)



Doc. 5 p pair, q impair.

■ ***p* pair, *q* impair** (*Doc.* 5)
x_p est toujours positif :
il s'agit d'un **point de rebroussement**.
x_q est du signe de h :
la courbe traverse sa tangente,
le rebroussement
est dit **de première espèce**.



Doc. 6 p et q pairs.

■ ***p* et *q* pairs** (*Doc.* 6)
x_p et x_q restent toujours positifs.
C'est encore un point de rebroussement,
mais sans traversée de la tangente.
Le rebroussement est dit **de deuxième espèce**.
Dans ce cas, les deux branches $h < 0$ et $h > 0$ peuvent avoir éventuellement le même support, parcouru alternativement dans les deux sens...

Notons qu'un point de rebroussement est nécessairement stationnaire.

APPLICATION 6

Étude locale en un point d'une courbe paramétrée

Étudier au voisinage de $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ *la courbe paramétrée définie par :*

$$x(t) = \sin t\,(\sqrt{2} - \sin t)\ ;$$

$$y(t) = (\cos t + \sqrt{2})\,(2\cos t + \sin t - 3\sqrt{2})$$

Effectuons un développement limité d'ordre 4 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$:

$$x\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos h + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin h\right)\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos h - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin h\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)\right)$$
$$\left(1 - h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - h^2 + h^3 + \frac{1}{12}h^4 + o(h^4)\right)$$

$$y\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1}{2}\left(\cos h - \sin h + 2\right)$$
$$\left(3\cos h - \sin h - 6\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 - h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 + o(h^4)\right)$$
$$\left(-3 - h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{8}h^4 + o(h^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-9 - 2h^2 + 2h^3 + \frac{2}{3}h^4 + o(h^4)\right)$$

soit vectoriellement :

$$\vec{f}\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} h^2 + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} h^3 + \begin{pmatrix} 1/24 \\ 1/3 \end{pmatrix} h^4 + \overrightarrow{o(h^4)}$$

On a donc :

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{V}_4 = \begin{pmatrix} 1/24 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

(le terme d'ordre 3 est colinéaire à $\vec{V}_2$). Les entiers caractéristiques sont : $p = 2$, $q = 4$; il s'agit d'un point de rebroussement de deuxième espèce.

Pour s'entraîner : ex. 14

MÉTHODE

- Pour encadrer une fonction sur un intervalle, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, ou l'inégalité de Taylor-Lagrange *(cf. Application* 1, *et exercices* 4 *et* 5*)*.

- Pour étudier une fonction au voisinage d'un point (par exemple, pour obtenir une limite en ce point), on peut utiliser la formule de Taylor-Young *(cf. exercices* 6 *et* 7*)*.

- Pour calculer un développement limité d'une fonction simple (facile à dériver), on peut utiliser la formule de Taylor-Young .

- Pour calculer un développement limité plus compliqué, il faut utiliser les développements usuels et appliquer les règles concernant les D.L. de sommes, produits, quotients, fonctions composées, intégration, en restant très attentif à l'ordre de chaque développement limité utilisé *(cf. exercices* 8, 9 *et* 10*)*.

- Pour calculer une limite, il est souvent utile d'effectuer des développements limités à un ordre judicieusement choisi – généralement assez petit *(cf. Application* 4 *et exercice* 12*)*.

- Pour étudier la position d'une courbe par rapport à une tangente ou une asymptote en un point, on peut utiliser un développement limité en ce point *(cf. Applications* 5 et 6, *et exercice* 13*)*.

- Pour étudier localement une courbe paramétrée au voisinage d'un point, on peut effectuer un développement limité de la forme :

$$\vec{f}(t_o+h) = \vec{f}(t_o) + \vec{V}_p h^p + \cdots + \vec{V}_q h^q + \overrightarrow{o(h^q)}$$

où $(\vec{V}_p, \vec{V}_q)$ est une famille libre.

$\vec{V}_p$ est un vecteur directeur de la tangente.

La position de la courbe par rapport à sa tangente dépend de la parité des entiers p et q (*cf. exercice* 14).

- Se souvenir qu'un développement limité ne donne que des propriétés locales et non globales.

Exercice résolu

ÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^n sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I $(a < b)$.

1 *On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par : $g(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!}$, et on pose $\alpha = g(a) = \dfrac{(b-a)^n}{n!}$.*

Montrer que g est une bijection de $[a, b]$ dans $[0, \alpha]$.

2 *En effectuant le changement de variable $u = g(t)$ dans le reste de la formule de Taylor, démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

3 *Quel résultat connu retrouve-t-on pour $n = 1$? Est-ce encore vrai pour les fonctions à valeurs complexes ?*

Conseils

Appliquer le théorème 13 du chapitre 17.

Utiliser la fonction g^{-1}.

Une fonction continue sur un segment atteint sa valeur moyenne.

Chercher les éléments de la démonstration qui ne s'appliquent plus aux fonctions à valeurs complexes.

Solution

1) La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$: c'est une bijection de $[a, b]$ dans $[g(b), g(a)]$, c'est-à-dire $[0, \alpha]$; de plus la fonction g^{-1} est continue sur $[0, \alpha]$.

2) La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable : $u = g(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!}$, d'où $\mathrm{d}u = -\dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

$$R_n = \int_\alpha^0 f^{(n)}\left(g^{-1}(u)\right)(-\mathrm{d}u) = \int_0^\alpha f^{(n)} \circ g^{-1}(u)\,\mathrm{d}u$$

La fonction $f^{(n)} \circ g^{-1}$ étant continue, elle atteint sa valeur moyenne sur le segment $[0, \alpha]$: il existe $d \in [0, \alpha]$ tel que :

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)} \circ g^{-1}(d)$$

soit, en posant $c = g^{-1}(d)$, qui appartient à $[a, b]$:

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

d'où le résultat attendu.

3) Pour $n = 1$: il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$. On reconnaît l'égalité des accroissements finis. On sait que cette égalité ne s'applique pas aux fonctions vectorielles, par exemple à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$. En effet, on a utilisé dans la démonstration le fait qu'une fonction continue sur un segment atteint sa valeur moyenne, ce qui découle du théorème des valeurs intermédiaires qui est spécifique aux fonctions à valeurs réelles.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) L'inégalité des accroissements finis est un cas particulier de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

b) Si f est une fonction de classe C^∞ sur $[a, b]$, le reste d'ordre n de Taylor de f sur $[a, b]$ tend toujours vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) Toute fonction définie en a et admettant un développement limité d'ordre 1 en a est dérivable en a.

d) Toute fonction admettant un développement limité d'ordre n en a est n fois dérivable en a.

e) Toute fonction de classe C^n sur un intervalle I admet un développement limité d'ordre n en tout point de I.

f) Si une fonction admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en a, sa dérivée admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a.

g) Si une fonction f est de classe C^∞, on peut obtenir un développement limité d'ordre n de f' en dérivant terme à terme un développement limité d'ordre $n+1$ de f.

h) Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \mathrm{e}^x$.

i) Si à tout ordre le développement limité de f en 0 ne comprend que des termes pairs, la fonction f est paire.

j) $\cos x \sim 1 + \dfrac{x^2}{2}$ au voisinage de 0.

Formule de Taylor avec reste intégral

2 En appliquant la formule de Taylor à la fonction exponentielle, déterminer la limite de la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

3 En appliquant la formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, déterminer la limite de la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

4 Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $\sin 47°$.

5 * Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$, telle que :

$$f(0) = 0\ ;\ f(1) = 1\ ;\ f'(0) = 0\ ;\ f'(1) = 0.$$

Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.

Formule de Taylor-Young

6 Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I et a un point de I. Déterminer la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

7 Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I contenant 0. Déterminer la limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \dfrac{f(x) - f(0)}{x}}{x}.$$

Développements limités

8 Déterminer le développement limité de la fonction f à l'ordre n au voisinage de a :

a) $f(x) = \cos x \qquad n = 4 \qquad a = \dfrac{\pi}{3}$;

b) $f(x) = \ln x \qquad n = 4 \qquad a = \mathrm{e}$;

c) $f(x) = \mathrm{e}^x \qquad n = 4 \qquad a = 1$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad n = 4 \qquad a = 2$;

e) $f(x) = \operatorname{Arctan} x \qquad n = 5 \qquad a = 0$;

f) $f(x) = \operatorname{Arccos} x \qquad n = 5 \qquad a = 0$.

9 Classer au voisinage de 0_+ les fonctions :

$$x,\ \sin x,\ \tan x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{th} x,\ \operatorname{Arcsin} x,\ \operatorname{Arctan} x,\ \operatorname{Argsh} x,\ \operatorname{Argth} x.$$

10 Déterminer le développement limité de la fonction f à l'ordre n au voisinage de a :

a) $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{Arctan} x \qquad n = 5 \qquad a = 0$;

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad n = 4 \quad a = 1$;

c) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ $\quad n = 4 \quad a = 0$;

d) $f(x) = \cos^3 x$ $\quad n = 6 \quad a = 0$;

e) $f(x) = \tan x$ $\quad n = 3 \quad a = \dfrac{\pi}{4}$;

f) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad n = 3 \quad a = 0$;

g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin} x}$ $\quad n = 4 \quad a = 0$;

h) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ $\quad n = 4 \quad a = 0$.

11 Déterminer le D.L. à l'ordre 7 au voisinage de 0 de la fonction tangente, en exploitant la relation qui existe entre cette fonction et sa dérivée.

Applications des développements limités

12 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$; **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x + \dfrac{1}{2}\sin^2 x \right)^{\frac{1}{x^4}}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{Arctan} x} - e^{\tan x}}{e^{\operatorname{Arcsin} x} - e^{\sin x}}$;

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^n x - n\cos x + n - 1}{\sin^4 x}$;

h) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{\log_a x - \log_x a}$, avec $a > 0$ et $a \neq 1$.

13 Étudier les variations de la fonction f et construire sa courbe représentative en étudiant particulièrement l'existence d'asymptotes et la position de la courbe par rapport à ces asymptotes :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1} e^{-\frac{1}{x}}$;

c) $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$;

d) $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

14 Étudier pour les courbes paramétrées suivantes l'existence d'une tangente au point indiqué et la position de la courbe par rapport à cette tangente :

a) $x(t) = 2t + t^2$; $y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2}$; $t = -1$.

b) $x(t) = e^{t-1} - t$; $y(t) = t^3 - 3t$; $t = 1$.

c) $x(t) = t + \dfrac{1}{t-1}$; $y(t) = \dfrac{t^2}{4} - t - \dfrac{1}{t-1}$; $t = 3$.

Exercices posés aux oraux des concours

15 (Petites Mines 2003)

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$; est-elle de classe C^1 ?

16 (Petites Mines 2003)

Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

17 (Petites Mines 2003)

Calculer la limite en 0 de :

$$f(x) = \frac{1}{\sin^5 x}\left(x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\tan x \right)$$

18 (Petites Mines 2007)

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de la fonction :

$$f \ : \ x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^2}.$$

19 (Petites Mines 2007)

Donner le développement limité à l'ordre 100 au voisinage de 0 de la fonction :

$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right)$$

(on pourra utiliser $x = \ln(e^x)$.)

22 Approximations

INTRODUCTION

Dans ce chapitre sont regroupées un certain nombre de méthodes débouchant sur des calculs approchés par la mise en place d'algorithmes. Bien sûr, une méthode d'approximation n'a d'intérêt que si l'on sait majorer l'erreur commise, ce que nous essaierons de faire à chaque fois.
Ces notions ne sont regroupées ici que pour la commodité de la présentation ; leur étude doit intervenir au fur et à mesure de l'avancement du programme.

OBJECTIFS

- Étudier des méthodes conduisant à des approximations.
- Majorer les erreurs.
- Écrire des algorithmes mettant en œuvre ces méthodes.
- Appliquer ces algorithmes pour déterminer des approximations de réels remarquables.

1 Suites récurrentes

Il s'agit ici d'étudier des suites définies par la donnée d'un premier terme et une relation de récurrence, dites suites récurrentes :

$$(u_n) \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction continue définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$, ce qui permet de définir successivement les termes de (u_n).

Lorsque la suite (u_n) converge, ses termes successifs peuvent servir d'approximations de la limite ℓ ; c'est ce qu'on appelle méthode des approximations successives.

1.1 • Étude générale

Les propriétés de la fonction f permettent de déterminer la limite éventuelle de la suite, puis d'établir s'il y a ou non convergence vers ce réel :

- Si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$. En effet $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ entraîne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, d'où l'égalité.
- Montrer que la suite est bornée, c'est trouver un segment $[a, b]$ tel que $u_0 \in [a, b]$ et $f([a, b]) \subset [a, b]$, une récurrence immédiate prouve alors : $\forall n \geqslant 0 \quad a \leqslant u_n \leqslant b$.
  Il s'agit donc d'étudier les variations de f sur I, on cherche $[a, b]$ tel que $\ell \in [a, b]$.
- Si de plus f est croissante sur $[a, b]$, la suite (u_n) est monotone, sa monotonie est déterminée par la comparaison de u_0 et u_1 :
  $\text{sgn}(u_{n+2} - u_{n+1}) = \text{sgn}(f(u_{n+1} - f(u_n)) = \text{sgn}(u_{n+1} - u_n)$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc constant, c'est celui de $u_1 - u_0$:
  - si $u_0 < u_1$, la suite (u_n) est croissante,
  - si $u_0 > u_1$, la suite est décroissante.

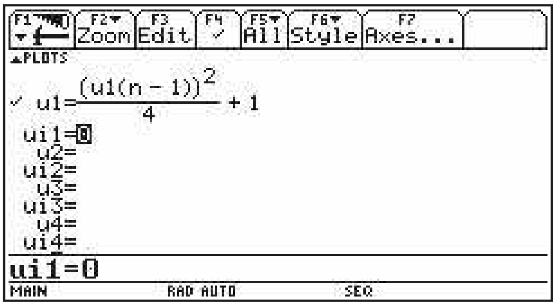
  Remarque *: S'il existe n_0 tel que $u_{n_0+1} = u_{n_0}$, la suite est stationnaire et $\ell = u_{n_0}$.*
- Si f est décroissante sur $[a, b]$, le calcul précédent prouve que les signes de $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ sont opposés, alors :
  - les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones car $f \circ f$ est croissante, de monotonies inverses,
  - (u_n) est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, c'est-à-dire si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

1.2 • Exemple 1

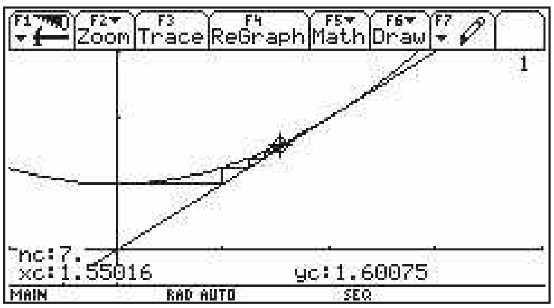
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$$

Utilisons la TI-92/Voyage 200 pour représenter graphiquement le comportement de la suite.



Doc. a.



Doc. b.

Avec la touche `MODE`, sélectionner `Graph :...SEQUENCE`

Dans l'écran `Y=`, définir la suite et choisir la valeur initiale : 0.

Avec la touche `F7`, sélectionner `Axes :...WEB` et `Build Web :...TRACE`

Dans l'écran `GRAPH`, avec la touche `F3` et le curseur, visualiser l'évolution de la suite.

La suite semble converger vers 2. Tentons de le démontrer. On désigne par f la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{4}$, définie sur $\mathbb{R}$ (*Doc.* 1).

1) Recherchons les points fixes de f ;

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{\ell^2}{4} + 1 = \ell \iff \ell = 2$$

La seule limite possible pour la suite (u_n) est donc $\ell = 2$.

2) f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où :

$$f([0,2]) = [f(0), f(2)] = [1,2]$$

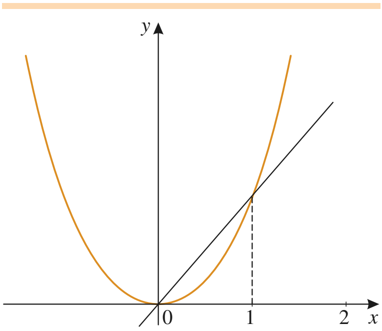
$f([0,2]) \subset [0,2]$, la suite (u_n) est donc minorée par 0 et majorée par 2, elle est monotone et $f(u_0) = 1 > u_0$ prouve qu'elle est croissante.

Nous savons qu'alors (u_n) converge vers une limite appartenant à $]0,2]$, cette limite ne peut être que $\ell = 2$, d'après **1)**.

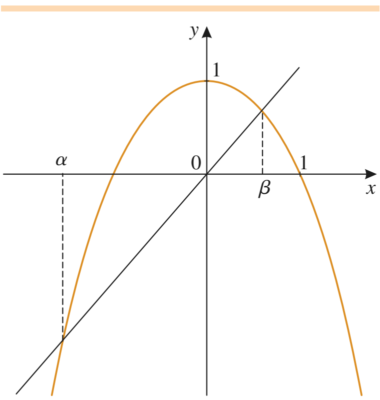
Prolongement : que se passe-t-il avec d'autres valeurs de u_0 ?

- l'étude précédente se généralise à $u_0 \in [0,2[$, car pour tout $x \in [0,2[$, $f(x) > x$;
- la croissance de f sur $\mathbb{R}_+$ prouve que $f([2,+\infty[) = [2,+\infty[$, si $u_0 > 2$, la suite est donc minorée par 2, monotone croissante car pour tout $x \in]2,+\infty[$, $f(x) > x$; elle ne peut pas converger vers 2, elle diverge donc vers $+\infty$;
- f est paire ce qui prouve que la suite (u_n) ne dépend que de $|u_0|$.

En conclusion, la suite converge vers $\ell = 2$ si et seulement si $|u_0| \leqslant 2$.



Doc. 1 Exemple 1.



Doc. 2 Exemple 2.

1.3 • Exemple 2

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

On désigne par f la fonction $x \mapsto 1 - x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, elle est paire, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (*Doc.* 2).

$f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0$, d'où deux solutions réelles de signe opposé, α et β avec

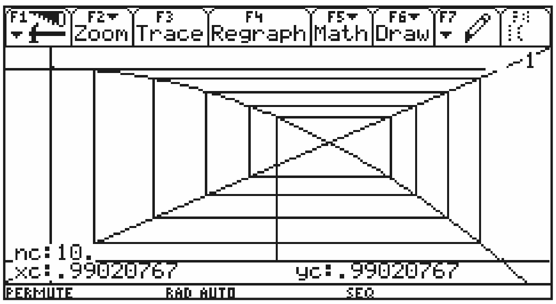
$$\alpha < 0 < \beta \quad f(-2) - (-2) = -1, \quad f(0) - 0 = 1, \quad f(1) - 1 = -1$$

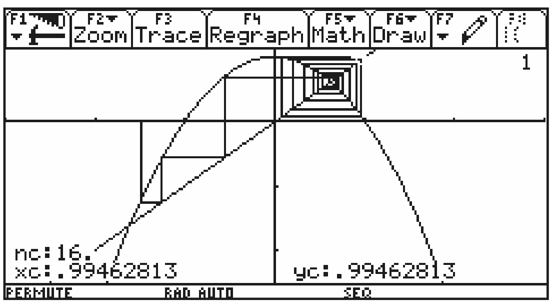
d'où $-2 < \alpha < 0 < \beta < 1$.

Les seules limites possibles de la suite (u_n) au cas où elle converge sont donc α ou β.

L'étude des variations de f montre alors :

- $f([0,\beta[) =]\beta,1]$ et $f(]\beta,1]) = [0,\beta[$; donc si $u_0 \in [0,\beta[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0,\beta[$ et $u_{2n+1} \in]\beta,1]$.
- $f\circ f(x) = 2x^2 - x^4$, d'où $f\circ f(x) - x = x(x-1)(-x^2-x+1)$; les points fixes de $f\circ f$ sont $\alpha, \beta, 0$ et 1 ;





si $u_0 \in [0,\beta[$, $u_2 < u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et pour tout n, $0 \leqslant u_{2n} < \beta$, la suite (u_{2n+1}) est croissante et pour tout n, $\beta < u_{2n+1} \leqslant 1$; elles convergent donc vers des limites qui sont des points fixes de $f\circ f$: (u_{2n}) converge vers 0, (u_{2n+1}) converge vers 1, ce qui prouve que la suite (u_n) diverge ;

si $u_0 \in]\beta,1]$, $u_1 \in [0,\beta[$, l'étude précédente s'applique, la suite (u_n) diverge ;

- si $u_0 < \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \alpha$, la suite est décroissante, elle diverge vers $-\infty$;
- si $u_0 \in]\alpha,0[$, la suite est croissante tant que $u_n < 0$, mais n'est pas majorée par 0, puisqu'elle ne peut pas converger vers une limite appartenant à $]\alpha,0]$, il existe donc $u_{n_0} \in [0,1]$, l'étude précédente s'applique à partir du rang n_0 ;
- si $u_0 > 1$, par parité de f, (u_n) diverge sauf si $u_0 = -\alpha$.

En conclusion, la suite converge si et seulement si $u_0 \in \{\alpha,\beta\}$, elle est alors stationnaire.

1.4 • Majoration de l'erreur

Dans le cas où la suite (u_n) converge, on peut considérer chaque terme u_n comme une approximation de la limite ℓ. On cherche alors à majorer l'erreur $|u_n - \ell|$. Nous allons étudier cette majoration dans le cas où f est contractante, c'est-à-dire lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1.

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que :

$$\exists k < 1 \quad \forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| \leqslant k$$

1) f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.
2) L'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule dans $[a,b]$. On notera ℓ cette solution.
3) Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration

1) On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur tout segment $[x,x']$ (ou $[x',x]$) inclus dans $[a,b]$:

$$\forall (x,x') \in [a,b]^2 \quad |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'| \quad (1)$$

f est donc k-lipschitzienne. Comme $k < 1$, on dit que f est **contractante**.

2) Existence : La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a, b]$ et $f(a) - a \geqslant 0$, $f(b) - b \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette fonction prend la valeur 0 sur $[a, b]$; il existe donc $\ell \in [a, b]$ $f(\ell) = \ell$.

Unicité : Si l'équation $f(x) = x$ admettait deux solutions distinctes ℓ et ℓ', l'inégalité (1) donnerait : $|\ell - \ell'| \leqslant k|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$, ce qui est absurde. Donc la solution est unique.

3) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, b]$. En appliquant (1) à $x = u_n$ et $x' = \ell$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$$

et à nouveau par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$

Comme $0 \leqslant k < 1$, la suite (k^n) converge vers 0 et la suite (u_n) converge vers ℓ.

APPLICATION 1

Exemples de suites récurrentes définies par une fonction contractante

Démontrer que les suites définies ci-dessous par récurrence convergent quel que soit u_0 :

a) $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2}\sin u_n$.

b) $u_{n+1} = \cos u_n$.

a) Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$$

Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. f est dérivable de $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ dans $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} < 1$$

On est donc bien dans les conditions d'application du résultat précédent : la suite (u_n) converge et ceci quel que soit u_0.

b) Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos x$$

Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in [-1, 1]$. f est dérivable de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$ et :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad |f'(x)| \leqslant \sin 1 < 1$$

Pour les mêmes raisons, la suite (u_n) converge quel que soit u_0.

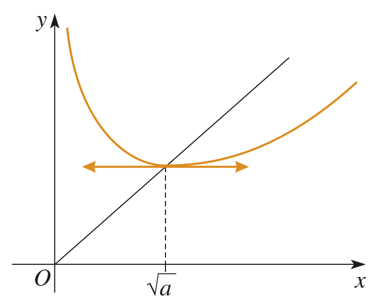
1.5 • Approximation d'une racine carrée : méthode de Héron

La méthode suivante de calcul d'une racine carrée, du type « approximations successives » était déjà appliquée par les Babyloniens 3000 ans av. J.-C. Elle fut reprise et systématisée par Héron d'Alexandrie.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudions la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

Représentons graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ (*Doc.* 3).



Doc. 3 Méthode de Héron.

On voit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant \sqrt{a}$; par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$. De plus, comme pour $x \in [\sqrt{a}, +\infty[$, $f(x) \leqslant x$, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1. Minorée par $\sqrt{a}$, elle converge ; et comme $\sqrt{a}$ est le seul point fixe, c'est la limite de la suite.

Nous allons montrer que la convergence est extrêmement rapide. Considérons la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Calculons v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0^{2^n}$, puis que si $u_0 > \sqrt{a}$, $|u_n - \sqrt{a}| < v_0^{2^n} \times 2u_0$.

APPLICATION 2

Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron

Cherchons une approximation de $\sqrt{2}$ *en partant de* $u_0 = \dfrac{3}{2}$.

Sachant que $\left(\dfrac{7}{5}\right)^2 < 2$, $\sqrt{2} > \dfrac{7}{5}$ et par conséquent $v_0 < \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{\frac{3}{2} + \frac{7}{5}} = \dfrac{1}{29}$.

On a donc $\left|u_n - \sqrt{2}\right| < \left(\dfrac{1}{29}\right)^{2^n} \times 3$. Il suffit de choisir $n = 3$ pour avoir une approximation meilleure que 10^{-11} !

$$u_1 = \frac{17}{12}\ ; \qquad u_2 = \frac{577}{408}\ ;$$

$$u_3 = \frac{665857}{470832} \simeq 1{,}41421356237$$

2 Calcul approché des zéros d'une fonction

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$; on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins un réel $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Si de plus f est strictement monotone, α est unique. Cherchons des méthodes d'approximation de α.

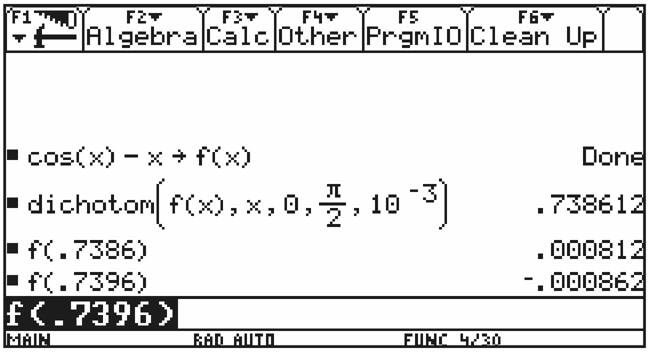
2.1 • Dichotomie

L'idée la plus simple est de placer α par rapport à la moyenne arithmétique $m = \dfrac{a+b}{2}$: α est entre a et m si $f(m)$ est du signe de $f(b)$, ou entre m et b si $f(m)$ est du signe de $f(a)$. On pourra donc recommencer en remplaçant a ou b par m suivant le signe de $f(m)$. On réitérera ce procédé jusqu'à ce que l'amplitude de l'encadrement soit aussi petite que l'on veut.

Programmons cet algorithme sur la calculatrice TI-92/Voyage 200 :

`dichotom(y,x,a,b,eps)`	y est l'expression de $f(x)$, x le nom de la variable, a et b les bornes initiales de l'intervalle, *eps* la précision souhaitée.
`Func`	
`Local t,ta,tb`	t est une variable intermédiaire, *ta* et *tb* les bornes qui évoluent au fur et à mesure de l'algorithme.
`round(a)→ta`	initialisation de *ta* en mode FLOAT
`round(b)→tb`	
`a→t`	
`While abs(tb-ta)>eps`	tant que $\lvert tb - ta\rvert > \varepsilon$
`(ta+tb)/2→t`	on place $\dfrac{ta+tb}{2}$ dans la variable t
`If (y|x=t)*(y|x=ta)>0 Then`	si $f(t)$ est du même signe que $f(ta)$
`t→ta`	on remplace *ta* par t
`Else`	sinon (i.e. si $f(t)$ est du même signe que $f(tb)$)
`t→tb`	on remplace *tb* par t
`EndIf`	
`EndWhile`	
`t`	renvoyer la dernière valeur de t.
`EndFunc`	

Exemple : L'équation $\cos x = x$ admet une solution, ici unique, dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$; cherchons une valeur approchée de cette solution à 10^{-3} près.

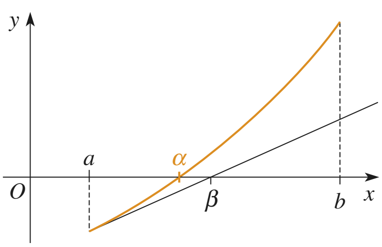


2.2 • Méthode de Newton

Supposons de plus que f est dérivable et que la fonction f' ne s'annule pas sur $[a, b]$. Désignons par C la courbe représentative de f (*Doc.* 4). La tangente à C au point d'abscisse a rencontre l'axe Ox en un point d'abscisse β. On peut raisonnablement penser que β est une meilleure approximation de α que a, bien que ce ne soit pas toujours vrai (penser à un exemple où $\lvert f'(a)\rvert$ est faible).

La tangente a pour équation : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, d'où :

$$\beta = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$



Doc. 4 Méthode de Newton.

2.3 • Majoration de l'erreur dans la méthode de Newton

Afin de majorer l'erreur $|\beta-\alpha|$, supposons la fonction f de classe C^2 sur $[a,b]$ et :

$$\forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| \geqslant m_1 > 0 \quad ; \quad |f''(x)| \leqslant M_2$$

Comme f' est continue et ne s'annule pas sur $]a,b[$, elle garde un signe constant et par conséquent f est strictement monotone sur $]a,b[$. La solution α de l'équation $f(x)=0$ est donc unique.

$$|\alpha-\beta| = \left|\alpha - a + \frac{f(a)}{f'(a)}\right| = \frac{|f(a)+(\alpha-a)f'(a)|}{|f'(a)|}$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|f(a)+(\alpha-a)f'(a)| \leqslant M_2\frac{|\alpha-a|^2}{2} \leqslant M_2\frac{(b-a)^2}{2}$$

Par ailleurs, $\dfrac{1}{|f'(a)|} \leqslant \dfrac{1}{m_1}$. D'où :

$$\boxed{|\alpha-\beta| \leqslant \frac{M_2(b-a)^2}{2m_1}}$$

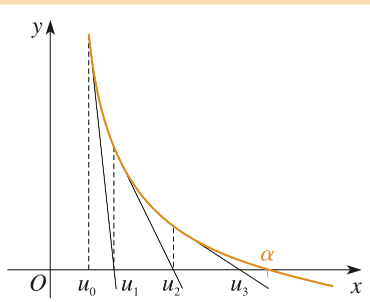
La méthode de Newton convient bien aux fonctions dont la dérivée est grande en valeur absolue (m_1 grand) et dont la dérivée seconde est faible (M_2 petit).

2.4 • Algorithme de Newton-Raphson

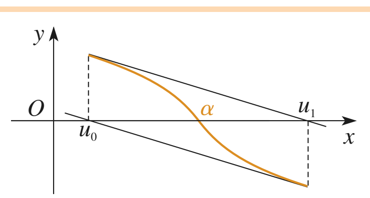
La méthode de Newton permet de calculer à partir d'une valeur initiale $u_0=a$ une approximation de α : $u_1=\beta=u_0-\dfrac{f(u_0)}{f'(u_0)}$. En itérant ce procédé, on construit une suite (u_n) telle que $u_0=a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n-\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ (*Doc.* 5).

Cette suite n'est pas toujours convergente (*Doc.* 6).

Donnons une condition suffisante pour qu'elle le soit :



Doc. 5 Algorithme Newton-Raphson.



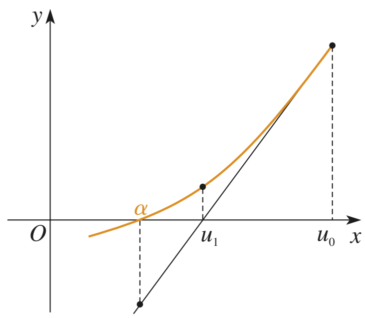
Doc. 6 Un cas où l'algorithme n'aboutit pas.

Théorème 2

Soit f une fonction de classe C^2 sur le segment $[a,b]$, s'annulant au moins une fois sur $[a,b]$ et telle que f'' ne s'annule pas sur $[a,b]$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in[a,b]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=u_n-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Si $f(u_0)f''(u_0)>0$, alors (u_n) converge, et sa limite ℓ vérifie $f(\ell)=0$.



Doc. 7 Un cas où l'algorithme aboutit.

Démonstration

Soit α l'une des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ (*Doc.* 7). La fonction f'' étant continue sur $[a, b]$ et ne s'annulant pas, elle garde un signe constant. Supposons par exemple qu'elle reste positive : la fonction f est convexe sur $[a, b]$. D'après l'hypothèse, $f(u_0) > 0$.

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse u_0 coupe l'axe Ox en u_1. Comme C_f est au dessus de sa tangente, u_1 est entre u_0 et α, donc toujours dans $[a, b]$, et $f(u_1) > 0$. Par récurrence, pour tout entier n, u_{n+1} est entre u_n et α, et $f(u_{n+1}) > 0$. On en déduit que la suite (u_n) est monotone et bornée, donc qu'elle converge.

Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$. C'est la solution de l'équation $f(x) = 0$ la plus proche de u_0.

Exemple : Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x^2 - a$ ($a > 0$), et la suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - a}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

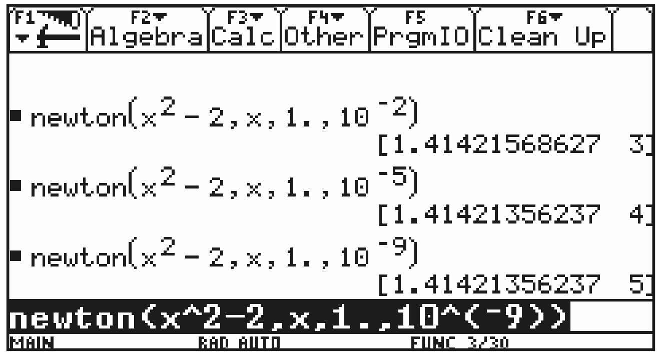
On reconnaît la suite utilisée dans la méthode de Héron pour approcher le réel $\sqrt{a}$. Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f'' ne s'annule pas, la suite converge pour tout u_0 tel que $f(u_0) \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_0 \geqslant \sqrt{a}$. En fait, quel que soit $u_0 > 0$, $u_1 \geqslant \sqrt{a}$ et par conséquent la suite converge. Nous avons déjà observé que la convergence était très rapide, ce qui est souvent le cas avec cette méthode.

Programmation de l'algorithme

Le programme suivant calcule u_n jusqu'à ce que $|u_n - u_{n-1}| \leqslant \varepsilon$ [1]. Il renvoie la valeur de u_n et l'entier n, c'est-à-dire le nombre d'itérations effectuées. On constate qu'on obtient d'excellentes approximations en très peu d'étapes.

`Newton(y,x,a,eps)`	*y* est l'expression de $f(x)$, *x* le nom de la variable, *a* la valeur initiale, *eps* la précision souhaitée.
`Func`	
`Local n,u,v,z`	*u* est le terme courant de la suite, *v* le terme précédent. *z* l'expression de $f'(x)$.
`d(y,x)→z`	calcul de la dérivée.
`0→n`	
`a→u`	
`∞ →v`	
`While abs(u-v)>eps`	tant que $\lvert u - v\rvert > \varepsilon$
`u→v`	sauvegarde du terme de la suite ;
`u-(y|x=u)/(z|x=u)→u`	calcul du terme suivant.
`n+1→n`	incrémentation de *n*.
`EndWhile`	
`[u,n]`	renvoyer le dernier terme calculé et le nombre d'itérations.
`EndFunc`	

[1] ce test d'arrêt ne prouve pas que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$; mais, la suite étant croissante, on n'a pas d'autre possibilité faute de connaître des propriétés plus fines de la fonction f.



3 Calcul approché d'une intégrale

3.1 • Méthode des trapèzes

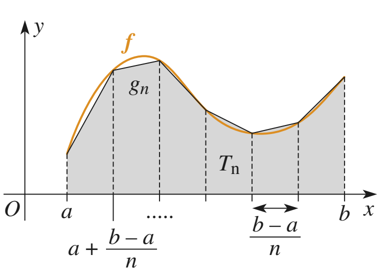
On peut améliorer à peu de frais l'approximation d'une intégrale donnée par les sommes de Riemann en remplaçant la fonction en escalier par une fonction affine par morceaux.

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$ et $\sigma = (x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ la subdivision définie par : $\forall i \in [\![0, n]\!] \quad x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Soit g_n la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![0, n]\!] & g_n(x_i) = f(x_i) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!] & g_n \text{ est affine sur } [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Prenons pour valeur approchée de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ l'intégrale T_n de g_n.

Dans le cas où f est positive sur $[a, b]$, T_n représente une somme d'aires de trapèzes (*Doc.* 8).



Doc. 8 Méthode des trapèzes.

$$T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

Écrivons le programme pour la TI92/Voyage 200 calculant l'approximation par la méthode des trapèzes :

```
Trapezes(y,x,a,b,n)
```

y est l'expression de $f(x)$, x le nom de la variable, a et b les bornes de l'intervalle d'intégration, n le nombre de trapèzes.

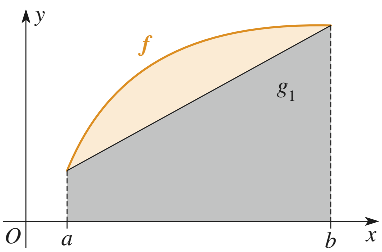
```
Func
Local s,i
```

s est une variable recevant la somme des $f(x_i)$.

```
((y|x=a)+(y|x=b))/2→s
For i,1,n-1
```

Initialisation de s ;
boucle de sommation ;

```
s+y|x=a+i*(b-a)/n→s
EndFor
(b-a)/n*s→s
approx(s)
EndFunc
```



Doc. 9 Majoration de l'erreur.

3.2 • Majoration de l'erreur

Supposons f de classe C^2 sur $[a, b]$ et posons $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.

Commençons par majorer $\left|\int_{[a,b]} f - T_1\right| = \left|\int_{[a,b]} (f - g_1)\right|$ (*Doc.* 9).

Considérons pour cela la fonction :

$$h(x) = f(x) - g_1(x) - \frac{M_2}{2}(x-a)(b-x)$$

$$h'(x) = f'(x) - g_1'(x) - \frac{M_2}{2}(a+b-2x)$$

$$h''(x) = f''(x) + M_2 \geqslant 0$$

h' est donc croissante. $h(a) = h(b) = 0$; d'après le théorème de Rolle, h' s'annule sur $[a, b]$.

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & a & & & & b \\
\hline
h'' & & & + & & \\
\hline
h' & & \nearrow & 0 & \nearrow & \\
\hline
h & 0 & \searrow & & \nearrow & 0
\end{array}$$

La fonction h est donc toujours négative sur $[a, b]$.

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) - g_1(x) \leqslant \frac{M_2}{2}(x-a)(b-x)$$

On montrerait de même que $\quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) - g_1(x) \geqslant -\frac{M_2}{2}(x-a)(b-x)$

D'où : $\quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - g_1(x)| \leqslant \frac{M_2}{2}(x-a)(b-x)$

et $\quad \left|\int_a^b (f(x) - g_1(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - g_1(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{M_2}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}x$

Soit en définitive $\quad \left|\int_{[a,b]} f - T_1\right| \leqslant \frac{M_2}{12}(b-a)^3$

Pour majorer $\left|\int_{[a,b]} f - T_n\right|$, il suffit de répéter l'opération précédente sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, de longueur $\dfrac{b-a}{n}$:

$$\left|\int_{[a,b]} f - T_n\right| \leqslant n\,\frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$$

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} f - T_n\right| \leqslant \frac{M_2\,(b-a)^3}{12\,n^2}}$$

3.3 • Application : approximation de π

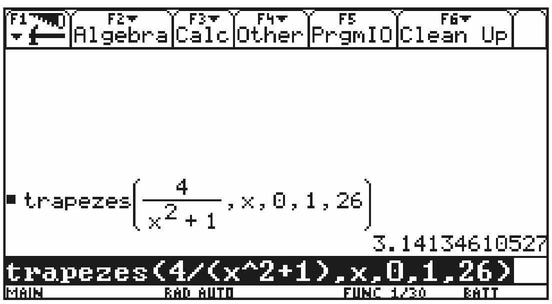
On sait que :

$$\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \pi$$

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$. Elle est de classe C^∞ et :

$$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2+1)^2}\ ; \quad f''(x) = \frac{8(3x^2+1)}{(x^2+1)^3}\ ; \quad f'''(x) = -\frac{96x(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^4}$$

Notons que pour tout $x \in [0,1]$, $f'''(x) \geqslant 0$, donc la fonction f'' est croissante sur $[0,1]$; comme $f''(0) = -8$ et $f''(1) = 2$, on peut en déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $|f''(x)| \leqslant 8$, et donc $M_2 = 8$.



Pour obtenir une approximation de π à 10^{-3} près, il faut donc choisir un nombre n de trapèzes tel que $\dfrac{8}{12n^2} \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire $n \geqslant 26$ (cette méthode n'est pas extrêmement performante...).

En utilisant la fonction `Trapezes` que nous avons créée, nous obtenons :

$$\pi \simeq 3.1413 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

On remarque qu'en réalité, l'erreur commise est nettement plus petite que 10^{-3}. Cependant, cette méthode ne conviendrait pas pour calculer des centaines de décimales de π...

4 Approximations par la formule de Taylor

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de majorer l'erreur commise en approchant la valeur d'une fonction en un point x voisin de a par son développement de Taylor en a. Si f est une fonction de classe C^{p+1} sur un intervalle I et si pour tout $t \in I$, $|f^{(p+1)}(t)| \leqslant M$, alors :

$$\forall x \in I \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

4.1 • Exemple 1 : approximation de e

Prenons la fonction exponentielle $f(x) = \mathrm{e}^x$, avec $a = 0$ et $x = 1$.

$$\left| \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \right| \leqslant \frac{3}{(p+1)!}$$

Pour avoir une précision de 10^{-6}, il suffit que $p = 9$: ici, la méthode est performante.

$$\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} = \frac{98641}{36288} \simeq 2{,}7182815$$

$$\text{d'où :} \quad \mathrm{e} \simeq 2{,}718281 \quad \text{à } 10^{-6} \text{ près}$$

4.2 • Exemple 2 : nouvelle approximation de π

Prenons la fonction Arctangente avec $a = 0$ et $p = 6$: pour tout $x \geqslant 0$,

$$\left|\text{Arctan } x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\right| \leqslant \frac{Mx^7}{7!}$$

où $M = \sup\limits_{[0,x]} |f^{(7)}|$. Une étude graphique montre que cette borne supérieure est atteinte en 0 et vaut : $M = -720$. D'où :

$$\left|\text{Arctan } x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\right| \leqslant \frac{x^7}{7}$$

On peut utiliser cette majoration pour approcher le nombre π, grâce à la formule de Jean Guilloud (1976), qui généralise celle de Machin (voir exercice 11 du chapitre 2) :

$$\frac{\pi}{4} = 12\text{Arctan } \frac{1}{18} + 8\text{Arctan } \frac{1}{57} - 5\text{Arctan } \frac{1}{239}$$

On a successivement :

$$\left|\text{Arctan } \frac{1}{18} - \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{3 \times 18^3} + \frac{1}{5 \times 18^5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{7 \times 18^7}$$

$$\text{soit : } \quad \left|\text{Arctan } \frac{1}{18} - 0{,}05549850548\right| \leqslant 2{,}5\ 10^{-10}$$

$$\left|\text{Arctan } \frac{1}{57} - \left(\frac{1}{57} - \frac{1}{3 \times 57^3} + \frac{1}{5 \times 57^5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{7 \times 57^7}$$

$$\text{soit : } \quad \left|\text{Arctan } \frac{1}{57} - 0{,}01754206005747\right| \leqslant 10^{-13}$$

$$\left|\text{Arctan } \frac{1}{239} - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} + \frac{1}{5 \times 239^5}\right)\right| \leqslant \frac{1}{7 \times 239^7}$$

$$\text{soit : } \quad \left|\text{Arctan } \frac{1}{239} - 0{,}004184076002074727\right| \leqslant 10^{-17}$$

Bien entendu, c'est la moins précise de ces approximations qui impose la précision résultante sur la somme : π sera connu avec une incertitude de $48 \times 2{,}5 \times 10^{-10}$ soit environ $1{,}2\ 10^{-8}$.

$$|\pi - 3{,}141592665| \leqslant 1{,}2\ 10^{-8}$$

Jean Guilloud a utilisé cette méthode pour obtenir un million de décimales de π.

MÉTHODE

Pour étudier une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$:

- on cherche les points fixes de la fonction f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = x$; ce sont les seules valeurs possibles de la limite de (u_n), si elle converge ;
- on cherche un intervalle I tel que $f(I) \subset I$. Si u_0 appartient à I, alors pour tout entier n, u_n appartient à Iv ;
- si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone ; si elle est bornée, elle converge ;
- si f est décroissante sur I, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens inverses. La suite (u_n) converge si et seulement si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$;
- si f est contractante (lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1) sur le segment $[a, b]$, il existe un point fixe unique dans $[a, b]$ et (u_n) converge vers ce point fixe.

Pour chercher une valeur approchée d'un zéro de la fonction continue f, on peut :

- mettre l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $g(x) = x$ et chercher une suite (u_n) convergente vérifiant $u_{n+1} = g(u_n)$;
- procéder par dichotomie ;
- si f est dérivable et si f' ne s'annule pas, utiliser la méthode de Newton : on prend pour valeur approchée l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de f en a avec l'axe Ox : $\beta = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$;
- utiliser l'algorithme de Newton-Raphson, qui consiste à réitérer la méthode de Newton. Cet algorithme converge si, par exemple, f est de classe C^2 sur un segment $[a, b]$ où elle s'annule au moins une fois, et si f'' garde un signe constant. On choisira la valeur initiale u_0 de façon que $f(u_0)f''(u_0) > 0$.

Pour calculer une valeur approchée d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, on peut employer la méthode des trapèzes :

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

L'erreur commise sera inférieure à $\dfrac{M_2\,(b-a)^3}{12\,n^2}$, où M_2 est la borne supérieure de f'' sur $[a, b]$.

Exercice résolu

APPROXIMATION DE $\sin(10^\circ)$

1) *Démontrer que* $\sin\dfrac{\pi}{18}$ *est l'unique solution dans* $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ *de l'équation :* $x=\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{1}{6}$.

2) *On considère la suite* (u_n) *définie par* $u_0=0$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\dfrac{4}{3}u_n^3+\dfrac{1}{6}$. *Démontrer que* (u_n) *converge vers* $\sin\dfrac{\pi}{18}$.

3) *En déduire une valeur approchée de* $\sin\dfrac{\pi}{18}$ *à* 10^{-6} *près.*

Conseils

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour prouver l'existence d'une solution, et la stricte monotonie de la fonction pour prouver son unicité.

Montrer que $\sin\dfrac{\pi}{18}$ est solution.

Montrer que (u_n) est croissante et majorée.

Utiliser le théorème des accroissements finis.

Solution

1) Considérons les fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{1}{6}$ et $g(x)=f(x)-x$. La fonction g est dérivable et $g'(x)=4x^2-1$. Pour tout $x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$, $g'(x)<0$, donc g est strictement décroissante sur cet intervalle. Comme $g(0)=\dfrac{1}{6}$ et $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{19}{162}$, la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

D'autre part, $\sin\dfrac{\pi}{18}$ appartient à ce segment, et :

$$g\left(\sin\frac{\pi}{18}\right)=\frac{4}{3}\sin^3\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{18}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(1-2\sin\frac{\pi}{6}\right)=0$$

Il en résulte que $\sin\dfrac{\pi}{18}$ est bien l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ sur $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

2) Comme f est croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$, la suite (u_n) est monotone. Or $u_1>u_0$, donc (u_n) est croissante ; comme elle est majorée par $\dfrac{1}{3}$, elle converge. Sa limite est l'unique point fixe de f sur l'intervalle, c'est-à-dire $\sin\dfrac{\pi}{18}$.

3) D'après le théorème des accroissements finis : $\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\quad |f'(x)|\leqslant\dfrac{4}{9}$ d'où $\left|u_{n+1}-\sin\dfrac{\pi}{18}\right|\leqslant\dfrac{4}{9}\left|u_n-\sin\dfrac{\pi}{18}\right|$. Par récurrence :

$$\left|u_n-\sin\frac{\pi}{18}\right|\leqslant\left(\frac{4}{9}\right)^n\left|u_n-\sin\frac{\pi}{18}\right|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

L'erreur est inférieure à 10^{-6} à partir de $n=16$.

$$\sin\frac{\pi}{18}\simeq 0{,}1736482\quad\text{à } 10^{-6}\text{ près}$$

Exercices

1 Vrai ou faux ?

1. Une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone si et seulement si f est monotone.
2. Si une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente, alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
3. Si une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue, alors à partir d'un certain rang on a : $f(u_n) = u_n$.
4. Si f est une application d'un segment I dans lui-même telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$. Toute suite (u_n) telle que $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.
5. L'algorithme de Newton-Raphson converge pour toute fonction f de classe C^2 sur $[a, b]$.
6. Pour évaluer les zéros d'une fonction, la dichotomie est beaucoup plus rapide que la méthode de Newton.
7. La méthode de Héron permet d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à un dix-millième près sans calculatrice en moins de 3 minutes.
8. Dans la méthode des trapèzes, doubler le nombre de points de subdivisions divise l'erreur par 4.
9. La valeur approchée d'une intégrale par la méthode des trapèzes est la moyenne arithmétique de deux sommes de Riemann.
10. Il est impossible d'approcher le nombre π d'aussi près que l'on veut par des nombres rationnels.

Exercices posés aux oraux des concours

2 (Petites Mines 2006)

Étudier la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in & [0, 1] \\ u_{n+1} & = & \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1 - u_n}} \end{cases}$$

(on pourra rechercher les limites éventuelles de la suite et discuter suivant la valeur de u_0).

3 (Petites Mines 2006)

Étudier la suite récurrente (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = & \dfrac{6}{u_n^2} \end{cases}$$

(on pourra rechercher les limites éventuelles de la suite, étudier les variations de f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et discuter suivant la valeur de u_0).

4 (Petites Mines 2007)

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.

1) Montrer que f_n admet deux racines dans $\mathbb{R}_+$, notées a_n et b_n et telles que :

$$0 < a_n < 1 < b_n$$

2) Montrer que la suite (a_n) est monotone et convergente. Trouver sa limite et un équivalent.

3) Montrer que $f_n\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{(n)}}\right) \geqslant n$. En déduire la limite de la suite (b_n).

5 (Petites Mines 2007)

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation :

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad x + \ln x = k$$

admet une unique solution notée x_k.

2) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$x_k = ak + b \ln k + c\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$$

où a, b, c sont des constantes à déterminer.

6 (Petites Mines 2005)

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$E_x = \{\theta \in]0, 1[, \ \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} \operatorname{ch}(\theta x)\}.$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \operatorname{Card}(E_x) = 1.$$

2) On note donc $\theta(x)$ l'unique élément de E_x, déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \theta(x).$$

7 (Petites Mines 2006)

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation :

$$x \in]0, 1[\quad \tan\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2nx}$$

admet une unique solution notée x_n.

2) Étudier la suite réelle (x_n) ainsi définie et donner un équivalent de x_n au voisinage de $+\infty$.

8 (CCP 2006)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, telle que $f\Big([a, b]\Big) \subset [a, b]$, et telle que pour tous réels x et y distincts éléments de $[a, b]$: $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

1) Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

2) Montrer qu'il existe un réel unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

3) Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

23 Dimension des espaces vectoriels

INTRODUCTION

Certains espaces vectoriels peuvent être engendrés par une famille finie de vecteurs. Ils possèdent alors des propriétés particulières qui simplifient de nombreuses démonstrations. On dit que ces espaces vectoriels sont de dimension finie.

OBJECTIFS

- Étudier les espaces vectoriels engendrés par une famille finie de vecteurs.
- Mettre en place la notion de dimension d'un espace vectoriel.
- Étudier les propriétés particulières des applications linéaires liées à la dimension.

Remarque préliminaire : *Une famille finie $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ d'éléments de E est appelée « famille à p éléments », que les x_i soient distincts ou non. L'entier p désigne le nombre d'indices et non le cardinal de l'image $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$.*

Comme dans le chapitre 12, $\mathbb{K}$ désigne le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Familles libres ou liées

1.1 • Définitions

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille finie $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ d'éléments de E est dite libre si la seule combinaison linéaire des x_i qui s'annule est celle dont tous les coefficients sont nuls. C'est-à-dire si :

$$\forall(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \quad \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$$

On dit aussi que les vecteurs $x_1, \cdots, x_p$ sont linéairement indépendants.

Une famille qui n'est pas libre est dite liée. Ses éléments sont dits linéairement dépendants. La famille finie $(x_1, \cdots, x_p)$ est liée si et seulement si :

$$\exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \quad \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0 \quad \text{et} \quad \exists i \in [\![1, p]\!] \quad \alpha_i \neq 0$$

1.2 • Propriétés

On peut vérifier que :

1) $\varnothing$ est libre (la proposition commence par $\forall \alpha \in \varnothing \cdots$).

2) La famille (x) à un élément est libre si et seulement si $x \neq 0$.

3) Toute famille contenue dans une famille libre est libre.

4) Toute famille contenant une famille liée est liée.

5) En particulier, toute famille contenant le vecteur nul est liée.

1.3 • Caractérisation d'une famille liée

Théorème 1

Une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est liée si et seulement si l'un au moins des x_i est combinaison linéaire des $(p-1)$ autres.

Démonstration

1) Si la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est liée, il existe une combinaison linéaire des éléments de la famille qui s'annule avec au moins un coefficient non nul. Soit $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0$ avec, par exemple, $\alpha_p \neq 0$. On peut alors écrire :

$$x_p = \sum_{j=1}^{p-1} -\frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_j$$

x_p est donc combinaison linéaire des $(p-1)$ autres vecteurs.

2) Si l'un des vecteurs, par exemple x_p, est combinaison linéaire des autres :

$$x_p = \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j x_j \,; \qquad \text{on a alors} \qquad \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j x_j - x_p = 0$$

ce qui représente une combinaison linéaire des éléments de la famille avec un coefficient égal à -1 : la famille est liée.

Exemples :

1) Une famille de deux vecteurs (x, y) est liée si et seulement s'il existe un scalaire α tel que $y = \alpha x$ ou $x = \alpha y$. On dit que x et y sont colinéaires.

2) Toute famille contenant plusieurs fois le même élément est liée.

3) La famille $(x, y, x+y)$ est liée.

APPLICATION 1

Un exemple important

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, montrer qu'une famille finie de polynômes non nuls de degrés tous distincts est libre.

On peut supposer les polynômes de la famille classés par degrés strictement croissants. Raisonnons par récurrence sur le nombre n de polynômes de la famille.

- $n = 1$

Le polynôme P_1 étant non nul, il forme une famille libre.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de polynômes $(P_1, \cdots, P_n)$, de degrés strictement croissants, soit libre. Soit P_{n+1} un polynôme tel que $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$ et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1})$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i P_i = 0$. Si α_{n+1} n'était pas nul, cette somme serait de même degré que P_{n+1}, donc $\alpha_{n+1} = 0$.

Il reste $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i = 0$ et comme la famille $(P_1, \cdots, P_n)$ est libre, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$. La famille $(P_1, \cdots, P_{n+1})$ est donc libre.

On a montré par récurrence que toute famille finie de polynômes non nuls de degrés tous distincts est libre.

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

2 Familles génératrices

2.1 • Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite génératrice si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est E tout entier.

L'espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in E^m$. Tout élément x de E est alors combinaison linéaire des x_i, c'est-à-dire qu'il existe une famille de scalaires $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$ telle que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$.

Exemples :

1) La famille (x_1, x_2, x_3) suivante est génératrice de $\mathbb{R}^3$:

$$x_1 = (1, 1, -1) \quad x_2 = (1, -1, 1) \quad x_3 = (-1, 1, 1)$$

En effet : $$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad (a, b, c) = \frac{a+b}{2} x_1 + \frac{c+a}{2} x_2 + \frac{b+c}{2} x_3$$

2) Soit $a \in \mathbb{K}$. La famille $(1,\ X-a,\ (X-a)^2,\ (X-a)^3\ )$ est génératrice de $\mathbb{K}_3[X]$, car tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 s'écrit :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(X-a)^3$$

(formule de Taylor).

3) Remarquons qu'une famille vide est génératrice de $\{0\}$, car $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$.

2.2 • Propriété fondamentale d'un e.v. de dimension finie

La notion de dimension d'un espace vectoriel repose sur la propriété suivante :

Théorème 2

Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille libre ne peut avoir plus d'éléments qu'une famille génératrice.

Démonstration

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(g_1, \cdots, g_m)$ une famille génératrice de E. Supposons l'existence d'une famille libre $(l_1, \cdots, l_{m+1})$ ayant $m+1$ éléments. Comme $(g_1, \cdots, g_m)$ est génératrice, on peut écrire : $l_1 = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_m g_m$. l_1 étant non nul, les α_i ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation d'indices, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On a alors :

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} l_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} g_m$$

Toute combinaison linéaire de $(g_1, \cdots, g_m)$ est donc combinaison linéaire de :

$$(l_1, g_2, \cdots, g_m).$$

De ce fait, la famille $(l_1, g_2, \cdots, g_m)$ est génératrice.

Raisonnant par récurrence, supposons que l'on puisse ainsi remplacer g_i par l_i jusqu'à l'indice k $(k < m)$ en conservant le caractère générateur de la famille, et vérifions qu'on peut encore le faire à l'indice $k+1$.

$(l_1, \cdots, l_k, g_{k+1}, \cdots, g_m)$ étant génératrice, on peut écrire :

$$l_{k+1} = \alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_k l_k + \alpha_{k+1} g_{k+1} + \cdots + \alpha_m g_m$$

La famille $(l_1, \cdots, l_{k+1})$ étant libre, les coefficients $\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_m$ ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation d'indices, on peut supposer que $\alpha_{k+1} \neq 0$; d'où :

$$g_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} l_1 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} l_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} l_{k+1} - \frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_{k+1}} g_{k+2} - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{k+1}} g_m$$

Toute combinaison linéaire de $(l_1, \cdots, l_k, g_{k+1}, \cdots, g_m)$ est donc combinaison linéaire de $(l_1, \cdots, l_{k+1}, g_{k+2}, \cdots, g_m)$ qui est, par conséquent, génératrice.

Par récurrence, on peut donc conclure que $(l_1, \cdots, l_m)$ est génératrice. On en déduit alors que l_{m+1} est combinaison linéaire des l_i de $i = 1$ à m, ce qui contredit la liberté de la famille $(l_1, .., l_{m+1})$.

Conclusion : S'il existe une famille génératrice à m éléments, une famille libre ne peut avoir plus de m éléments.

3 Bases d'un e.v. de dimension finie

3.1 • Définition et caractérisation

On appelle base d'un espace vectoriel E une famille à la fois libre et génératrice. Le *théorème* 3 permet d'étudier les bases des espaces vectoriels de dimension finie :

On peut démontrer que tout espace vectoriel, même de dimension infinie, possède des bases, mais c'est beaucoup plus difficile.

Théorème 3

1) Tout espace vectoriel de dimension finie possède des bases.

2) Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E et noté $\dim E$.

Démonstration

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une famille génératrice à m éléments. L'ensemble $\mathcal{L}$ des cardinaux des familles libres de E est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient 0, car $\varnothing$ est libre) et majorée par m. $\mathcal{L}$ a donc un plus grand élément n. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre à n éléments. Pour tout x de E, la famille $(e_1, \cdots, e_n, x)$ est liée. Il existe donc une combinaison linéaire nulle : $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n + \beta x = 0$, avec au moins un coefficient non nul. Comme $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, β est nécessairement non nul. x est donc combinaison linéaire des e_i : la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice ; c'est une base de E.

2) Supposons l'existence de deux bases $b = (e_1, \cdots, e_n)$ et $b' = (e'_1, \cdots, e'_p)$. Comme b est libre et b' génératrice, $n \leqslant p$. Comme b' est libre et b génératrice, $p \leqslant n$; d'où $n = p$. Le cardinal d'une base est donc une caractéristique de l'espace vectoriel E, que l'on appelle sa **dimension**.

Théorème 4

Si $\dim E = n$:

1) toute famille libre a au plus n éléments ;

2) toute famille libre à n éléments est une base ;

3) toute famille génératrice a au moins n éléments ;

4) toute famille génératrice à n éléments est une base.

Démonstration

Soit $b = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

1) b étant génératrice, une famille libre ne peut avoir plus de n éléments.

2) On a montré, dans la preuve du *théorème* 3, qu'une famille libre à n éléments était nécessairement une base.

3) b étant libre, une famille génératrice a au moins n éléments.

4) Supposons $n \geqslant 2$. Soit $(g_1, \cdots, g_n)$ une famille génératrice à n éléments. Si elle était liée, l'un des g_i serait combinaison linéaire des autres qui formeraient donc une famille génératrice à $n-1$ éléments, ce qui est impossible. Par conséquent, la famille $(g_1, \cdots, g_n)$ est libre, c'est donc une base.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, le résultat est immédiat.

Corollaire 4.1

Toute famille génératrice contient une base.
Toute famille libre peut être prolongée en une base.

Ce dernier résultat est connu sous le nom de théorème de la base incomplète.

Démonstration

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

Une famille génératrice a au moins n éléments ; si cette famille est liée, l'un au moins de ses éléments est combinaison linéaire des autres : on peut le retirer sans nuire au caractère générateur de la famille. On peut ainsi retirer des éléments jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus que n ; on a alors une base.

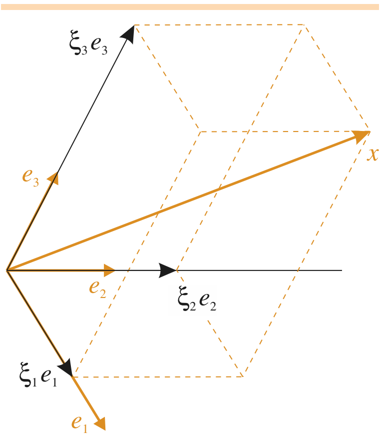
Une famille libre a au plus n éléments ; si cette famille n'est pas génératrice, il existe au moins un élément de E qui n'est pas combinaison linéaire des éléments de cette famille : on peut l'adjoindre à la famille sans nuire à sa liberté. On peut ainsi compléter la famille jusqu'à ce qu'elle ait n éléments ; on obtient alors une base.

Pour s'entraîner : ex. 5 à 7

3.2 • Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et $b = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. b étant génératrice, tout vecteur x de E s'écrit sous la forme :

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \quad \text{avec} \quad (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$$



Doc. 1 Coordonnées d'un vecteur x dans la base (e_1, e_2, e_3).

Supposons qu'il existe une autre décomposition : $x = \xi'_1 e_1 + \cdots + \xi'_n e_n$ avec $(\xi'_1, \cdots, \xi'_n) \in \mathbb{K}^n$. On aurait alors : $(\xi_1 - \xi'_1)e_1 + \cdots + (\xi_n - \xi'_n)e_n = 0$. Comme b est libre, cela entraîne $\xi_1 - \xi'_1 = \cdots = \xi_n - \xi'_n = 0$.

La décomposition de x sur b est donc unique.

Les scalaires $\xi_1, \cdots, \xi_n$ s'appellent coordonnées de x dans la base b (*Doc.* 1).

Exemples de bases et de coordonnées :

1) Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ définie par :

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0) \quad \cdots \quad e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

est une base, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$. $\dim \mathbb{K}^n = n$.
Les coordonnées de $(a_1, \cdots, a_n)$ dans cette base sont les scalaires $a_1, \cdots, a_n$.

2) Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille :

$$(1, X, X^2, \cdots, X^n)$$

est une base, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.
Les coordonnées d'un polynôme dans cette base sont ses coefficients.

3) Si E et F sont deux K-espaces vectoriels munis de bases $(e_1, \cdots, e_p)$ et $(f_1, \cdots, f_n)$, la famille :

$$(e_i, 0)_{i \in [\![1,p]\!]} \ , \quad (0, f_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$$

de cardinal $p + n$, est une base de l'espace vectoriel produit $E \times F$.

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

Les coordonnées de (x, y) dans cette base sont celles de x suivies de celles de y.

APPLICATION 2

Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Soit a et b deux réels (on supposera b non nul) ; on désigne par E l'ensemble des suites (u_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

***1)** Montrer que E est une espace vectoriel ; en trouver une base.*

***2) a)** Montrer que pour $q \in \mathbb{R}^*$, la suite géométrique (q^n) appartient à E si et seulement si :*

$$q^2 - aq - b = 0 \qquad \textit{Équation caractéristique}$$

***b)** En déduire l'expression générale d'une suite élément de E lorsque l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes q_1 et q_2.*

***c)** On suppose que l'équation caractéristique a une racine double q_0 ; montrer que la suite (nq_0^n) appartient à E. En déduire l'expression générale d'une suite élément de E.*

***d)** On suppose que l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées distinctes $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Déterminer l'expression générale d'une suite élément de E.*

***3)** Exemples : Déterminer une suite réelle (u_n) vérifiant :*

***a)** $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$*
et $u_0 = 1 \quad u_1 = 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$
et $\quad u_0 = 2 \quad u_1 = -1$

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
et $\quad u_0 = 0 \quad u_1 = 1$

1) E est non vide (il contient la suite nulle), et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite élément de E est entièrement déterminée par ses deux premiers termes ; désignons par (p_n) la suite élément de E telle que $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, et par (q_n) celle qui vérifie $q_0 = 0$, $q_1 = 1$. Alors, pour toute suite (u_n) élément de E :

$$(u_n) = u_0(p_n) + u_1(q_n)$$

donc la famille $\Big((p_n), (q_n)\Big)$ engendre E. Comme ces deux suites ne sont pas colinéaires, cette famille est libre : c'est une base de E. On en déduit que $\dim E = 2$.

2) a) La suite (q^n) appartient à E si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n$, d'où comme $q \neq 0$: $q^2 - aq - b = 0$.

b) Si cette équation a deux racines réelles distinctes q_1, q_2, les suites (q_1^n) et (q_2^n) appartiennent à E. Comme elles ne sont pas colinéaires, elles forment une famille libre, et comme E est de dimension 2, cette famille est une base de E. Toute suite élément de E est donc de la forme :

$$(u_n) = \alpha(q_1^n) + \beta(q_2^n) \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

c) Supposons que l'équation caractéristique possède une racine double q_0, égale à $\dfrac{a}{2}$. Vérifions que la suite $(u_n) = (nq_0^n)$ appartient à E :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n & \\ &= (n+2)q_0^{n+2} - a(n+1)q_0^{n+1} - bnq_0^n \\ &= q_0^n\Big((n+2)q_0^2 - a(n+1)q_0 - bn\Big) \\ &= q_0^n\Big(n(q_0^2 - aq_0 - b) + q_0(2q_0 - a)\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme les suites (q_0^n) et (nq_0^n) ne sont pas colinéaires, elles forment une famille libre, et par conséquent une base de E. Toute suite élément de E est de la forme :

$$(u_n) = \alpha(q_0^n) + \beta(nq_0^n) \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

d) Supposons que l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$; les suites complexes $(r^n e^{in\theta})$ et $(r^n e^{-in\theta})$ vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On en déduit que les suites réelles $(r^n \cos n\theta)$ et $(r^n \sin n\theta)$ vérifient également cette relation, et sont par conséquent éléments de E. Comme elles ne sont pas colinéaires, elles forment une famille libre et donc une base de E. Toute suite élément de E est de la forme :

$$(u_n) = \alpha(r^n \cos n\theta) + \beta(r^n \sin n\theta) \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

3) a) L'équation caractéristique est :

$$q^2 - q + \frac{1}{2} = 0$$

elle a pour racines les complexes :

$$q = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4} \text{ et } \overline{q} = \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}.$$

La suite est donc de la forme :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\alpha \cos\frac{n\pi}{4} + \beta \sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Les valeurs initiales de u_0, u_1 donnent $\alpha = \beta = 1$; d'où :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

b) L'équation caractéristique est : $q^2 - q + \dfrac{1}{4} = 0$; elle a une racine double : $q = \dfrac{1}{2}$. La suite est donc de la forme :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha + \beta n)$$

Les valeurs initiales de u_0, u_1 donnent $\alpha = 2$, $\beta = -4$; d'où :

$$u_n = \frac{1-2n}{2^{n-1}}$$

c) Il s'agit de la célèbre suite de Fibonacci. L'équation caractéristique est : $q^2 - q - 1 = 0$; elle a deux racines réelles :

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La suite est donc de la forme :

$$u_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les valeurs initiales de u_0, u_1 donnent $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; d'où :

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

4 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

4.1 • Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie, et :

$$\dim F \leqslant \dim E$$

Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Démonstration

Posons $n = \dim E$. Les familles libres de F sont des familles libres de E; elles ont donc au plus n éléments. L'ensemble des cardinaux des familles libres de F est une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par n ; il admet donc un plus grand élément p. Comme dans la première partie du *théorème* 3, on en déduit l'existence d'une base de F à p éléments. Donc $\dim F = p$ et $\dim F \leqslant \dim E$.

Si $\dim F = \dim E$, une base de F est une famille libre de E à n éléments : c'est aussi une base de E, et $F = E$.

Plus généralement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie, tels que $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$. Cette propriété est très utile dans les exercices, car elle permet d'éviter d'avoir à démontrer l'autre inclusion, parfois difficile.

4.2 • Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle rang d'une famille $(x_1, \cdots, x_p)$ de p vecteurs de E, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille. On a donc :

- $\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant p$, car $(x_1, \cdots, x_p)$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$.
- $\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant n$, car $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- D'où $\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant \min(p, n)$.
- $\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_p) = p \iff (x_1, \cdots, x_p)$ est libre.
- $\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_p) = n \iff (x_1, \cdots, x_p)$ est génératrice de E.

Pour s'entraîner : ex. 8

4.3 • Dimensions de deux s.e.v. supplémentaires

Théorème 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si :

$$\dim F + \dim G = \dim E \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0\}$$

Démonstration

Soit $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \cdots, g_q)$ une base de G.

1) Supposons F et G supplémentaires. Alors $F \cap G = \{0\}$.

Comme $E = F + G$, la famille $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ est génératrice de E. Montrons qu'elle est libre. Si $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p + \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_q g_q = 0$, on en déduit : $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p = -\beta_1 g_1 - \cdots - \beta_q g_q$ qui appartient donc à F et à G.

Comme $F \cap G = \{0\}$, on a donc $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_p f_p = 0$ et, puisque $(f_1, \cdots, f_p)$ est libre, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$; de même, $\beta_1 g_1 + \cdots + \beta_q g_q = 0$; d'où $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$. En définitive, $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ est une base de E ; d'où $\dim E = p + q = \dim F + \dim G$.

2) Réciproquement, supposons que $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0\}$. On montre, comme ci-dessus, que la famille $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ est libre. Son cardinal est $p + q$, c'est-à-dire $\dim E$. C'est donc une base de E. Tout élément de E se décompose sur cette base et par conséquent $E = F + G$. Comme $F \cap G = \{0\}$, cette somme est directe. F et G sont donc supplémentaires.

On peut démontrer que dans tout espace vectoriel, tout sous-espace vectoriel possède des supplémentaires ; mais c'est beaucoup plus difficile.

Ce théorème démontre en même temps que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie possède des supplémentaires : les vecteurs utilisés dans le théorème de la base incomplète pour prolonger une base de F en une base de E engendrent un supplémentaire de E.

4.4 • Dimension d'une somme de s.e.v.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si la somme $F + G$ est directe, le théorème précédent permet d'écrire :

$$\dim (F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Dans le cas général, on cherche à se ramener à cette situation :

On remarquera l'analogie avec les cardinaux des ensembles finis.

Théorème 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$$

Démonstration

Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrons que $F + G = F' \oplus G$.

Il est clair que $F' + G \subset F + G$. De plus :

$$\forall x \in F + G \quad \exists (y, z) \in F \times G \quad x = y + z$$

et $\exists (y', y'') \in F' \times (F \cap G) \quad y = y' + y''$

d'où $x = y' + y'' + z$ avec $y' \in F'$ et $y'' + z \in G$. Donc $x \in F' + G$.

D'où $F + G = F' + G$.

Or $F' \cap G \subset F' \cap (F \cap G)$, donc $F' \cap G = \{0\}$.

La somme $F' + G$ est donc directe.

De $F + G = F' \oplus G$, on déduit $\dim(F+G) = \dim F' + \dim G$.

Or $\dim F' = \dim F - \dim(F \cap G)$;

d'où $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

5 Applications linéaires en dimension finie

5.1 • Image d'une base

Montrons qu'en dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Théorème 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $b = (e_1, \cdots, e_p)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.
Pour toute famille $(y_1, \cdots, y_p)$ de p éléments de F, il existe une application linéaire f de E dans F, et une seule, telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad f(e_i) = y_i$$

Démonstration

Si f existe, elle associe nécessairement au vecteur $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_p e_p$ de E, le vecteur $f(x) = \xi_1 f(e_1) + \cdots + \xi_p f(e_p) = \xi_1 y_1 + \cdots + \xi_p y_p$.

Réciproquement, on vérifie que l'application ainsi définie est bien linéaire.

5.2 • Rang d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base b avec $b = (e_1, \cdots, e_p)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f le rang de la famille $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$, qui est aussi la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Théorème 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p muni d'une base $b = (e_1, \cdots, e_p)$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$:

1) f est injective $\Leftrightarrow$ $f(b)$ est libre dans F $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} f = p$

2) f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(b)$ est génératrice de F $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} f = n$

3) f est bijective $\Leftrightarrow$ $f(b)$ est une base de F $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} f = p = n$

Démonstration

1) Supposons f injective, et considérons une combinaison linéaire des $f(e_i)$ qui s'annule : $\alpha_1 f(e_1)+\cdots+\alpha_p f(e_p)=0$. f étant linéaire, $f(\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_p e_p)=0$, et, comme $\operatorname{Ker} f=\{0\}$, $\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_p e_p=0$. La famille $(e_1,\cdots,e_p)$ étant libre, on en déduit que $\alpha_1=\cdots=\alpha_p=0$; c'est-à-dire que la famille $(f(e_1),\cdots,f(e_p))$ est libre. Son rang est donc p.

Réciproquement, si $(f(e_1),\cdots,f(e_p))$ est libre, soit x un élément de $\operatorname{Ker} f$.

Décomposons x sur la base b : $\quad x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_p e_p$.

$f(x)=\xi_1 f(e_1)+\cdots+\xi_p f(e_p)=0$.

D'où $\xi_1=\cdots=\xi_p=0$ et $x=0$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f=\{0\}$, c'est-à-dire que f est injective.

2) La famille $(f(e_1),\cdots,f(e_p))$ engendre $\operatorname{Im} f$. Donc f est surjective si et seulement si elle engendre F tout entier. Son rang est alors n.

3) f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

La conséquence suivante est immédiate, mais très utile dans la pratique :

On retrouve ici l'analogie entre ensembles finis et espaces vectoriels de dimension finie.

Corollaire 9.1

Si E et F sont des espaces vectoriels **de dimension finie**, et si $\dim E=\dim F$, une application linéaire f de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.
En particulier, un endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie** est inversible si et seulement s'il est inversible à gauche ou inversible à droite.

Par ailleurs, une condition nécessaire pour qu'il existe un isomorphisme entre E et F est qu'ils aient même dimension. Cette condition est suffisante puisqu'elle permet de construire un isomorphisme en faisant correspondre à une base b de E une base quelconque de F. On peut donc énoncer :

Corollaire 9.2

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.

5.3 • Théorème du rang

Le résultat suivant, très important dans la pratique, relie les dimensions de l'image et du noyau d'une application linéaire :

Théorème 10 (théorème du rang)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F.
1) $\operatorname{Im} f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.
2) $\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f=\dim E$.

En particulier, si f est une forme linéaire non nulle, $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et par conséquent :

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - 1$$

On dit que $\operatorname{Ker} f$ est un **hyperplan** de E.

Démonstration

1) Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, et g la restriction de f à G comme ensemble de départ et $\operatorname{Im} f$ comme ensemble d'arrivée.

$\operatorname{Ker} g = G \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc g est injective.

$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im} f$, ce qui signifie que $\exists x \in E \quad y = f(x)$. Comme $E = G \oplus \operatorname{Ker} f$, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in G$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} f$.

$f(x) = f(x_1) + f(x_2)$.

$f(x_2) = 0$, donc $y = f(x_1) = g(x_1)$; d'où $y \in \operatorname{Im} g$. Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. En définitive $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$, donc g est surjective.

g est donc un isomorphisme de G dans $\operatorname{Im} f$.

2) On en déduit que $\dim G = \dim \operatorname{Im} f$.

Or $\dim G = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$.

On a bien $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Pour s'entraîner : ex. 9 et 10

APPLICATION 3

Utilisation du théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et u, v deux endomorphismes de E tels que :

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$$

Démontrer que ces sommes sont directes.

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) &= \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v \\ &\quad - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = \dim E.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v) &= \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v \\ &\quad - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = \dim E.\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned}&(\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u) + (\dim \operatorname{Im} v + \dim \operatorname{Ker} v) \\ &-\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = 2\dim E.\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u &= \dim \operatorname{Im} v + \dim \operatorname{Ker} v \\ &= \dim E.\end{aligned}$$

Il reste donc :

$$-\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = 0 \ ;$$

d'où :

$$\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = 0 \text{ et } \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = 0.$$

On a donc bien :

$$\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}.$$

Donc $\quad E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker} v.$

MÉTHODE

Pour montrer qu'une famille finie de vecteurs d'un e.v. E est libre, on peut :

- écrire une combinaison linéaire des éléments de cette famille qui s'annule et démontrer que tous les coefficients sont nuls (*cf. Application* 1 *et exercices* 2 *et* 3) ;
- supposer que l'un des éléments de cette famille est combinaison linéaire des autres et aboutir à une contradiction.

Pour montrer qu'une famille de vecteurs d'un e.v. E est génératrice, on montre que tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de cette famille.

Pour montrer qu'une famille de vecteurs b d'un e.v. E est une base :

- si on ne connaît pas la dimension de E, il suffit de montrer que b est libre et génératrice ;
- si on sait que E est de dimension finie n, il suffit de montrer que b possède n éléments et qu'elle est libre (ou qu'elle possède n éléments et qu'elle est génératrice) (*cf. Exercice résolu*).

Pour construire une base d'un e.v. de dimension finie, on peut :

- compléter une famille libre à l'aide du théorème de la base incomplète (*cf. exercice* 7) ;
- en particulier, compléter une base d'un sous-espace vectoriel ;
- retirer d'une famille génératrice finie, un élément qui est combinaison linéaire des autres, et recommencer jusqu'à obtenir une famille libre (*cf. exercices* 5 *et* 6) ;
- réunir des bases de deux s.e.v. supplémentaires.

Pour raisonner sur les dimensions de sous-espaces vectoriels F et G d'un e.v. de dimension finie E, on utilise les relations :

- $F \subset G \quad \Rightarrow \quad \dim F \leqslant \dim G$
- $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
- $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Pour raisonner sur des applications linéaires entre deux e.v. E et F, où E est de dimension finie, l'outil essentiel est le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$$

(*cf. exercices* 9, 10 *et* 14).

Pour montrer qu'une application linéaire f entre deux e.v. E et F de dimension finie est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective $(\operatorname{Ker} f = \{0\})$, et que $\dim E = \dim F$.

Exercice résolu

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Soit Δ *l'application de* $\mathbb{R}[X]$ *dans lui-même :* $P \mapsto \Delta P = P(X+1) - P(X)$.

1 *Montrer que* Δ *est un endomorphisme de l'e.v.* $\mathbb{R}[X]$.

2 *Déterminer le noyau de* Δ.

3 *Montrer que :* $\forall n \geqslant 1 \quad \Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. *En déduire* $\operatorname{Im} \Delta$.

4 *Soit* F *l'ensemble des polynômes* P *de* $\mathbb{R}[X]$ *tels que* $P(0) = 0$.

a) *Montrer que* F *est un s.e.v. de* $\mathbb{R}[X]$ *supplémentaire de* $\operatorname{Ker} \Delta$.

b) *Montrer que la restriction* Δ_F *de* Δ *à* F *est un isomorphisme d'e.v. de* F *sur* $\mathbb{R}[X]$.

5 ***a)*** *Montrer qu'il existe une suite* $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *et une seule, d'éléments de* $\mathbb{R}[X]$ *telle que* $N_0 = 1$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad N_n(0) = 0 \quad ; \quad \Delta N_n = N_{n-1}$.

b) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_n(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

c) *Montrer que* $(N_0, N_1, \cdots, N_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

6 *Soit* $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) *Montrer que les coordonnées de* Q *dans la base* $(N_0, N_1, \cdots, N_n)$ *sont :*

$$(Q(0), \Delta Q(0), \Delta^2 Q(0), \cdots, \Delta^n Q(0))$$

b) *Application : Déterminer l'unique polynôme* Q *de* $\mathbb{R}_3[X]$ *tel que :*

$$Q(0) = 1\ ,\ Q(1) = 2\ ,\ Q(2) = -1\ ,\ Q(3) = -2$$

Conseils

Une fonction polynomiale peut-elle être périodique sans être constante ?

On ne peut pas appliquer le théorème du rang à Δ, mais seulement à sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution

1) Quels que soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha P_1 + \beta P_2) &= (\alpha P_1 + \beta P_2)(X+1) - (\alpha P_1 + \beta P_2)(X) \\
&= \alpha(P_1(X+1) - P_1(X)) + \beta(P_2(X+1) - P_2(X)) \\
&= \alpha \Delta P_1 + \beta \Delta P_2 .
\end{aligned}$$

L'application Δ est donc linéaire.

2) Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$: $P(X+1) - P(X) = 0$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n) = P(0)$. Le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines ; il est donc nul. P est un polynôme constant. Réciproquement, tout polynôme constant est élément de $\operatorname{Ker} \Delta$. $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.

3) $\deg(\Delta P) < \deg(P)$, donc $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$. Appliquons le théorème du rang à Δ_n : $\dim \operatorname{Ker} \Delta_n = 1$, donc $\dim \operatorname{Im} \Delta_n = n$.

On a donc $\dim \Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où l'égalité :

$$\Delta(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

On en déduit que Δ est surjective : $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}[X]$.

4) a) F est non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Il est clair que $F \cap \operatorname{Ker} \Delta = \{0\}$. De plus, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire $P = P(0) + X\,Q$, où $P(0) \in \operatorname{Ker} \Delta$ et $X\,Q \in F$. D'où $\operatorname{Ker} \Delta \oplus F = \mathbb{R}[X]$.

On reprend ici la démonstration du théorème du rang : $\operatorname{Im} \Delta$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} \Delta$.

b) $\operatorname{Ker} \Delta_F = \operatorname{Ker} \Delta \cap F = \{0\}$, donc Δ_F est injectif. Montrons qu'il est surjectif. Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ a un antécédent Q par Δ, que l'on peut décomposer en $Q = Q_1 + Q_2$, avec $Q_1 \in \operatorname{Ker} \Delta$ et $Q_2 \in F$. On a $P = \Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2$; or $\Delta Q_1 = 0$, donc $P = \Delta Q_2$. P a bien un antécédent dans F par Δ ou, ce qui revient au même, par Δ_F.

Δ_F est donc un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}[X]$.

5) a) Par récurrence, chaque polynôme N_i a un antécédent unique N_{i+1} dans F par l'isomorphisme Δ_F.

b) Vérifions que cette suite satisfait bien aux hypothèses de la question précédente : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n(0) = 0$ et :

$$\begin{aligned}
\Delta N_n &= N_n(X+1) - N_n(X) \\
&= \frac{(X+1)X\cdots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-n+2)}{n!}(X+1-(X-n+1)) \\
&= \frac{X(X-1)\cdots(X-n+2)}{(n-1)!} = N_{n-1}
\end{aligned}$$

c) Les polynômes $(N_0, \cdots, N_n)$ sont de degrés tous distincts ; ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ (*cf. Application* 1). Comme il y en a $(n+1)$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6) a) Écrivons *a priori* $Q = \alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \cdots + \alpha_n N_n$. On a successivement $Q(0) = \alpha_0$, $\Delta Q = \alpha_1 N_0 + \alpha_2 N_1 + \cdots + \alpha_n N_{n-1}$, $\Delta Q(0) = \alpha_1$, etc. De proche en proche, on montre que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k = \Delta^k Q(0)$.

b) On peut obtenir facilement les coordonnées de Q dans la base (N_0, N_1, N_2, N_3) :

$$\begin{array}{llll}
Q(0) = 1 & Q(1) = 2 & Q(2) = -1 & Q(3) = -2 \\
\Delta Q(0) = 1 & \Delta Q(1) = -3 & \Delta Q(2) = -1 & \\
\Delta^2 Q(0) = -4 & \Delta^2 Q(1) = 2 & & \\
\Delta^3 Q(0) = 6 & & &
\end{array}$$

Chercher d'autres méthodes pour déterminer le polynôme Q.

D'où :

$$Q = N_0 + N_1 - 4N_2 + 6N_3 = 1 + X - 4\,\frac{X(X-1)}{2} + 6\,\frac{X(X-1)(X-2)}{6}$$

soit $$Q = X^3 - 5X^2 + 5X + 1$$

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une famille de vecteurs est libre si et seulement si ses éléments ne sont pas colinéaires deux à deux.

b) Une famille (x_i) est liée si :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \ \Rightarrow\ (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$$

c) Une famille est liée si et seulement si chacun de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

d) Une famille génératrice finie ne peut avoir moins d'éléments qu'une famille libre.

e) Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de strictement plus de n éléments est liée.

f) Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de moins de n éléments est libre.

g) Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de n éléments est une base.

h) Si F et G sont deux s.e.v. supplémentaires dans E, $\dim F + \dim G = \dim E$.

i) Tout endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie est un automorphisme.

j) Pour tout endomorphisme f de E, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Familles libres ou liées

2 Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

a) $x_1 = (1, 1, 0)$ $\quad x_2 = (0, 1, 1)$

b) $x_1 = (0, 0, 1)$ $\quad x_2 = (0, 1, 1)$ $\quad x_3 = (1, 1, 1)$

c) $x_1 = (0, 1, -1)$ $\quad x_2 = (1, 0, -1)$ $\quad x_3 = (1, -1, 0)$

d) $x_1 = (1, 1, -1)$ $\quad x_2 = (1, -1, 1)$ $\quad x_3 = (-1, 1, 1)$
$x_4 = (1, 1, 1)$

3 Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles libres ou liées ?

a) $f_1 : x \mapsto \cos x \quad f_2 : x \mapsto \sin x \quad f_3 : x \mapsto 1$;

b) $f_1 : x \mapsto \cos^2 x \quad f_2 : x \mapsto \cos 2x \quad f_3 : x \mapsto 1$;

c) $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ étant n réels distincts deux à deux ;

d) $f_k : x \mapsto \sin kx \quad k \in [\![1, n]\!]$.

4 * **1)** Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et f un endomorphisme non nul de E tel que, pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Démontrer que f est une homothétie vectorielle.

2) En déduire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tout endomorphisme de E.

Bases et dimension

5 Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

a) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ,\ x - 2y + 3z = 0 \}$;

b) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ,\ x = 2y = 3z \}$;

c) $\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ,\ x + y = 0 \ ;\ y + z = 0 \ ;\ z + t = 0 \ ;\ t + x = 0 \}$;

d) $\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \ ,\ P(1) = 0 \}$;

e) ensemble des suites arithmétiques ;

f) ensemble des fonctions dont la dérivée seconde est nulle ;

g) ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0.$$

6 Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \mapsto (x - y, y - x, 0)$;

b) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$;

c) $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto z + i\bar{z}$;

d) $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \qquad P \mapsto P - (X + 1)P'$.

7 Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1) \quad e_2 = (1, 1, -1, -1).$$

8 Déterminer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}^4$:

a) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$ $\quad x_2 = (1, -1, 1, 0)$
$x_3 = (2, 0, 1, 1)$ $\quad x_4 = (0, -2, 1, -1)$

b) $x_1 = (0, 1, 1, 1)$ $\quad x_2 = (1, 0, 1, 1)$
$x_3 = (1, 1, 0, 1)$ $\quad x_4 = (1, 1, 1, 0)$

c) $x_1 = (0, 1, 0, 1)$ $\quad x_2 = (1, -1, 1, -1)$
$x_3 = (1, -1, -1, 1)$ $\quad x_4 = (1, 1, 1, 1)$

Applications linéaires en dimension finie

9 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et F, G deux s.e.v. de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\operatorname{Ker} u = G$.

10 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$ si et seulement si n est pair.

11 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et f, g deux applications linéaires de E dans F. Montrer que :

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

12 Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire que : $\exists p \in \mathbb{N}^*\ f^p = 0 \quad (1)$

Soit p_0 le plus petit entier vérifiant (1) (on l'appelle indice de nilpotence de f). Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p_0-1}(x) \neq 0$ et que la famille $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p_0-1}(x))$ est libre.
Comparer p_0 et n. En déduire que $f^n = 0$.

On rappelle dans la suite que si f et g sont deux endomorphismes de E, on note $f \circ g = fg$.

13* Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que $fgf = f$ et $gfg = g$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E, et que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g$ sont supplémentaires dans F.

2) Montrer que f, g, fg et gf ont le même rang.

14* Soit E, F, G, H quatre $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $h \in \mathcal{L}(G,H)$.

1) Montrer que $\quad \operatorname{rg}(gf) = \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$

(appliquer le théorème du rang à la restriction de g à $\operatorname{Im} f$).

2) En déduire que :

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F \leqslant \operatorname{rg}(gf) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

3) Montrer que $\quad \operatorname{rg}(gf) + \operatorname{rg}(hg) \leqslant \operatorname{rg} g + \operatorname{rg}(hgf)$
(réutiliser le résultat de la question **1)**).

Exercices posés aux oraux des concours

15 (TPE 2006)

Montrer que la famille $(\ln p)$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

16 (Petites Mines 2000)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -f$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker}(f + Id_E) = \operatorname{Im} f$.

2) Si E est de dimension finie, montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im}(f + Id_E)$.

17 (Petites Mines 2003)

Soit $n \geqslant 1$; on pose, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \neq \beta$:
$E(\alpha) = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\quad P(\alpha) = 0\}$;
$E(\beta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\quad P(\beta) = 0\}$;
$E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\quad P(\alpha) = P(\beta) = 0\}$.

1) $E(\alpha), E(\beta)$ et E sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$?

2) Soit $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \xrightarrow{u} & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(\alpha)X + P(\beta) \end{array} \right.$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.

3) Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = E(\alpha) + E(\beta)$.

4) La somme est-elle directe ?

18 (Petites Mines 2004)

Soit $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \xrightarrow{f_a} & \mathbb{R}_3 \\ P & \mapsto & P(-2), P(2), P(a) \end{array} \right.$.

1) Déterminer en discutant suivant la valeur de a le noyau et le rang de f_a.

2) Existe-t-il une solution de degré 2 de l'équation $f_a(p) = (3, 2, 1)$?
Est-elle unique ?

3) Trouver les solutions de degré 2 au plus, puis résoudre complètement l'équation ci-dessus.

24 Matrices

INTRODUCTION

Une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n, tous deux munis de bases, est entièrement déterminée par np scalaires, coordonnées dans F des images des éléments de la base de E. On peut disposer ces scalaires en un tableau à n lignes et p colonnes, appelé matrice. Tout se ramène alors à un calcul sur ces nouveaux objets. Les algorithmes de calcul sur les matrices sont facilement programmables, et servent de support à l'étude de problèmes d'algèbre linéaire à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs.

L'invention du calcul matriciel est l'œuvre d'Arthur Cayley (1821-1895).

OBJECTIFS

- Initiation au calcul matriciel.
- Maîtrise de la représentation matricielle des applications linéaires.
- Pratique du changement de bases.

1 Espace vectoriel $M_{np}(\mathbb{K})$

1.1 • Matrices à n lignes et p colonnes

Soit $\mathbb{K}$ le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes (ou de type (n, p)) à coefficients dans $\mathbb{K}$, une application :

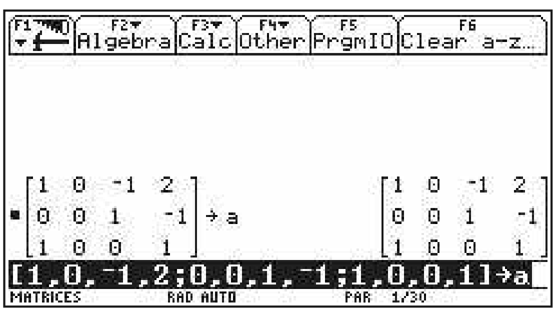
$$\left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \overset{A}{\to} & \mathbb{K} \\ (i,j) & \mapsto & a_{ij} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire la donnée de np éléments de $\mathbb{K}$, que l'on peut disposer en tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Une matrice étant définie comme une application, deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même type et si leurs coefficients correspondants sont égaux.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les valeurs de n et p, la matrice A sera notée $A = (a_{ij})$. Le premier indice du coefficient a_{ij} est appelé indice de ligne et le second, indice de colonne. L'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.



On peut saisir une matrice en donnant entre crochets la liste de ses coefficients, séparés par des virgules ; on change de ligne par un point-virgule.
Le menu `MATH/Matrix` donne accès à de nombreuses fonctions concernant les matrices. Consulter le manuel de la calculatrice.

On appelle matrice carrée d'ordre n une matrice de type (n, n). Ses coefficients dont les indices de ligne et de colonne sont égaux sont appelés coefficients diagonaux. La famille des coefficients diagonaux est appelée diagonale de la matrice. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 • Addition des matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle somme des matrices A et B, la matrice $A + B = (c_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette addition est une opération interne dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On vérifie facilement qu'elle est commutative et associative ; la matrice nulle de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (matrice dont tous les coefficients sont nuls) est élément neutre ; toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ possède une opposée : $-A = (-a_{i,j})$. On peut donc énoncer :

$(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

1.3 • Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle produit de la matrice A par le scalaire α la matrice $\alpha A = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Exemple :

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & -9 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que cette opération externe satisfait aux quatre propriétés de la définition d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

$(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Par exemple, dans $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$:

$$E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 • Base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On remarque que $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$, où E_{ij} est la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

La famille $(E_{ij})_{(i,\, j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ engendre donc $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Or :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \quad a_{ij} = 0$$

La famille (E_{ij}) est donc libre. C'est une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, appelée base canonique. On en déduit :

$$\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$$

2 Multiplication matricielle

2.1 • Produit de deux matrices

Soit n, p, q trois entiers strictement positifs, A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ (le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B).

Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{jk})$ (par commodité, on choisit de donner le même nom à l'indice de colonne de A et à l'indice de ligne de B, qui parcourent le même intervalle $[\![1, p]\!]$).

On appelle produit des matrices A et B, la matrice $AB = (c_{ik})$ de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ (elle a le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B) définie par :

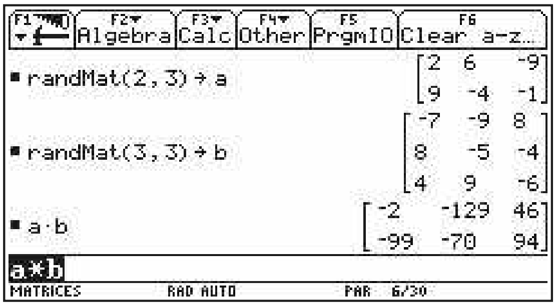
$$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!] \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$$

Dans la pratique, pour calculer le coefficient de la i-ième ligne, k-ième colonne de la matrice AB, on considère la i-ième ligne de A, la k-ième colonne de B et on fait la somme de leurs produits terme à terme :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

On peut adopter la disposition :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ c_{ik} \\ \\ \end{pmatrix} \end{array}$$



Produit de deux matrices.
(La fonction `randMat(n,p)` définit une matrice aléatoire à n lignes, p colonnes à coefficients entiers.)

Exemple : Utilisation de la calculatrice *(cf. ci-contre)*.

2.2 • Associativité

Soit n, p, q et r quatre entiers strictement positifs et A, B, C trois matrices telles que : $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$.

Posons : $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$

$$AB = (d_{ik}), \quad (AB)C = (e_{il}), \quad BC = (f_{jl}), \quad A(BC) = (g_{il})$$

$$\forall (i,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!] \quad e_{il} = \sum_{k=1}^{q} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

$$\forall (i,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!] \quad g_{il} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}f_{jl} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$$

L'ordre des sommations n'a pas d'importance :

$$\forall (i,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!] \quad e_{il} = g_{il}$$

d'où : $$(AB)C = A(BC)$$

La multiplication matricielle est associative.

2.3 • Bilinéarité

Théorème 1

Soit n, p, q trois entiers strictement positifs.

Pour toute matrice A fixée de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:

l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}) \\ B & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est linéaire.

Pour toute matrice B fixée de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$:

l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est linéaire.

On dit que l'application :

$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{nq} \times \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array} \right.$

est bilinéaire.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $(B, B') \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
Posons :

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jk}), \quad B' = (b'_{jk})$$

$$AB = (c_{ik}), \quad AB' = (d_{ik}), \quad A(\alpha B + \beta B') = (e_{ik}), \quad \alpha AB + \beta AB' = (f_{ik})$$

$$\forall (i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!] \qquad e_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}(\alpha b_{jk} + \beta b'_{jk})$$
$$= \sum_{j=1}^{p} (\alpha a_{ij} b_{jk} + \beta a_{ij} b'_{jk}) = \alpha c_{ik} + \beta d_{ik} = f_{ik}$$

d'où : $\quad A(\alpha B + \beta B') = \alpha AB + \beta AB'$

De même pour toute matrice $A' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:

$$(\alpha A + \beta A')B = \alpha AB + \beta A' B$$

APPLICATION 1

Produit par blocs

Soit A une matrice de type (n, p) où $n = n_1 + n_2$ et $p = p_1 + p_2$ (n_1, n_2, p_1 et p_2 étant des entiers strictement positifs).
On peut écrire A sous forme de « blocs » :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} sont des matrices de types respectifs (n_1, p_1), (n_1, p_2), (n_2, p_1) et (n_2, p_2).
Considérons une seconde matrice B de type (p, q) où $q = q_1 + q_2$ (q_1 et q_2 étant des entiers strictement positifs).
On peut également écrire B sous forme de blocs :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

où B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} sont des matrices de types respectifs (p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_2, q_1) et (p_2, q_2).

Calculons le produit AB :

Pour $(i, k) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, q_1]\!]$:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{p_1} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} a_{ij} b_{jk}$$

On reconnaît le coefficient (i, k) de la matrice $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$.
Le calcul est le même quelle que soit la place de i par rapport à n_1 et de k par rapport à q_1.
Si bien que l'on peut écrire :

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Tout se passe comme si A et B étaient des hypermatrices de type $(2, 2)$, dont les coefficients seraient les blocs...
Ce principe de calcul se généralise à un nombre quelconque de blocs, du moment que la partition des colonnes de A coïncide avec celle des lignes de B.

3 Anneau des matrices carrées d'ordre n

3.1 • Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est muni de deux opérations internes :

- L'addition $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & A + B \end{array}\right.$

Nous savons déjà que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de cette opération est un groupe commutatif.

- La multiplication $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array}\right.$

Nous savons que cette opération est associative et, du fait de la bilinéarité, distributive par rapport à l'addition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle admet pour élément neutre la matrice :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

appelée matrice unité d'ordre n.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Remarques :

1) La multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutative (sauf si $n = 1$). Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors que :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*En particulier, il faudra prendre garde à n'appliquer la formule du binôme qu'à la somme de deux matrices **qui commutent**.*

2) Il existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des diviseurs de zéro, c'est-à-dire des matrices non nulles dont le produit peut être nul.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe aussi des matrices carrées nilpotentes, c'est-à-dire des matrices dont une puissance est nulle :

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour s'entraîner : ex. 2 à 4

APPLICATION 2

Calcul des puissances d'une matrice carrée

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $B = A - I_4$. *Calculer* B^n, *puis* A^n.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\forall n \geqslant 4 \quad B^n = 0$. On en déduit A^n par la formule du binôme (car $BI_4 = I_4 B$) :

$$\forall n \geqslant 4$$

$$A^n = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} B^k = I_4 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} B^3.$$

On vérifie directement que cette formule reste vraie pour $n \in [\![0, 3]\!]$.

Pour s'entraîner : ex. 5 à 7

3.2 • Éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Comme dans tout anneau, on sait que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif. On l'appelle groupe linéaire et il est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 2

Une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est inversible à droite ***ou*** inversible à gauche.

Démonstration

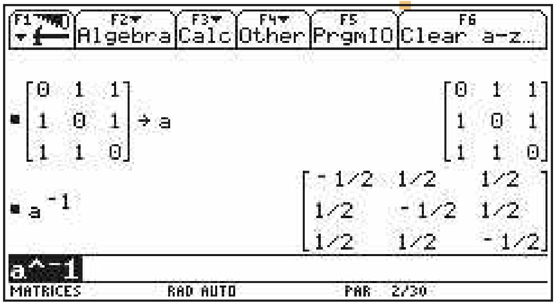
Il est clair que si A est inversible, elle est inversible à gauche et à droite. Supposons A inversible à gauche, c'est-à-dire que :

$$\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A'A = I_n$$

Soit f_A l'application : $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

f_A est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Or :

$$X \in \operatorname{Ker} f_A \implies AX = 0 \implies A'AX = 0 \implies X = 0.$$



Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible.

f_A est injectif, et comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il est bijectif. La matrice I_n possède donc un antécédent, c'est-à-dire une matrice $A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA'' = I_n$. A est donc aussi inversible à droite (ce qui implique, on le sait, que ses inverses à droite et à gauche sont égaux : $A' = A''$).

On procède de même en supposant A inversible à droite (il faut considérer l'application $X \mapsto XA$).

Nous étudierons dans le chapitre suivant une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible. En attendant, nous pourrons nous servir de la calculatrice *(cf. ci-contre)*.

Pour s'entraîner : ex. 8 et 11

4 Matrice d'une application linéaire

4.1 • Représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $b = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$. On peut représenter un vecteur x de E par la matrice unicolonne, notée $M_b(x)$, formée par ses coordonnées dans la base b :

$$\text{Si} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \quad , \quad M_b(x) = X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Plus généralement, on peut représenter une famille de p vecteurs de E $(p \in \mathbb{N}^*)$ par la matrice de type (n, p) dont la j-ième colonne représente les coordonnées du j-ième vecteur de la famille dans la base b :

$$\text{Si} \quad x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} e_i \quad , \quad M_b(x_1, \cdots, x_p) = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1p} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{np} \end{pmatrix}$$

4.2 • Représentation matricielle d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \geqslant 1$, muni d'une base $b = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base :

$$b' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$$

Une application linéaire f de E dans F est caractérisée par l'image de la base b, c'est-à-dire par la famille de p vecteurs de F :

$$\big(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\big)$$

D'après ce qui précède, on peut représenter cette famille par une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, que l'on appelle matrice de f relativement au système de bases (b, b') et que nous noterons $M_{b'}^{b}(f)$:

$$\text{Si} \quad \forall j \in [\![1, p]\!] \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i \ , \quad M_{b'}^{b}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit f : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & (X+1)P - P' \end{array} \right.$

Soit $b = (X^2, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $b' = (X^3, X^2, X, 1)$ celle de $\mathbb{R}_3[X]$. Cherchons les images par f des éléments de la base b :

$$f(X^2) = X^3 + X^2 - 2X \qquad f(X) = X^2 + X - 1 \qquad f(1) = X + 1$$

La matrice de f dans le système de bases (b, b') est donc :

$$M_{b'}^{b}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définit une application linéaire, et une seule, d'un espace vectoriel de dimension p dans un espace vectoriel de dimension n munis chacun d'une base.

En conclusion, des bases b et b' de E et F étant choisies, l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_{b'}^{b}(f) \end{array} \right.$$

est bijective.

En particulier, la matrice A représente une unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ relativement aux bases canoniques de ces espaces vectoriels ; on l'appelle application linéaire canoniquement associée à A.

On peut exploiter dans les deux sens cette correspondance entre matrices et applications linéaires : tout problème portant sur des applications linéaires en dimension finie peut avoir une traduction matricielle, qui a l'avantage d'être plus concrète et de bien se prêter aux calculs, y compris sur machine.

Réciproquement, tout problème portant sur des matrices peut être interprété en termes d'applications linéaires, ce qui donne accès à de puissants moyens de démonstration (image, noyau, dimensions, bases, etc.).

4.3 • Expression matricielle de l'application linéaire

Voyons comment utiliser la matrice d'une application linéaire pour calculer l'image d'un vecteur donné.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $b = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $b' = (e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$, f une application linéaire de E dans F représentée dans les bases b et b' par la matrice A.

Soit x un vecteur de E représenté dans la base b par la matrice unicolonne :

$$X = M_b(x) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}$$

Cela signifie que $\quad x = \sum_{j=1}^{p} \xi_j e_j.$

D'où :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \xi_j \right) e'_i$$

La matrice représentant le vecteur $f(x)$ dans la base b' est donc :

$$Y = M_{b'}(f(x)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \xi_j$$

On reconnaît la définition d'un produit de matrices :

$$Y = AX$$

Dans le cas $n = p = 1$, on retrouve la définition d'une application linéaire de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$: $x \mapsto ax$.

L'effet de l'application linéaire f revient donc pour les matrices unicolonnes représentant les vecteurs à une multiplication à gauche par la matrice A.

Pour s'entraîner : ex. 12 à 15

4.4 • Matrice de la somme de deux applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F, représentées respectivement par les matrices A et B relativement aux bases b et b'.

$$\forall x \in E \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)\ , \text{ soit matriciellement :}$$

$$Y = AX + BX = (A+B)X$$

La matrice représentant $f+g$ dans les bases b et b' étant unique, c'est nécessairement $A+B$.

$$M^b_{b'}(f+g) = M^b_{b'}(f) + M^b_{b'}(g)$$

On montre de même que, pour tout scalaire α :

$$M^b_{b'}(\alpha f) = \alpha M^b_{b'}(f)$$

Ces deux relations expriment que l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M^b_{b'}(f) \end{array} \right.$$

est linéaire. Comme elle est évidemment bijective, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On a, en particulier, l'égalité des dimensions :

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$$

4.5 • Matrice de la composée de deux applications linéaires

Soit : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \geqslant 1$, muni d'une base b,
F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base b',
G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $q \geqslant 1$, muni d'une base b''.

Soit : $f \in \mathcal{L}(E,F) \quad A = M^{b}_{b'}(f)$
$g \in \mathcal{L}(F,G) \quad B = M^{b'}_{b''}(g)$

Soit $x \in E$, tel que $M_b(x) = X$. Alors :

$$M_{b'}(f(x)) = Y = AX \quad \text{et} \quad M_{b''}(g \circ f(x)) = Z = BY = BAX.$$

C'est cette relation qui justifie la définition de la multiplication matricielle. En fait, la multiplication des matrices a été inventée pour décrire des compositions d'applications linéaires.

La matrice représentant $g \circ f$ dans les bases b et b'' étant unique, c'est nécessairement BA.

$$M^{b}_{b''}(g \circ f) = M^{b'}_{b''}(g)\, M^{b}_{b'}(f)$$

4.6 • Matrice carrée d'un isomorphisme

Si f est un isomorphisme de E dans F (ce qui n'est possible que si $\dim E = \dim F$), on a : $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. D'où :

$$M^{b}_{b'}(f)\, M^{b'}_{b}(f^{-1}) = M^{b'}_{b'}(\mathrm{Id}_F) = I_n \quad \text{et} \quad M^{b'}_{b}(f^{-1})\, M^{b}_{b'}(f) = M^{b}_{b}(\mathrm{Id}_E) = I_n$$

On en déduit que la matrice $M^{b}_{b'}(f)$ est inversible et :

$$M^{b}_{b'}(f)^{-1} = M^{b'}_{b}(f^{-1})$$

4.7 • Matrice carrée d'un endomorphisme

Dans le cas d'un endomorphisme, on peut choisir la même base dans E en tant qu'espace de départ et en tant qu'espace d'arrivée. On écrira alors simplement $M_b(u)$ pour la matrice représentant l'endomorphisme u dans la base b.

$$\text{L'application : } \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & M_b(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espace vectoriels et d'anneaux.

u est un automorphisme de E si et seulement si la matrice $M_b(u)$ est inversible et :

$$M_b(u)^{-1} = M_b(u^{-1})$$

Ceci explique la terminologie commune utilisée pour décrire l'ensemble des automorphismes de E (groupe linéaire de E) et l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n (groupe linéaire d'ordre n de $\mathbb{K}$).

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}(E) & \to & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & M_b(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes.

5 Changement de bases

5.1 • Effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, muni de deux bases $b = (e_1, \cdots, e_n)$ et $b' = (e'_1, \cdots, e'_n)$. Soit x un vecteur de E ; on peut le représenter dans chacune des bases par une matrice unicolonne :

$$\text{Si} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i e'_i$$

$$M_b(x) = X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{b'}(x) = X' = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$$

Comme $x = \mathrm{Id}_E(x)$, on peut écrire : $\quad M_b(x) = M_b^{b'}(\mathrm{Id}_E)\, M_{b'}(x)$

C'est-à-dire :

$$\boxed{X = P\,X'}$$

où P est la matrice représentant l'identité de E relativement aux bases b' au départ et b à l'arrivée. La j-ième colonne de P représente les coordonnées de e'_j dans la base b. Cette matrice P est appelée matrice de passage de la base b à la base b' (attention à l'ordre !).

Quand on effectue le changement de base de b à b', on appelle volontiers b « ancienne base » et b' « nouvelle base ». La matrice de passage donne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base, ce qui correspond bien à ce que l'on connaît en général. La formule $X = PX'$ exprime les anciennes coordonnées d'un vecteur en fonction des nouvelles, et c'est aussi dans ce sens qu'on en a besoin.

Comme elle représente l'identité, une matrice de passage est inversible. L'inverse de la matrice de passage de b à b' est la matrice de passage de b' à b.

Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ dans la base constituée des vecteurs colonnes.

Exemple : Soit dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ les bases :

$$b = (X^3, X^2, X, 1) \qquad \text{et} \qquad b' = \big((X-1)^3, (X-1)^2, X-1, 1\big)$$

(b' est une base parce qu'elle a quatre éléments de degrés tous distincts).

La matrice de passage de b à b' est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit un polynôme :

$$Q = aX^3 + bX^2 + cX + d = a'(X-1)^3 + b'(X-1)^2 + c'(X-1) + d'$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} a = a' \\ b = -3a' + b' \\ c = 3a' - 2b' + c' \\ d = -a' + b' - c' + d' \end{cases}$$

5.2 • Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases b_1 et b'_1, P la matrice de passage de b_1 à b'_1, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases b_2 et b'_2, Q la matrice de passage de b_2 à b'_2.

Soit f une application linéaire de E dans F ; on peut la représenter matriciellement dans chacun des systèmes de bases :

$$A = M_{b_2}^{b_1}(f) \qquad A' = M_{b'_2}^{b'_1}(f)$$

En remarquant que $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$, on peut écrire :

$$M_{b'_2}^{b'_1}(f) = M_{b'_2}^{b_2}(\mathrm{Id}_F)\, M_{b_2}^{b_1}(f)\, M_{b_1}^{b'_1}(\mathrm{Id}_E)$$

C'est-à-dire :

$$A' = Q^{-1} A P$$

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, telles qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A' = Q^{-1} A P$, sont dites **équivalentes**. En interprétant P et Q comme des matrices de passage, on voit que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.

5.3 • Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux bases b et b', et P la matrice de passage de b à b'. Soit u un endomorphisme de E ; on peut le représenter matriciellement dans chacune des bases (en choisissant à chaque fois la même base pour E en tant qu'espace de départ et en tant qu'espace d'arrivée) :

$$A = M_b(u) \qquad \text{et} \qquad A' = M_{b'}(u)$$

On peut reprendre le même calcul que pour une application linéaire quelconque, en remarquant qu'ici $Q = P$.

D'où :

$$A' = P^{-1} A P$$

Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A' = P^{-1} A P$, sont dites semblables. En interprétant P comme une matrice de passage, on voit que deux matrices carrées sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases, prises simultanément comme base de départ et d'arrivée.

ATTENTION

Il ne faut pas confondre les notions de matrices équivalentes et matrices semblables. Tout d'abord, cette dernière ne concerne que les matrices carrées. Ensuite, s'il est clair que deux matrices carrées semblables sont équivalentes, la réciproque est fausse : deux matrices carrées équivalentes représentent un même endomorphisme d'un espace vectoriel E dans des systèmes de bases où l'on ne choisit pas nécessairement la même base pour décrire l'espace de départ et l'espace d'arrivée. Par exemple, n'importe quelle matrice inversible d'ordre n est équivalente à I_n, tandis que la seule matrice semblable à I_n est I_n elle-même.

Pour s'entraîner : ex. 18 et 19

APPLICATION 3

Un exemple de réduction de matrice

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique b par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) *Déterminer les s.e.v.* Ker u, Ker $(u - \mathrm{Id})$ *et* Ker $(u + \mathrm{Id})$.

2) *En déduire une base b' de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D représentant l'endomorphisme u soit diagonale.*

3) *Exprimer A en fonction de D.*

4) *En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$AX = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = z$, d'où :

$$\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$$

$AX = X \quad \Longleftrightarrow \quad x = -y$ et $z = 0$, d'où :

$$\mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0)\big)$$

$AX = -X \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$ et $y = z$, d'où :

$$\mathrm{Ker}\ (u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\big((0,1,1)\big)$$

2) La famille $b' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$ et $e'_3 = (0,1,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $u(e'_1) = 0$, $u(e'_2) = e'_2$ et $u(e'_3) = -e'_3$, la matrice représentant u dans cette base est :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) La matrice de passage de b à b' est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $D = P^{-1}AP$, d'où $A = PDP^{-1}$.

4) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

- Si n est impair, $D^n = D$, d'où $A^n = A$.
- Si n est pair : $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'où : $\quad A^n = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

6 Transposition

6.1 • Transposée d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ dont les lignes sont les colonnes de A et vice versa.

Si :

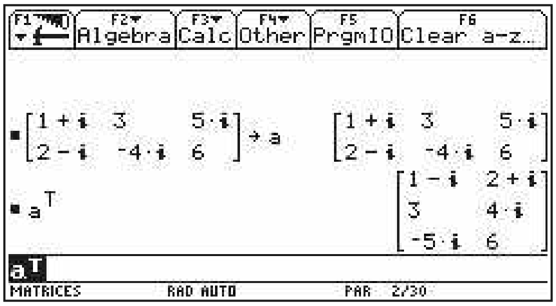
$$A = (a_{ij})\,, \qquad {}^tA = (a'_{ij})$$

où :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!] \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

Exemple :

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$



Adjointe d'une matrice

La TI-92/Voyage 200 permet de transposer une matrice **réelle** (il faut écrire A^T).

Attention : Pour une matrice à coefficients complexes, cette fonction donne **la conjuguée de la transposée** (qui est appelée matrice adjointe).

Théorème 3

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Démonstration

On montre facilement que cette application est linéaire : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad {}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB$

Par ailleurs, toute matrice C de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ est la transposée d'une unique matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, qui est ${}^tC$: notre application est donc bijective.

6.2 • Transposée d'un produit

Attention à l'ordre !

Théorème 4

Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$:

$$ {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA $$

Démonstration

Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $AB = (c_{ij})$.

${}^tA = (a'_{ij})$, ${}^tB = (b'_{ij})$, ${}^t(AB) = (c'_{ij})$, ${}^tB\, {}^tA = (d_{ij})$.

$$ c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik} a'_{kj} = d_{ij} \qquad \text{, d'où } {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA. $$

Corollaire 4.1

La transposée d'une matrice carrée inversible est inversible et :

$$ {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} $$

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En transposant l'égalité $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, on obtient : ${}^t(A^{-1})\, {}^tA = {}^tA\, {}^t(A^{-1}) = {}^tI_n = I_n$. ${}^t(A^{-1})$ est donc l'inverse de ${}^tA$.

Pour s'entraîner : ex. 21

6.3 • Matrices carrées symétriques et antisymétriques

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

A est dite symétrique si ${}^tA = A$, c'est-à-dire si :

$$ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{ji} = a_{ij} $$

(les coefficients symétriques par rapport à la diagonale sont égaux).

A est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{ji} = -a_{ij}$$

(les coefficients symétriques par rapport à la diagonale sont opposés ; en particulier, les coefficients diagonaux sont nuls).

Théorème 5

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On aurait pu aussi démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$ et que :

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

puis montrer que la somme de ces deux dimensions est celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire n^2.

Démonstration

Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A \mapsto {}^tA$. On remarque que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est le noyau de $T - \mathrm{Id}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ le noyau de $T + \mathrm{Id}$. Ce sont donc bien des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons que leur intersection est le singleton nul. Soit A une matrice carrée à la fois symétrique et antisymétrique : ${}^tA = A = -A$, d'où $A = 0$. Montrons ensuite que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

Or ${}^t\Big(\frac{1}{2}(A + {}^tA)\Big) = \frac{1}{2}({}^tA + A)$: la matrice $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ est symétrique.

${}^t\Big(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\Big) = \frac{1}{2}({}^tA - A)$: la matrice $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ est antisymétrique.

T est un endomorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est donc une symétrie. C'est précisément la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Pour s'entraîner : ex. 22

APPLICATION 4

Trace d'une matrice carrée

*Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A la somme de ses coefficients diagonaux :*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1) *Montrer que l'application Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2) *Montrer que*

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

3) *En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie ?*

4) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, et f, g deux endomorphismes de E tels que $fg - gf = \mathrm{Id}_E$. Démontrer que E n'est pas de dimension finie. Donner un exemple.*

1) Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et α, β deux scalaires.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \alpha\, \mathrm{Tr}(A) + \beta\, \mathrm{Tr}(B)\end{aligned}$$

L'application Tr est donc bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) $$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\\ &= \mathrm{Tr}(BA).\end{aligned}$$

3) Si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$.

On a alors :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(A).$$

Deux matrices semblables ont la même trace.

La réciproque est fausse : une matrice de trace nulle n'est pas nécessairement semblable à la matrice nulle (c'est-à-dire également nulle) !

4) Si E était de dimension n $(n \in \mathbb{N}^*)$, les matrices A et B représentant f et g dans une base de E vérifieraient :

$$AB - BA = I_n$$

Or $\mathrm{Tr}(AB-BA) = \mathrm{Tr}(AB)-\mathrm{Tr}(BA) = 0$, tandis que $\mathrm{Tr}(I_n) = n$. On aboutit donc à une contradiction.

L'égalité $fg - gf = \mathrm{Id}_E$ est, en revanche, possible dans un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie, par exemple dans $\mathbb{K}[X]$ avec :

$$f : P \mapsto P' \quad \text{et} \quad g : P \mapsto XP$$

pour tout polynôme P :

$$\begin{aligned}(fg - gf)(P) &= (XP)' - XP'\\ &= (P + XP') - XP' = P\end{aligned}$$

MÉTHODE

Pour calculer les puissances d'une matrice carrée, on peut :

- conjecturer le résultat à partir des premiers exposants, puis vérifier par récurrence (*cf. exercice* 5 a) b) c)) ;
- décomposer la matrice en une somme de deux matrices qui commutent et dont on calcule plus facilement les puissances ; utiliser ensuite la formule du binôme (*cf. Application* 2, *Exercice résolu, exercices* 5 d) e) *et* 6) ;
- chercher une matrice plus simple semblable à la matrice donnée (*cf. Application* 3) ;
- chercher un polynôme P qui annule la matrice donnée $(P(A) = 0)$, et effectuer la division euclidienne de P par X^n (*cf. exercice* 7) .

Pour représenter une application linéaire par une matrice, il faut :

- choisir des bases dans les e.v. de départ et d'arrivée ;
- écrire en colonnes les coordonnées des images des éléments de la base de départ relativement à la base d'arrivée (*cf. exercices* 12, 13 *et* 15).

Pour montrer qu'une matrice carrée A est inversible, on peut :

- chercher une matrice carrée B telle que $AB = I_n$ (*cf. exercice* 11) ;
- montrer que A représente un isomorphisme relativement à une base donnée (*cf. exercices* 17 *et* 20) .

Exercice résolu

SUITES MUTUELLEMENT RÉCURRENTES

Soit (x_n), (y_n) *et* (z_n) *trois suites réelles définies par leurs premiers termes* x_0, y_0, z_0 *et les relations de récurrence : pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \ ; \qquad y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \ ; \qquad z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

Étudier la convergence de ces trois suites.

Conseils

Expliciter la matrice A.

Peut-on utiliser une autre décomposition de A ?

Attention : La formule du binôme n'est pas toujours applicable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Écrire la matrice A^n.

Faire tendre n vers $+\infty$.

Solution

On peut écrire les formules de récurrence sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$. On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$. Il nous faut donc calculer la matrice A^n.

Notons pour cela que $A = \frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J$, où :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme I et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}J\right)^k \left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k}$$

On vérifie par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad J^k = 3^{k-1}J$. Il faut distinguer le cas $k = 0$, où $J^0 = I$.

$$\text{Si } n \geqslant 1 \quad A^n = \frac{1}{2^n}I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{6^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} \cdot 3^{k-1}\, J = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3 \cdot 2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\, J$$

D'où :

$$A^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n} J \quad \text{ceci pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_n = \frac{1}{3}\left((1 + \frac{1}{2^{n-1}})x_0 + (1 - \frac{1}{2^n})y_0 + (1 - \frac{1}{2^n})z_0 \right) \\ y_n = \frac{1}{3}\left((1 - \frac{1}{2^n})x_0 + (1 + \frac{1}{2^{n-1}})y_0 + (1 - \frac{1}{2^n})z_0 \right) \\ z_n = \frac{1}{3}\left((1 - \frac{1}{2^n})x_0 + (1 - \frac{1}{2^n})y_0 + (1 + \frac{1}{2^{n-1}})z_0 \right) \end{cases}$$

On en déduit que les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent vers la même limite : $\frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0)$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np.

b) $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un anneau.

c) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AA' = I_n$, alors $A'A = I_n$.

e) Une matrice représentant un isomorphisme dans des bases quelconques est inversible.

f) La matrice de passage d'une base b à une base b' est la matrice de l'identité relativement à b en tant que base de départ, et b' en tant que base d'arrivée.

g) Deux matrices semblables sont équivalentes.

h) Deux matrices carrées équivalentes sont semblables.

i) La transposée du produit AB est le produit ${}^tA\,{}^tB$.

j) Toute matrice carrée est de façon unique la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Structure d'un ensemble de matrices

2 Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (a,b) \in \mathbb{K}^2$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; en donner une base.

2) Montrer que E est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?

3) Déterminer les diviseurs de zéro de E.

4) Déterminer le groupe des éléments inversibles de E.

3 Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

1) Démontrer que E est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

2) En déduire le calcul de la matrice suivante, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$$

4 Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & 3c-3b & a-3c \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (a,b,c) \in \mathbb{K}^3$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$; en donner une base.

2) Montrer que E est un anneau commutatif.

Puissances d'une matrice carrée

5 Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^3. En déduire $(I_3 + A)^n$ pour $n \geqslant 3$.

7 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$.

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$.

4) En déduire la matrice A^n.

Calculs dans l'anneau des matrices carrées

8 Soit A une matrice carrée d'ordre n nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0$. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

9* Soit E_{ij}^{np} la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ comportant un 1 à la i-ième ligne, j-ième colonne et des 0 partout ailleurs. Calculer le produit $E_{ij}^{np}\, E_{kl}^{pq}$.

10* Déterminer le centre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui commutent avec toute matrice carrée d'ordre n.

(On pourra se servir des matrices E_{ij} définies dans l'exercice précédent.)

11* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I_n + A$ soit inversible. On pose :

$$B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

1) Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.

2) Montrer que $I_n + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Matrice d'une application linéaire

12 Déterminer les matrices relativement aux bases canoniques des applications linéaires suivantes :

a) $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y\,,\,y-z) \end{array}\right.$

b) $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-5y+4z \end{array}\right.$

c) $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array}\right.$

d) $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1),P(0),P(1)) \end{array}\right.$

13 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Écrire la matrice de f dans cette base.

14 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer Ker f et Im f. Démontrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$, réunion d'une base de Ker f et d'une base de Im f. Écrire la matrice de f dans cette base. Décrire f comme la composée de deux endomorphismes très simples.

15 Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

À toute matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on associe la matrice $f_A(X) = AX$. Montrer que f_A est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Écrire la matrice de f_A dans la base canonique $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

16 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Démontrer que :

1) $(\exists A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \quad AA' = I_n) \implies n \leqslant p$

2) $(\exists A'' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \quad A''A = I_p) \implies n \geqslant p$

Que peut-on en déduire lorsque $n \neq p$?

Montrer que lorsque $n = p$, $AA' = I_n \iff A'A = I_n$.

17 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, avec $n \neq p$. Montrer que les matrices carrées AB et BA ne sont pas toutes deux inversibles.

18* Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même : $A \mapsto P^{-1}AP$ est un automorphisme d'espace vectoriel et d'anneau.

En déduire que s'il existe un polynôme Q annulant la matrice A (c'est-à-dire tel que $Q(A) = 0$), alors Q annule aussi toute matrice semblable à A.

19* Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ sont semblables.

20* Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad |a_{ij}| < \frac{1}{n}$$

Démontrer que la matrice $I_n + A$ est inversible.

Transposition

21 Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

1) Démontrer que $\quad A\,{}^tA = 0 \implies A = 0$.

Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace le corps des réels par celui des complexes ?

2) Soit $B \in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$BA\,{}^tA = 0 \quad \Longrightarrow \quad BA = 0$$

3) Soit $C \in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$BA\,{}^tA = CA\,{}^tA \quad \Longrightarrow \quad BA = CA$$

22 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit symétrique.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices antisymétriques soit antisymétrique.

23 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M^2 + 2M - 3I_3$.

2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n en fonction de M et I_3.

3) Cette formule peut-elle être étendue à $n \in \mathbb{Z}$?

Exercices posés aux oraux des concours

24 (Petites Mines 2002)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, canoniquement associée à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
Déterminer sans calculs le noyau et l'image de f.

25 (Petites Mines 2003)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

1) Déterminer le noyau et l'image de f.

2) Trouver une base B' de $\mathbb{R}^3$ où f est représenté par

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26 (ENSEA 2006)

Déterminer $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$ telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

27 (X 2006)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]^2$ tel que $A + \lambda B$ soit nilpotente pour $n+1$ valeurs distinctes du réel λ.
Montrer que A et B sont nilpotentes.

25 Rang d'une matrice et systèmes linéaires

INTRODUCTION

L'un des problèmes essentiels concernant une matrice est la détermination de son rang. La méthode du pivot de Gauss permet de transformer une matrice sans changer son rang, jusqu'à obtenir une forme très simple. Dans le cas d'une matrice carrée inversible, cette méthode permet même de calculer l'inverse de cette matrice.

OBJECTIFS

- Définir le rang d'une matrice.
- Étudier les opérations sur les lignes d'une matrice qui conservent son rang.
- Combiner ces opérations par la méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une matrice et, dans le cas où elle est inversible, calculer son inverse.
- Utiliser ces méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

1 Rang d'une matrice

1.1 • Rang des applications linéaires représentées par une même matrice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. A peut représenter diverses applications linéaires entre divers espaces vectoriels relativement à diverses bases. Montrons que le rang de ces applications linéaires est indépendant du choix de ces espaces vectoriels et de ces bases : il ne dépend que de la matrice et on peut l'appeler rang de A.

$$0 \leqslant \mathrm{rg}\,(A) \leqslant \min(n, p)$$

Théorème 1

Deux applications linéaires susceptibles d'être représentées par la même matrice ont le même rang.

Démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p, munis de bases respectives b_1 et b_2 ; F_1 et F_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n munis de bases respectives b'_1 et b'_2. Soit u_1 l'application linéaire de E_1 dans F_1 représentée dans les bases b_1 et b'_1 par la matrice A ; u_2 l'application linéaire de E_2 dans F_2 représentée dans les bases b_2 et b'_2 par la matrice A.

$$M_{b'_1}^{b_1}(u_1) = M_{b'_2}^{b_2}(u_2) = A$$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & F_1 \arrow[d, "\psi"] \\ E_2 \arrow[r, "u_2"'] & F_2 \end{tikzcd}$$

Doc. 1 Deux applications linéaires représentées par la même matrice.

Soit φ l'isomorphisme de E_1 dans E_2 transformant la base b_1 en b_2 et ψ l'isomorphisme de F_1 dans F_2 transformant la base b'_1 en b'_2. Les coordonnées dans b'_1 des vecteurs de la famille $u_1(b_1)$ étant les mêmes que celles dans b'_2 des vecteurs de la famille $u_2(b_2)$, on a :

$$\psi \circ u_1 = u_2 \circ \varphi$$

On en déduit que :

$$\psi(\mathrm{Im}\ u_1) = \mathrm{Im}\ (\psi \circ u_1) = \mathrm{Im}\ (u_2 \circ \varphi) = \mathrm{Im}\ (u_2)$$

La restriction de ψ à $\mathrm{Im}\ u_1$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\ u_1$ dans $\mathrm{Im}\ u_2$.
D'où $\mathrm{rg}\,(u_1) = \mathrm{rg}\,(u_2)$.

En particulier, le rang de A est le rang de l'application linéaire canoniquement associée, c'est-à-dire aussi le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ constituée par les colonnes de A, appelés vecteurs colonnes de A.

1.2 • Rang des matrices équivalentes

Corollaire 1.1

Deux matrices équivalentes ont le même rang.

Démonstration

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, u_0 et v_0 les applications linéaires qui leur sont canoniquement associées. Si A et B sont équivalentes, elles représentent par ailleurs une même application linéaire u dans d'autres bases. D'après le théorème,

$$\mathrm{rg}\,(u_0) = \mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(A) \text{ et } \mathrm{rg}\,(v_0) = \mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(B)\,, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B).$$

Une matrice $A' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est équivalente à A si et seulement s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A' = PAQ$. On ne change donc pas le rang d'une matrice en la multipliant à droite ou à gauche par des matrices inversibles. C'est ce que nous utiliserons plus loin pour la détermination pratique du rang.

Montrons qu'une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice très simple, uniquement caractérisée par son rang. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de rang r, et u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée. Cherchons des bases mieux appropriées pour représenter u.

Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans $\mathbb{K}^p$: d'après le théorème du rang, $\dim G = r$. Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de G et $(e_{r+1}, \cdots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. Alors $b = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$.

Montrons que la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ est libre dans $\mathbb{K}^n$:

si $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u(e_i) = 0$, $\displaystyle u\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i\right) = 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \in (\operatorname{Ker} u) \cap G$.

Comme $(\operatorname{Ker} u) \cap G = \{0\}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0$; ce qui implique, du fait que $(e_1, \cdots, e_r)$ est libre, que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.

On peut donc compléter la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ en une base $b' = (u(e_1), \cdots, u(e_r), e'_{r+1}, \cdots, e'_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

La matrice de u dans les bases b et b' s'écrit :

$$M_{b'}^{b}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\qquad r \qquad} & \xleftrightarrow{\; p-r \;} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow n-r \end{array} \end{array}$$

Il existe des matrices inversibles $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = Q^{-1} J_{npr} P.$$

Cette matrice (m_{ij}), à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf les m_{ii} pour $i \in [\![1, r]\!]$ qui valent 1, est notée J_{npr}. Il résulte de cette étude que toute matrice de rang r de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est équivalente à J_{npr}. Deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de même rang sont donc équivalentes : c'est la réciproque du corollaire 1.1. On peut donc affirmer :

Théorème 2

Deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

1.3 • Rang de la transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, de rang r. A étant équivalente à J_{npr}, il existe des matrices inversibles $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = Q^{-1} J_{npr} P$.

En transposant cette égalité, on obtient ${}^tA = {}^tP\ {}^tJ_{npr}\ {}^tQ^{-1}$.

Ce résultat a une conséquence pratique très intéressante : dans la recherche du rang, on peut indifféremment travailler sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice, puisque les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$ et vice versa.

Or ${}^tJ_{npr} = J_{pnr}$. Donc ${}^tA = {}^tP\, J_{pnr}\, {}^tQ^{-1}$. Ainsi ${}^tA$ est équivalente à J_{pnr}, et son rang est donc r.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad \mathrm{rg}\ {}^tA = \mathrm{rg}\ A$$

2 Opérations conservant le rang

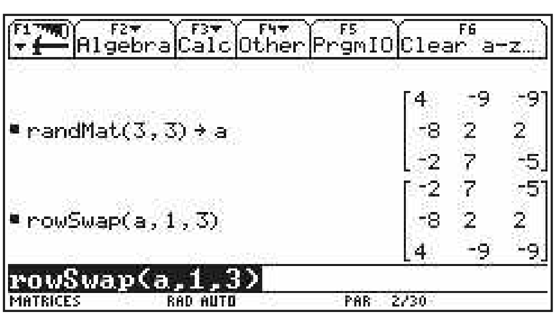
2.1 • Opérations élémentaires

Pour qu'une opération sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice conserve son rang, il faut et il suffit qu'elle la transforme en une matrice équivalente, c'est-à-dire qu'elle corresponde à une multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible. Nous allons voir trois exemples très simples de telles opérations, qu'il suffira ensuite de combiner pour aboutir à la matrice J_{npr}.

Échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$

Échanger les lignes i et j d'une matrice A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ revient à la multiplier à gauche par une matrice L_{ij}, obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice I_n :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jp} \\ \cdots & & & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jp} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & & & \cdots \end{pmatrix}$$



L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ s'obtient par : `rowSwap(A,i,j)`.

Il est clair qu'on peut annuler l'effet de cette opération en échangeant à nouveau les lignes i et j, c'est-à-dire que $L_{ij}^2 = I_n$; donc L_{ij} est inversible.

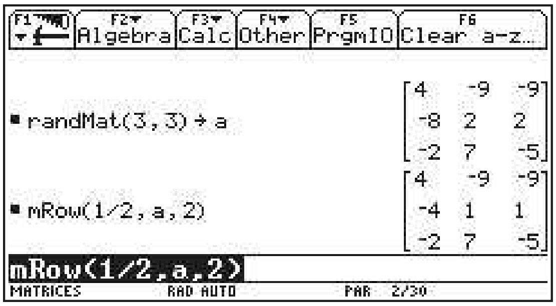
L'échange de deux lignes conserve donc le rang.

Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul

$L_i \leftarrow kL_i$

Multiplier la ligne i d'une matrice A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ par un scalaire $k \neq 0$ revient à la multiplier à gauche par une matrice $M_i(k)$, obtenue en multipliant par k la ligne i de la matrice I_n :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \cdots & & & \cdots \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \\ \cdots & & & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & & & \cdots \\ & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ip} \\ & & & \\ \cdots & & & \cdots \end{pmatrix}$$



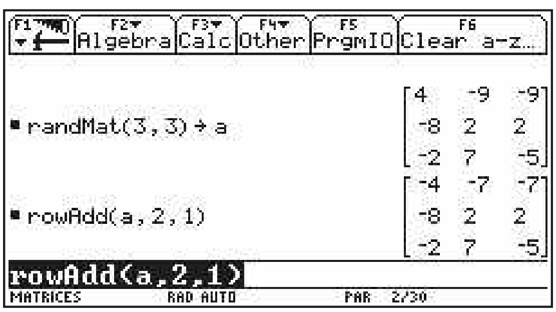
L’opération $L_i \leftarrow kL_i$ s’obtient par : `mRow(k,A,i)`.

On peut annuler l’effet de cette opération en multipliant la ligne i par $\frac{1}{k}$, c’est-à-dire que $M_i\left(\frac{1}{k}\right)M_i(k) = I_n$, donc $M_i(k)$ est inversible. La multiplication d’une ligne par un scalaire non nul conserve donc le rang.

■ **Addition d’une ligne à une autre** $L_i \leftarrow L_i + L_j$

Ajouter la ligne j à la ligne i d’une matrice A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ revient à la multiplier à gauche par une matrice A_{ij}, obtenue en ajoutant la ligne j à la ligne i de la matrice I_n :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jp} \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & a_{ip}+a_{jp} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jp} \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$



L’opération $L_i \leftarrow L_i + L_j$ s’obtient par : `rowAdd(A,j,i)`.

On peut annuler l’effet de cette opération en retranchant la ligne j de la ligne i, c’est-à-dire que :

$$M_j(-1)A_{ij}M_j(-1)A_{ij} = I_n$$

donc A_{ij} est inversible. L’addition d’une ligne à une autre conserve donc le rang.

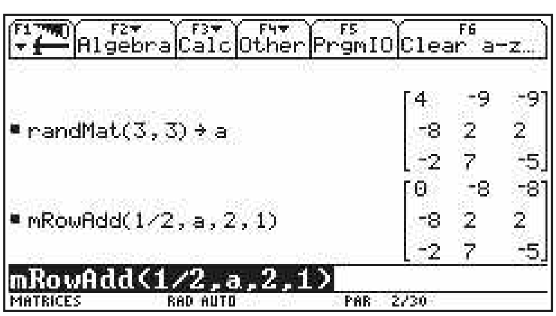
On peut combiner ces trois opérations élémentaires pour :

- ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres ;
- remplacer une ligne par une combinaison linéaire de toutes les lignes, à condition que le coefficient de la ligne elle-même soit non nul.

On ne peut faire simultanément plusieurs opérations élémentaires que si l’on est sûr qu’on pourrait les faire **successivement**. Par exemple, on peut de chaque ligne jusqu’à l’avant-dernière retrancher la suivante, et conserver la dernière. Mais une transformation telle que :

$$(L_1, L_2, L_3) \leftarrow (L_1 - L_2, L_2 - L_3, L_3 - L_1)$$

n’est pas possible et risquerait d’abaisser le rang.



L’opération $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ s’obtient par : `mRowAdd(k,A,j,i)`.

Remarque : *D’après ce qui a été dit à propos du rang de la transposée, les opérations élémentaires peuvent aussi bien être effectuées sur les colonnes que sur les lignes. Elles correspondent alors à des multiplications à droite par des matrices inversibles.*

2.2 • Méthode du pivot de Gauss

Voyons maintenant comment agencer les opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d’une matrice pour déterminer son rang.

Soit $A = (a_{ij})_{i\in[\![1,n]\!]\, j\in[\![1,p]\!]}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

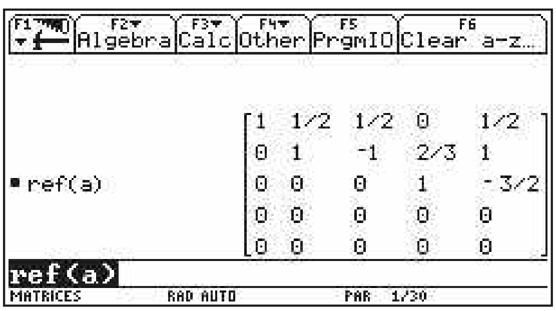
- Si tous les coefficients de la première colonne sont nuls, on effectue une permutation de colonnes pour obtenir une première colonne non nulle.
- S'il existe dans la première colonne un coefficient non nul a_{i1} (appelé pivot), on échange les lignes 1 et i.

On obtient donc une matrice $A' = (a'_{ij})$ dont le coefficient de la première ligne, première colonne, $a'_{11} = p_1$, est non nul.

On retranche ensuite de chaque ligne L_i pour $i \in [\![2, n]\!]$ la 1^re^ ligne multipliée par a'_{i_1}/p_1.
On annule ainsi tous les coefficients situés sous le pivot :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array} \begin{pmatrix} p_1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - \dfrac{a'_{21}}{p_1} L_1 \\ \vdots \\ L_n - \dfrac{a'_{n1}}{p_1} L_1 \end{array} \left(\begin{array}{c|ccc} p_1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1p} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$\cdots$



La fonction `ref(A)` donne une matrice équivalente à la matrice A, de la forme T_r à ceci près qu'il n'y a pas de permutation de colonnes. Les pivots sont tous ramenés à 1. La fonction `rref(A)` donne un résultat équivalent, mais encore plus simplifié. Nous l'utiliserons plus loin pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Si la matrice B constituée des $n-1$ dernières lignes et $p-1$ dernières colonnes n'est pas nulle, on peut lui appliquer le même procédé (bien sûr, si des permutations de colonnes sont nécessaires, elles doivent porter sur la matrice toute entière).
On répète l'opération r fois, jusqu'à ce que la matrice constituée des $n-r$ dernières lignes et $p-r$ dernières colonnes soit nulle (si $r = n$, il ne reste pas de ligne nulle, et si $r = p$, il ne reste pas de colonne nulle) :

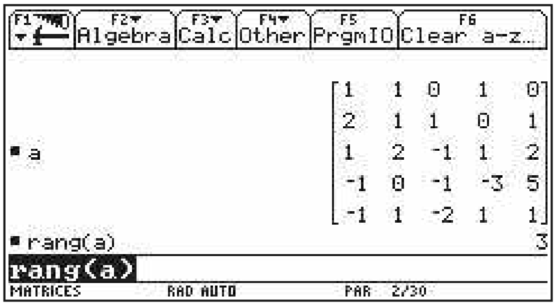
$$T_r = \left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & & & \\ 0 & \ddots & X & \\ \vdots & & p_r & \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ 0 & & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad p_1 \neq 0 \quad \cdots \quad p_r \neq 0$$

Le rang de la matrice est alors r. En effet, en appliquant la même méthode à la transposée de T_r (sans nécessiter d'échanges de lignes ou de colonnes, puisque les pivots sont déjà en place), et en divisant chacune des r premières lignes par son pivot, on aboutirait à J_{pnr}.

Le rang de A est le nombre de pivots successifs permettant d'aboutir à la forme T_r.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



La TI-92/Voyage 200 ne possède pas de fonction donnant directement le rang d'une matrice. Il est facile de construire une fonction `rang` en comptant le nombre de lignes non nulles de `ref(A)` :

```
rang(a)
Func
Local n,p,i,j,nul
rowDim(a) → n
colDim(a) → p
ref(a) → a
n → i
true → nul
While nul and i > 0
   For j,1,p
     If not(a[i,j]=0) Then
       false → nul
     EndIf
   EndFor
   i-1 → i
EndWhile
If nul Then
     0
   Else
     i+1
EndIf
EndFunc
```

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 2L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme il est impossible de trouver un pivot dans la troisième colonne, on effectue une permutation circulaire des trois dernières colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est de la forme T_3. Le rang de A est donc 3.

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

2.3 • Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible

Dans le cas où la matrice A est carrée inversible, la matrice T_n obtenue par la méthode du pivot est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls. On peut alors se ramener par équivalence à la matrice I_n, uniquement par des combinaisons de lignes : il suffit de réappliquer la méthode du pivot en commençant par la dernière ligne, puis de diviser chaque ligne par son pivot.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ 0 & p_2 & & X \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{pmatrix} \longrightarrow I_n$$

Ce faisant, en effectuant seulement des opérations élémentaires sur les lignes, on a multiplié A à gauche par une matrice inversible Q pour obtenir I_n : $QA = I_n$. La matrice Q est donc l'inverse de A.

Pour la calculer, il suffit d'appliquer les mêmes opérations sur les lignes de I_n, car $QI_n = Q = A^{-1}$. Dans la pratique, on mène en parallèle les deux calculs. En même temps que l'on transforme A en I_n, on transforme I_n en A^{-1}.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow 5L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 - 2L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -12 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} -6 & 12 & -3 \\ -12 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1/15 \\ L_2 \leftarrow -L_2/15 \\ L_3 \leftarrow L_3/5 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Pour s'entraîner : ex. 4

3 Équations linéaires

3.1 • Structure de l'ensemble des solutions

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle équation linéaire une équation de la forme :

$$u(x) = y \quad \textbf{(1)}$$

où u est une application linéaire de E dans F et y un élément donné de F, appelé second membre.

L'ensemble des solutions de l'équation **(1)** est donc l'ensemble des antécédents de y par u :

$$S = u^{-1}(\{y\})$$

On appelle équation sans second membre associée à **(1)**, l'équation :

$$u(x) = 0 \quad \textbf{(2)}$$

L'ensemble des solutions de **(2)** est $\operatorname{Ker} u$.

Exemple : L'équation différentielle $y''+xy'-y = \sin x$ est linéaire : E et F sont l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, u est l'application $f \mapsto f''+xf'-f$ et le second membre est la fonction sinus. L'équation sans second membre associée est $y''+xy'-y = 0$.

Théorème 3
L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = y$ est soit vide, soit l'ensemble décrit par la somme d'une solution particulière x_0 et d'une solution quelconque de l'équation sans second membre ; c'est-à-dire :

$$S = \varnothing \qquad \text{ou} \qquad S = x_0 + \operatorname{Ker} u$$

S est un sous-espace affine de E, de direction $\operatorname{Ker} u$.

Démonstration
Supposons S non vide, soit $x_0 \in S$.

1) $\forall x \in S \quad u(x) = u(x_0) = y\,, \quad$ d'où $\quad u(x - x_0) = 0 \quad x - x_0 \in \operatorname{Ker} u$
$S \subset x_0 + \operatorname{Ker} u$.

2) $\forall t \in \operatorname{Ker} u \quad u(x_0 + t) = u(x_0) = y\,, \quad$ d'où $\quad x_0 + t \in S \quad x_0 + \operatorname{Ker} u \subset S$.

3.2 • Systèmes d'équations linéaires

Le système de n équations à p inconnues dans le corps $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = y_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = y_n \end{cases}$$

est UNE équation linéaire de la forme $u(x) = y$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$, que l'on peut représenter matriciellement par $AX = Y$ avec $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Soit r le rang de A.

- Si $r = n$, u est surjectif : le système a des solutions quel que soit le second membre y.
- Si $r < n$, au contraire, le second membre doit vérifier certaines conditions (dites de compatibilité) pour que le système admette des solutions.
- Si $r = p$, u est injectif : la solution, si elle existe, est unique.
- Si $r < p$, au contraire, les solutions ne sont jamais uniques. On peut fixer arbitrairement les valeurs de certaines inconnues et calculer les autres en fonction de celles-là.
- Si $r = n = p$, u est bijectif : pour tout second membre y, il y a une solution unique $u^{-1}(y)$. On dit qu'il s'agit d'un système de Cramer et sa résolution est équivalente au calcul de l'inverse de la matrice A.

3.3 • Résolution par la méthode du pivot partiel

Soit le système d'équations linéaires représenté matriciellement par $AX = Y$. On peut effectuer simultanément sur les matrices A et Y les opérations élémentaires sur lignes étudiées dans la détermination du rang.

On aboutit à :

$$A' = \begin{pmatrix} p_1 & & & X \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & p_r & \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix} \qquad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

avec $p_1 \neq 0, \ \cdots, \ p_r \neq 0$. C'est-à-dire au système :

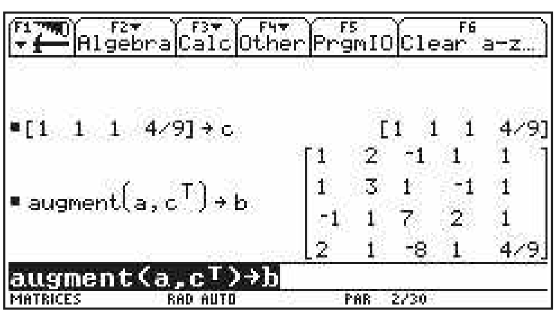
$$\begin{cases} p_1 x'_1 + d'_{12} x'_2 + \cdots \quad \cdots + d'_{1p} x'_p &= y'_1 \\ p_2 x'_2 + \cdots \quad \cdots + d'_{2p} x'_p &= y'_2 \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \\ p_r x'_r + \cdots + d'_{rp} x'_p &= y'_r \\ 0 &= y'_{r+1} \\ \cdots & \cdots \\ 0 &= y'_n \end{cases}$$

On peut être amené pour trouver un pivot non nul à permuter des colonnes, ce qui revient à permuter les inconnues. On ne retrouvera donc pas nécessairement les inconnues dans leur ordre initial.

(Les $x'_1, \cdots, x'_p$ sont les inconnues éventuellement permutées.)

Les $n - r$ dernières équations, qui ne font plus intervenir les inconnues, sont des relations de compatibilité du système. Elles expriment les conditions portant sur le second membre pour qu'il existe des solutions.

Les $p - r$ dernières inconnues (dans leur nouvel ordre) peuvent être fixées arbitrairement. En remontant de la r-ième ligne à la première, on peut calculer les r premières inconnues en fonction de ces $p - r$ paramètres.



La fonction `rref` permet de résoudre un système d'équations linéaires par la méthode du pivot partiel. Il faut d'abord construire une matrice B en adjoignant à la matrice A une dernière colonne égale à celle des seconds membres.

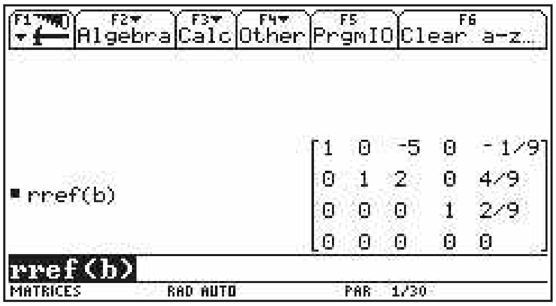
Exemple :

$$\begin{cases} x + 2y - z + t &= 1 \\ x + 3y + z - t &= 1 \\ -x + y + 7z + 2t &= 1 \\ 2x + y - 8z + t &= a \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y - z + t &= 1 \\ y + 2z - 2t &= 0 \\ 3y + 6z + 3t &= 2 \\ -3y - 6z - t &= a - 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y - z + t &= 1 \\ y + 2z - 2t &= 0 \\ 9t &= 2 \\ -7t &= a - 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow 9L_4 + 7L_3 \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2y - z + t &= 1 \\ y + 2z - 2t &= 0 \\ 9t &= 2 \\ 0 &= 9a - 4 \end{cases}$$



Puis on applique à la matrice B la fonction `rref`. On obtient un système triangulaire équivalent dont les solutions se lisent d'elles-mêmes.

ATTENTION

La calculatrice peut donner des résultats erronés si la matrice contient des paramètres formels. Elle ne trouvera pas les valeurs particulières de ces paramètres qui abaissent le rang.

La dernière équation est une relation de compatibilité : le système admet des solutions si et seulement si $a = \frac{4}{9}$. Dans ce cas l'inconnue z peut être choisie arbitrairement. On obtient successivement :

$$t = \frac{2}{9} \qquad y = \frac{4}{9} - 2z \qquad x = -\frac{1}{9} + 5z$$

Une solution particulière est $\left(-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, 0, \frac{2}{9}\right)$.

Le noyau est $\text{Vect}(5, -2, 1, 0)$.

Pour s'entraîner : ex. 5 à 8

MÉTHODE

Pour déterminer le rang d'une matrice A, on peut :

- chercher la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs-colonnes de A ;
- chercher la dimension de l'image d'une application linéaire représentée par A ;
- chercher une matrice équivalente plus simple ;
- effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A pour obtenir une matrice équivalente de la forme T_r (*cf. exercices* 2 *et* 3).

Pour calculer l'inverse d'une matrice carrée inversible A, on peut :

- effectuer simultanément sur les lignes de A et celles de I_n les mêmes opérations élémentaires pour transformer A en I_n et I_n en A^{-1} (*cf. exercice* 4) ;
- résoudre le système d'équations $AX = Y$, pour obtenir $X = A^{-1}Y$.

Pour résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues : appliquer la méthode du pivot de Gauss.
Si le rang du système est r, on trouvera $n - r$ relations de compatibilité qui ne dépendent pas des inconnues, et $p - r$ inconnues arbitraires en fonction desquelles on pourra exprimer toutes les autres (*cf. exercices* 5 *à* 8).

Exercice résolu

POLYGONE DONT LES MILIEUX DES CÔTÉS SONT FIXÉS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Discuter l'existence et l'unicité dans le plan d'un polygone à n côtés dont les milieux des côtés sont fixés. (On pourra résoudre un système d'équations dans $\mathbb{C}$.)

Interpréter géométriquement les résultats à l'aide de transformations du plan.

Conseils

Traduire l'énoncé par un système linéaire et étudier sa compatibilité.

Penser à utiliser des symétries centrales.

Solution

Soit $a_1, \cdots, a_n$ les affixes des milieux fixés. On cherche les affixes $z_1, \cdots, z_n$ des sommets tels que :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ \quad \cdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_1 = 2a_n \end{cases}$$

En faisant la somme des lignes affectées de signes alternés, on obtient :

$$z_1 \left(1 + (-1)^{n-1}\right) = 2\left(a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n\right)$$

Si n est impair, le système admet une solution unique, quels que soient les milieux fixés.

Si n est pair, il apparaît une relation de compatibilité :

$$a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n = 0$$

Si les milieux choisis ne vérifient pas cette relation, le système est incompatible et il n'y a pas de solution.

S'ils vérifient cette relation, z_1 est une inconnue arbitraire. Il y a donc une infinité de solutions : on peut choisir arbitrairement le premier sommet et en déduire les suivants.

Géométriquement, désignons par $I_1, \cdots, I_n$ les milieux fixés et par $s_1, \cdots, s_n$ les symétries centrales respectives par rapport à ces points. Les sommets $M_1, \cdots, M_n$ doivent vérifier :

$$M_2 = s_1(M_1)\,,\ M_3 = s_2(M_2)\,, \cdots,\ M_n = s_{n-1}(M_{n-1}) \text{ et } M_1 = s_n(M_n)$$

D'où $M_1 = \left(s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_2 \circ s_1\right)(M_1)$.

- Si n est impair, l'application $s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_2 \circ s_1$ est une symétrie centrale. Le point M_1 doit en être le centre : il y a une solution unique.
- Si n est pair, l'application $s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_2 \circ s_1$ est une translation. Pour qu'il existe un point M_1 invariant par cette translation, il faut et il suffit que ce soit l'identité, et alors tout point du plan convient : il y a dans ce cas une infinité de solutions. Une condition nécessaire et suffisante pour que $s_n \circ s_{n-1} \circ \cdots \circ s_2 \circ s_1 = \mathrm{Id}$ est :

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \cdots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \vec{0}$$

On peut vérifier qu'elle est bien équivalente à la relation de compatibilité trouvée plus haut pour le système.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Deux matrices de même type ont le même rang si et seulement si elles sont équivalentes.

b) On ne change pas le rang d'une matrice en échangeant deux de ses colonnes.

c) On ne change pas le rang d'une matrice en remplaçant une ligne par une combinaison linéaire des autres lignes.

d) Si une matrice A est équivalente à une matrice triangulaire T, son rang est le nombre de coefficients non nuls de la diagonale de T.

e) Un système de n équations linéaires à p inconnues de rang r possède $p-r$ inconnues arbitraires.

f) Un système de 4 équations linéaires à 5 inconnues a toujours des solutions.

g) Un système de 4 équations linéaires à 3 inconnues peut avoir plusieurs solutions.

h) Un système admettant une solution unique a au moins autant d'équations que d'inconnues.

Rang d'une matrice

2

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 9 & 11 & -2 & 19 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$

3

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $a_{i,j} = a$ si $i \neq j$. Déterminer le rang de A en discutant suivant les valeurs de a et de n.

4

Inverser, lorsque c'est possible, les matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$

Systèmes d'équations linéaires

5

Résoudre les systèmes :

a) $\begin{cases} 2x+3y-2z = 5 \\ x-2y+3z = 2 \\ 4x-y+4z = \lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y+z-t = 1 \\ x+y-z-t = -1 \\ x+y+z-t = 0 \\ x-y-z+t = 2 \end{cases}$

où λ est un paramètre réel.

c) $\begin{cases} x-2y+z-3t = 1 \\ 2x+y-z+t = -1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ x+3y-z = 11 \\ 2x+5y-5z = 13 \\ x+4y+z = 18 \end{cases}$

6 *

Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs des paramètres a, b, c et d :

$$\begin{cases} x+y+z+t = 1 \\ ax+by+cz+dt = 1 \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2t = 1 \\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3t = 1 \end{cases}$$

7

Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs du paramètre complexe a :

$$\begin{cases} x-ay+a^2z = a \\ ax-a^2y+az = 1 \\ ax+y-a^3z = 1 \end{cases}$$

8

Deux systèmes voisins ont-ils des solutions voisines ?

$$\begin{cases} 10x+9y+z = -50 \\ 9x+10y+5z = 40 \\ x+5y+9z = 180 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x+9y+z = -50 \\ 9x+10y+5z = 41 \\ x+5y+9z = 180 \end{cases}$$

9

Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10 *

Soit $n \in \mathbb{N}$, résoudre le système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{j+i} = 1$$

Utiliser pour cela la fraction rationnelle :

$$F = -\frac{(X-1)\cdots(X-n)}{(X+1)\cdots(X+n)}$$

Exercices posés aux oraux des concours

11 (CCP 2006)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, et f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg} f = 3$ et $f^4 = 0$.

1) Montrer que $f^2 \neq 0$. En déduire une matrice simple représentant l'endomorphisme f. En supposant que $f^3 = 0$, trouver une contradiction.

2) Montrer que : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3 \subset \operatorname{Ker} f^4$ et que ces inclusions sont strictes.

3) En déduire le rang des endomorphismes f^2, f^3 et f^4.

12 (Centrale-Supelec 2006)

Soit $B \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{rm}(\mathbb{R})$ de même rang r. Montrer que $A = BC$ est aussi de rang r.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang r ; montrer l'existence d'une décomposition de A de la forme précédente.

Trouver (à l'aide de Maple) une telle décomposition pour la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

26 Groupe symétrique

INTRODUCTION

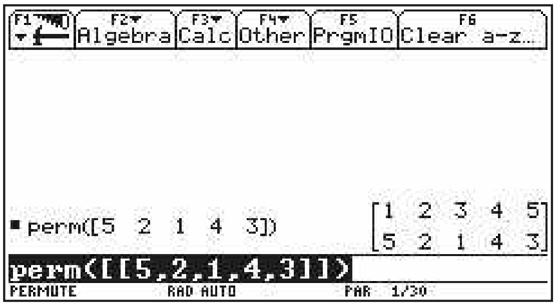
Pour continuer l'étude de l'algèbre linéaire et introduire la notion de déterminant, nous avons besoin d'approfondir la connaissance des permutations d'un ensemble fini. Nous découvrirons qu'on peut les classer en deux catégories : les permutations paires et les permutations impaires, que l'on distingue par leur « signature ». Pour aborder ce chapitre avec profit, une révision des notions sur les groupes est conseillée. L'étude des groupes symétriques fut initiée par Joseph Louis Lagrange et approfondie par Évariste Galois à propos de la résolubilité par radicaux des équations algébriques.

OBJECTIFS

- Se familiariser avec le calcul des permutations.
- Découvrir la notion importante de signature et la distinction entre permutations paires et impaires, essentiellement en vue de l'étude des déterminants.
- Connaître les décompositions classiques des permutations, qui permettent de calculer leur signature.

1 Permutations d'un ensemble fini

1.1 • Notations



Saisie d'une permutation

```
perm(l)
Func
Local n,i,c
colDim(l) → n
newMat(2,n) → c
For i,1,n
   i → c[1,i]
   l[1,i] → c[2,i]
EndFor
c
EndFunc
```

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons qu'une permutation de E est une bijection de E dans lui-même. Comme E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$, il est équivalent d'étudier les permutations de $[\![1, n]\!]$.
On représente une permutation par la liste des éléments de $[\![1, n]\!]$ en dessous de laquelle on indique l'image de chaque élément.

Exemple : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

signifie que $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 6$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 5$, $\sigma(6) = 1$

La TI-92/Voyage 200 est muette sur les permutations. Vous trouverez en marge dans ce chapitre un ensemble de programmes permettant toutes les opérations usuelles sur les permutations.

1.2 • Produit de permutations

La composée de deux permutations de $[\![1, n]\!]$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$. Par commodité, on adopte la notation multiplicative : on écrit $\sigma\tau$ pour $\sigma \circ \tau$ et on parle de « produit » des deux permutations.

La notation adoptée pour représenter les permutations rend très facile le calcul du produit de deux permutations :

Produit de 2 permutations

```
produit(s,t)
Func
Local n,i,c
colDim(s) → n
newMat(2,n) → c
For i,1,n
   i → c[1,i]
   s[2,t[2,i]] → c[2,i]
EndFor
c
EndFunc
```

Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'en général deux permutations ne commutent pas.

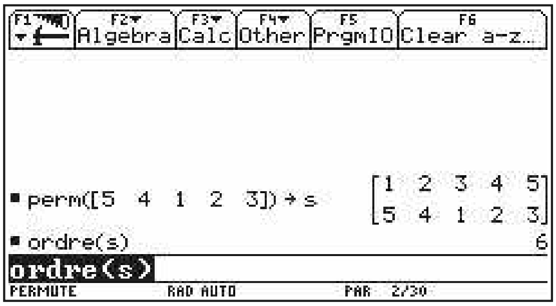
1.3 • Groupe symétrique

Identité

```
Id(n)
Func
Local i,c
newMat(2,n) → c
For i,1,n
   i → c[1,i]
   i → c[2,i]
EndFor
c
EndFunc
```

L'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$. La composition des permutations est une opération interne dans $\mathcal{S}_n$, associative ; elle possède un élément neutre : l'identité de $[\![1, n]\!]$, que nous noterons ici e. Toute permutation possède une inverse (sa bijection réciproque).
$\mathcal{S}_n$ muni de cette opération est donc un groupe, appelé groupe symétrique de degré n. L'ordre de ce groupe (c'est-à-dire son cardinal) est $n!$. Dès que $n \geqslant 3$, le groupe $\mathcal{S}_n$ n'est pas commutatif.

1.4 • Ordre d'une permutation



Ordre d'une permutation

```
ordre(s)
Func
Local k,n,t
colDim(s) → n
s → t
1 → k
Loop
   If t=id(n) Then
     Exit
   EndIf
   produit(t,s) → t
   k+1 → k
EndLoop
EndFunc
```

Soit σ une permutation appartenant au groupe $\mathcal{S}_n$. Rappelons que l'application : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathcal{S}_n \\ k & \mapsto & \sigma^k \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes. Son noyau est donc un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, qui est par conséquent de la forme $m\mathbb{Z}$ où $m \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{S}_n$ est fini, ce morphisme n'est certainement pas injectif, donc $m \neq 0$.

Résumons : l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\sigma^k = e$ est l'ensemble des multiples d'un entier strictement positif m, que l'on appelle ordre de σ.

L'ordre de σ est le plus petit entier k strictement positif tel que $\sigma^k = e$.

Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

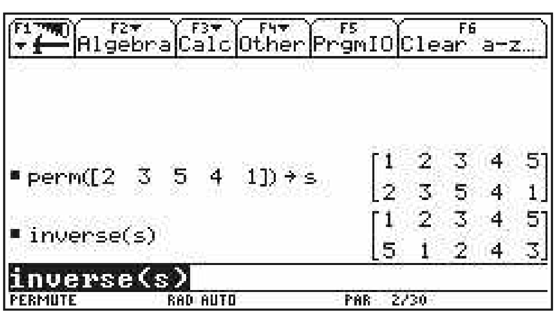
$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$$

L'ordre de σ est donc 3.

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

2 Décomposition en produit de transpositions

2.1 • Transpositions



Inverse d'une permutation

```
inverse(s)
Func
Local n,i,c
colDim(s) → n
Id(n) → c
For i,1,n
   i → c[2,s[2,i]]
EndFor
c
EndFunc
```

On suppose ici $n \geqslant 2$. On appelle transposition une permutation qui échange deux éléments distincts en laissant tous les autres invariants. Nous noterons $(i,j)_n$ la transposition de $[\![1,n]\!]$ qui échange i et j (avec $i \neq j$).

Exemple : $(2,4)_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Il est clair qu'une transposition est d'ordre 2 ; elle est sa propre inverse : c'est une involution.

Pour s'entraîner : ex. 4

2.2 • Les transpositions engendrent le groupe $\mathcal{S}_n$

On peut aussi dire que le groupe $\mathcal{S}_1$ est engendré par les transpositions, puisqu'il ne contient aucune transposition et que le sous-groupe engendré par $\varnothing$ est $\{e\} = \mathcal{S}_1$.

Théorème 1

Pour tout $n \geqslant 2$, le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions. Autrement dit, toute permutation de $[\![1, n]\!]$ est un produit de transpositions.

Démonstration

Effectuons une récurrence sur n.

Pour $n = 2$, il y a une seule transposition : $\tau = (1, 2)_2$; elle engendre bien $\mathcal{S}_2 = \{e, \tau\}$, car $\tau^2 = e$.

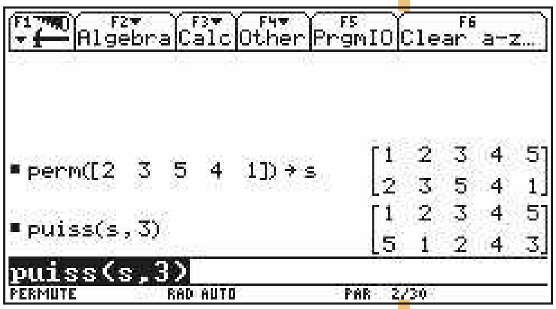
Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{S}_n$ soit engendré par les transpositions de $[\![1, n]\!]$.

Il faut montrer que tout élément de $\mathcal{S}_{n+1}$ est un produit de transpositions de $[\![1, n+1]\!]$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$. Distinguons deux cas :

- Si $\sigma(n+1) = n+1$, la restriction σ' de σ à $[\![1, n]\!]$ est un élément de $\mathcal{S}_n$.

C'est donc un produit de k transpositions de $[\![1, n]\!]$:

$$\sigma' = (i_k, j_k)_n \cdots (i_2, j_2)_n \, (i_1, j_1)_n$$



Puissances d'une permutation

```
puiss(s,k)
Func
Local i,n,c
colDim(s) → n
id(n) → c
If k>0 Then
   For i,1,k
     produit(c,s) → c
   EndFor
ElseIf k<0 Then
   puiss(inverse(s),-k) → c
EndIf
c
EndFunc
```

Chacune de ces transpositions se prolonge à $[\![1, n+1]\!]$ en fixant $n+1$. On a alors :

$$\sigma = (i_k, j_k)_{n+1} \cdots (i_2, j_2)_{n+1} \, (i_1, j_1)_{n+1}$$

σ est donc un produit de k transpositions de $[\![1, n+1]\!]$.

- Si $\sigma(n+1) = p \neq n+1$, la permutation $\tau = (p, n+1)_{n+1}\,\sigma$ remet $n+1$ à sa place : $\tau(n+1) = n+1$. D'après ce qui précède, τ est un produit de k transpositions de $[\![1, n+1]\!]$. Comme $\sigma = (p, n+1)_{n+1}\,\tau$, σ est un produit de $k+1$ transpositions de $[\![1, n+1]\!]$.

Par récurrence, le résultat est donc bien établi pour tout $n \geqslant 2$.

Cette démonstration est constructive : elle donne un algorithme pour décomposer une permutation en produit de transpositions.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= (2,5)_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (2,5)_5\,(1,4)_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (2,5)_5\,(1,4)_5\,(1,3)_5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (2,5)_5\,(1,4)_5\,(1,3)_5\,(1,2)_5
\end{aligned}$$

Remarque *: Cette décomposition n'est pas unique : il n'est pas nécessaire de commencer par le dernier terme... Même le nombre de transpositions nécessaires n'est pas fixé : en procédant autrement, on peut obtenir :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,5)_5\,(2,3)_5\,(1,4)_5\,(1,3)_5\,(4,5)_5\,(1,5)_5$$

Nous verrons cependant un peu plus loin que la ***parité*** *de ce nombre de transpositions est une caractéristique de la permutation.*

La permutation ci-dessus a été décomposée en un produit de 4 ou 6 transpositions ; elle ne pourra jamais l'être en 5 ou 7 transpositions...

Pour s'entraîner : ex. 5

3 Signature d'une permutation

3.1 • Inversions

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle inversion de σ toute paire $\{i,j\}$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$ telle que $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} < 0$, c'est-à-dire telle que $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$ soient classés dans l'ordre inverse de celui de i et j.

Exemple : Les inversions de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont :

$$\{1,2\}\ ,\ \{1,3\}\ ,\ \{1,4\}\ ,\ \{1,5\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{2,5\}\ ,\ \{3,4\}\ ,\ \{3,5\}$$

3.2 • Signature

On dit qu'une permutation σ est paire ou impaire suivant que son nombre d'inversions est pair ou impair.

Pour représenter la parité d'une permutation σ, on définit sa signature : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$, où N est le nombre d'inversions de σ. La signature d'une permutation paire est $+1$; celle d'une permutation impaire est -1.

On définit ainsi une application $\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n & \to & \{-1,1\} \\ \sigma & \mapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$

L'intérêt de cette notion réside dans le résultat suivant :

Théorème 2

La signature d'un produit de permutations est le produit des signatures.

Autrement dit, l'application ε est un morphisme de groupes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$.

Démonstration

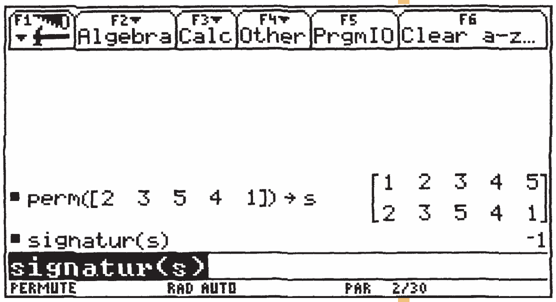
Soit σ et τ deux permutations de $[\![1,n]\!]$, possédant respectivement P et Q inversions. Les inversions de la composée $\tau\sigma$ sont :

– les inversions $\{i,j\}$ de σ telles que $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ ne soit pas une inversion de τ.

– les paires $\{i,j\}$ qui ne sont pas des inversions de σ, telles que $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ soit une inversion de τ.

Si l'on ajoute les nombres d'inversions de σ et de τ, on compte deux fois le nombre R d'inversions $\{i,j\}$ de σ telles que $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ soit aussi une inversion de τ. Le nombre total d'inversions de $\tau\sigma$ est donc $N = P + Q - 2R$. La signature de $\tau\sigma$ est :

$$\varepsilon(\tau\sigma) = (-1)^{P+Q-2R} = (-1)^P\,(-1)^Q = \varepsilon(\tau)\,\varepsilon(\sigma)$$



Signature d'une permutation

```
signatur(s)
Func
Local g,i,j,n
colDim(s) → n
1 → g
For i,1,n-1
  For j,i+1,n
    If s[2,i]>s[2,j] Then
      -g → g
    EndIf
  EndFor
EndFor
g
EndFunc
```

Conséquences :

- La composée de deux permutations de même parité est paire ; la composée de deux permutations de parités différentes est impaire.
- D'après les propriétés générales des morphismes de groupes, pour toute permutation σ : $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)^{-1}$. Comme $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$, on peut même écrire :

$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$: une permutation et son inverse ont la même signature, donc la même parité.

- L'ensemble des permutations paires est le noyau du morphisme ε : c'est donc un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, appelé groupe alterné , et noté $\mathcal{A}_n$.

(En revanche, l'ensemble des permutations impaires n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, puisqu'il ne contient pas e et qu'il n'est pas stable par la composition des applications.)

3.3 • Signature d'une transposition

Considérons la transposition $\tau = (i,j)_n$ avec $i < j$. Les inversions de τ sont :

$$\{i,\ i+1\}\ ,\ \{i,\ i+2\}\ ,\ \cdots\ ,\ \{i,j-1\}\ ,\ \{i,j\}$$
$$\{i+1,j\}\ ,\ \{i+2,j\}\ ,\ \cdots\ ,\ \{j-1,j\}$$

Elles sont en nombre impair :

Une transposition est une permutation impaire ; sa signature est -1.

Conséquences :

- Le produit de k transpositions a pour signature $(-1)^k$.
- Une permutation paire ne peut être le produit que d'un nombre pair de transpositions, et une permutation impaire ne peut être le produit que d'un nombre impair de transpositions.
- La décomposition en produit de transpositions peut être utilisée pour déterminer la signature d'une permutation.

Pour s'entraîner : ex. 6

4 Cycles

4.1 • Définition d'un cycle

Soit $n \geqslant 2$. On appelle cycle une permutation c de $[\![1, n]\!]$ pour laquelle il existe un entier $k \geqslant 2$ et une suite $(a_1, \cdots, a_k)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$, distincts deux à deux, telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, k-1]\!] \quad c(a_i) = a_{i+1} \\ c(a_k) = a_1 \\ \forall j \in [\![1, n]\!] \backslash \{a_1, \cdots, a_k\} \quad c(j) = j \end{cases}$$

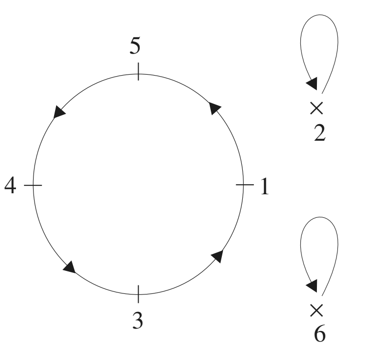
Le cycle sera noté $c = (a_1, \cdots, a_k)_n$. L'entier k est appelé longueur du cycle. L'ensemble $\{a_1, \cdots, a_k\}$ est appelé support du cycle.

Définition d'un cycle

```
cycle(l,n)
Func
Local s,i,k
Id(n) → s
colDim(l) → k
For i,1,k-1
l[1,i+1] → s[2,l[1,i]]
EndFor
l[1,1] → s[2,l[1,k]]
EndFunc
```

Une transposition est un cycle de longueur 2. La notation que nous avons adoptée pour les transpositions est celle des cycles.

Exemple : $(1, 5, 4, 3)_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$



Doc. 1 Le cycle $(1, 5, 4, 3)_6$.

4.2 • Signature d'un cycle

Il est clair qu'un cycle de longueur k est d'ordre k.

Déterminons sa signature :

Soit c le cycle défini plus haut, et soit a une permutation de $[\![1, n]\!]$ telle que : $\forall i \in [\![1, k]\!] \quad a(i) = a_i$, les images des éléments de $[\![k+1, n]\!]$ étant choisies arbitrairement en dehors du support de c.

Soit γ le cycle : $\gamma = (1, \cdots, k)_n$.

On constate que $c = a\,\gamma\,a^{-1}$; en effet :

– pour tout élément a_i du support de c :

$$a\,\gamma\,a^{-1}(a_i) = a\,\gamma(i) = a_{\gamma(i)} = c(a_i)$$

– pour tout j n'appartenant pas au support de c :

$$a\,\gamma\,a^{-1}(j) = a\,a^{-1}(j) = j = c(j)$$

$$\begin{array}{c} a^{-1} \\ \gamma \\ a \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Doc. 2 $c = a\,\gamma\,a^{-1}$.

(γ est un cycle « semblable » à c, qui opère sur les indices des éléments du support de c au lieu d'opérer directement sur ces éléments). On en déduit que $\varepsilon(c) = \varepsilon(a)\,\varepsilon(\gamma)\,\varepsilon(a^{-1}) = \varepsilon(\gamma)$. Les cycles c et γ ont même signature. L'avantage est qu'il est beaucoup plus facile de compter les inversions de γ que celles de c : les inversions de γ sont $\{1, k\}$, $\{2, k\}$, $\cdots$, $\{k-1, k\}$. Il y en a $k-1$. La signature de γ, et donc celle de c, est $(-1)^{k-1}$.

Un cycle de longueur k a pour signature $(-1)^{k-1}$

Un cycle de longueur paire est une permutation impaire et vice versa.

Pour s'entraîner : ex. 7 et 8

MÉTHODE

Pour déterminer la signature d'une permutation, on peut :

- compter ses inversions *(cf. exercice 6)* ;
- la décomposer en produit de transpositions *(cf. exercice 5)*.

Pour déterminer l'ordre d'une permutation, on peut :

- calculer ses puissances successives jusqu'à retrouver l'identité *(cf. exercice 2)*.

Pour démontrer qu'une famille de permutations engendre le groupe $\mathcal{S}_n$:

il suffit de montrer que toute transposition est un produit d'éléments de cette famille *(cf. Exercice résolu)*.

Pour démontrer qu'une famille de permutations engendre le groupe $\mathcal{A}_n$:

il suffit de montrer que tout produit de deux transpositions est un produit d'éléments de cette famille *(cf. exercice 7)*.

Exercice résolu

LE GROUPE SYMÉTRIQUE EST ENGENDRÉ PAR DEUX ÉLÉMENTS

Soit $n \geqslant 2$. *Démontrer que :*

1 $\mathcal{S}_n$ *est engendré par les transpositions* $(1,2)$, $(1,3)$, $\cdots$, $(1,n)$.

2 $\mathcal{S}_n$ *est engendré par les transpositions* $(1,2)$, $(2,3)$, $\cdots$, $(n-1,n)$.

3 *On considère la transposition* $t=(1,2)$ *et le cycle* $c=(1,2,\cdots,n)$.

Calculer $c^k t\, c^{-k}$ *pour* $k \in [\![0, n-2]\!]$.

En déduire que $\mathcal{S}_n$ *est engendré par* t *et* c.

4 *Décomposer à l'aide de* t *et* c *la permutation :* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Conseils

Utiliser le résultat précédent.

Solution

1) Comme $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions, il suffit de démontrer que toute transposition (i,j) se décompose à l'aide des $(1,i)$.

– Si $n=2$, la seule transposition est $(1,2)$.

– Si $n \geqslant 3$, pour $1<i<j$, $(i,j)=(1,i)(1,j)(1,i)$.

2) Montrons par récurrence sur $i \geqslant 2$, que toute transposition $(1,i)$ se décompose à l'aide des $(k,k+1)$.

– Pour $i = 2$, la transposition $(1, 2)$ est de la forme voulue.
– Soit $i \geqslant 2$ pour lequel la propriété est vraie.
$(1, i+1) = (i, i+1)(1, i)(i, i+1)$: la récurrence est établie.

3) On montre par récurrence que $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$:

$$c^k\, t\, c^{-k} = (k+1, k+2)$$

ce qui prouve d'après la deuxième question, que t et c engendrent $\mathcal{S}_n$.

Décomposer σ en produit de transpositions et appliquer les résultats précédents à chacune d'entre elles.

4) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2, 5)(2, 4)(1, 3)(1, 2)$

$(1, 2) = t$

$(1, 3) = (2, 3)(1, 2)(2, 3) = (ctc^{-1})t(ctc^{-1}) = ctc^{-1}tctc^{-1}$

$(2, 4) = (2, 3)(3, 4)(2, 3) = (ctc^{-1})(c^2tc^{-2})(ctc^{-1}) = ctctc^{-1}tc^{-1}$

$$\begin{aligned}(2, 5) = (2, 4)(4, 5)(2, 4) &= (ctctc^{-1}tc^{-1})(c^3tc^{-3})(ctctc^{-1}tc^{-1}) \\ &= ctctc^{-1}tc^2tc^{-2}tctc^{-1}tc^{-1}\end{aligned}$$

d'où : $$\sigma = ctctc^{-1}tc^2tc^{-2}tc^{-1}tctc^{-1}t$$

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une permutation d'ordre 2 est une transposition.

b) Toute permutation est un produit de transpositions à supports disjoints.

c) On peut classer une liste de mots dans l'ordre alphabétique uniquement par des échanges deux à deux.

d) Une permutation et son inverse ont la même signature.

e) L'ensemble des permutations impaires est un sous-groupe du groupe symétrique.

f) L'ordre d'un cycle est égal à sa longueur.

g) Un cycle de longueur paire est une permutation paire.

h) Deux cycles quelconques commutent.

2 **1)** Soit la permutation : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer les puissances successives de σ. En déduire son ordre.

2) Mêmes questions avec la permutation :

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Déterminer la nature des permutations $\sigma\sigma'$ et $\sigma'\sigma$.

3 Soit σ et σ' deux permutations appartenant au groupe $\mathcal{S}_n$.

1) Démontrer que $\sigma\sigma'$ et $\sigma'\sigma$ ont le même ordre.

2) Démontrer que σ et σ^{-1} ont le même ordre.

4 Déterminer le centre du groupe $\mathcal{S}_n$, c'est-à-dire l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ qui commutent avec toutes les autres.

5 Décomposer les permutations suivantes en produit de transpositions :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire leurs signatures.

6 On considère les permutations :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Dénombrer les inversions des permutations σ, τ, $\tau\sigma$ et $\sigma\tau$.

7 Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

1) Démontrer que les cycles d'ordre 3 engendrent le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.

2) Démontrer que les cycles de la forme $(1, 2, k)$ $(k \in [\![3, n]\!])$ engendrent le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.

8 Un jeu de taquin est constitué de neuf cases dont huit sont occupées par un jeton numéroté de 1 à 8, et une est vide. On peut faire glisser un jeton horizontalement ou verticalement dans la case vide.

On repère le résultat d'une manipulation par la permutation des numéros qu'elle produit (on lit les numéros dans l'ordre sans s'occuper de la place de la case vide).

Exemple :

1	2	3
4	5	6
7	8	

$\longrightarrow$

4	1	3
	2	5
7	8	6

position initiale

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 41325786 \end{pmatrix}$$

Démontrer qu'on ne peut obtenir que des permutations paires.

27 Déterminants

INTRODUCTION

Il peut être utile d'exprimer par une simple égalité qu'une famille de vecteurs est liée, qu'une matrice carrée n'est pas inversible, ou qu'un endomorphisme n'est pas bijectif. C'est ce que permet la notion de déterminant. Sa définition est un peu difficile et nécessite une bonne connaissance des groupes symétriques et en particulier de la notion de signature d'une permutation, que le lecteur a donc intérêt à revoir. Une fois cette définition acquise, l'utilisation des déterminants est simple et d'usage très fréquent, en particulier en géométrie.

La notion de déterminant apparaît avec Vandermonde (1735-1796) *; elle devient d'usage courant au cours du* XIX$^{\text{e}}$ *siècle* (*Cauchy, Jacobi, Sylvester*).

OBJECTIFS

- Définir les déterminants.
- Savoir calculer un déterminant.
- Utiliser les déterminants pour calculer le rang d'une matrice, d'une application linéaire ou d'une famille de vecteurs, ainsi que pour caractériser les automorphismes et les matrices carrées inversibles.

1 Applications multilinéaires

1.1 • Applications p-linéaires

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et p un entier naturel non nul. Soit f une application de E^p dans F : $(x_1, \cdots, x_p) \mapsto f(x_1, \cdots, x_p)$. f est dite p-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune des variables, c'est-à-dire que chaque application partielle $x_i \mapsto f(\cdots, x_i, \cdots)$ est linéaire.

Si $F = \mathbb{K}$, l'application s'appelle forme p-linéaire sur E.

Exemples :

On appelle $\mathbb{K}$-algèbre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui est de plus muni d'une multiplication interne lui conférant une structure d'anneau.

- Si E est une $\mathbb{K}$-algèbre (par exemple, $\mathbb{K}[X]$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), la multiplication interne de E est une application bilinéaire de E^2 dans E. Plus généralement, l'application qui à p éléments de E fait correspondre leur produit est p-linéaire.
- Si $\overrightarrow{E}$ est l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, le produit scalaire est une forme bilinéaire de $\overrightarrow{E}^2$ dans $\mathbb{R}$.
- Si $\overrightarrow{E}$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace, le produit vectoriel est une application bilinéaire de $\overrightarrow{E}^2$ dans $\overrightarrow{E}$.

L'ensemble des applications p-linéaires de E^p dans F est un sous-espace vectoriel de F^{E^p}, noté $\mathcal{L}_p(E, F)$.

1.2 • Applications p-linéaires symétriques

Une application p-linéaire de E^p dans F, où $p \geqslant 2$, est dite symétrique si elle est invariante par l'échange de deux variables :

Quels que soient les indices distincts i et j de $[\![1, p]\!]$, et quels que soient les vecteurs x_i et x_j de E :

$$f(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) = f(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots)$$

Par extension, toute application 1-linéaire (c'est-à-dire linéaire) de E dans F peut être dite symétrique.

f est alors invariante par toute permutation σ du groupe $\mathcal{S}_p$, puisque nous savons que σ est un produit de transpositions :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_p \quad f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

Exemples :

- L'application, qui à p éléments d'une $\mathbb{K}$-algèbre E fait correspondre leur produit, est p-linéaire symétrique si l'algèbre E est commutative.
- Dans l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique.

L'ensemble des applications p-linéaires symétriques de E^p dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E, F)$.

1.3 • Applications p-linéaires alternées

Une application p-linéaire de E^p dans F, où $p \geqslant 2$, est dite alternée si elle s'annule dès que deux variables sont égales : quels que soient les indices distincts i et j de $[\![1,p]\!]$, et quels que soient les vecteurs x_i et x_j de E, si $x_i = x_j$, alors $f(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) = 0$.

On a alors, quels que soient x_i et x_j : $f(\cdots, x_i+x_j, \cdots, x_j+x_i, \cdots) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(\cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots) + f(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) + f(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots) + f(\cdots, x_j, \cdots, x_j, \cdots) = 0$$

On dit que f est antisymétrique.

D'où : $$f(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots) = -f(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots).$$

Toute transposition de deux variables multiplie l'image par -1, donc toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$, produit de k transpositions, multiplie l'image par $(-1)^k$, c'est-à-dire la signature de σ :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_p \quad f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

Par extension, toute application 1-linéaire (c'est-à-dire linéaire) de E dans F peut être dite alternée.

Exemples :

Dans l'ensemble $\overrightarrow{E}$ des vecteurs de l'espace :

- Le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée de $\overrightarrow{E}^2$ dans $\overrightarrow{E}$.
- Le produit mixte est une forme trilinéaire alternée de $\overrightarrow{E}^3$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des applications p-linéaires alternées de E^p dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E, F)$.

1.4 • Image d'une famille liée

Théorème 1

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si f est une application p-linéaire alternée de E^p dans F, pour toute famille liée $(x_1, \cdots, x_p)$: $\quad f(x_1, \cdots, x_p) = 0$.

Démonstration

Si $p = 1$, la famille (x_1) est liée si et seulement si $x_1 = 0$. Alors $f(x_1) = 0$.

Si $p \geqslant 2$, la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est liée si et seulement si l'un des x_i est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille ; supposons que ce soit le cas de x_p :

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_p) &= f(x_1, \cdots, x_{p-1}, \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{p-1}, x_i) = 0 \end{aligned}$$

2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

2.1 • Calcul en dimension 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une base (e_1, e_2) et f une forme bilinéaire alternée sur E.
Soit x et y deux vecteurs de E. Calculons $f(x, y)$ en fonction des coordonnées de x et y. Posons $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1f(e_1,e_1) + x_1y_2f(e_1,e_2) + x_2y_1f(e_2,e_1) + x_2y_2f(e_2,e_2) \end{aligned}$$

f étant alternée, $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$ et $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$.

D'où : $$f(x,y) = (x_1y_2 - x_2y_1)f(e_1,e_2)$$

f est donc entièrement déterminée par la valeur qu'elle prend sur la base (e_1, e_2).
En particulier, si $f(e_1, e_2) = 1$, $f(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$.
Cette expression des coordonnées de x et y est appelée déterminant de la famille (x, y) dans la base (e_1, e_2).

Avant de généraliser, le lecteur est invité à reprendre ce calcul pour un espace vectoriel de dimension 3, une forme trilinéaire alternée, et trois vecteurs x, y, z, donnés par leurs 9 coordonnées.

2.2 • Forme *n*-linéaire alternée sur un e.v. de dimension *n*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $b = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et f une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E définis par leurs coordonnées dans la base b : $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

Calculons $f(x_1, \cdots, x_n)$ en fonction des coordonnées a_{ij} :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i\,, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}e_i\,, \quad \cdots \quad, \sum_{i=1}^{n} a_{in}e_i\right)$$

Le développement de cette expression contient en principe n^n termes, qui sont nuls dès que le même indice i est choisi plusieurs fois. On ne conserve donc que les $n!$ termes correspondant au choix d'une **permutation** d'indices i.

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\, f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)})$$

f étant alternée, on en déduit :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\; a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\right) f(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

On s'aperçoit que f est entièrement déterminée par la valeur qu'elle prend en $(e_1, \cdots, e_n)$: toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont colinéaires. Elles forment donc un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1 de $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$, noté $\Lambda_n^*(E)$.

Si la dimension de $\Lambda_n^*(E)$ était 0, alors la forme nulle serait la seule forme n-linéaire alternée sur E ! Nous allons montrer qu'en fait il existe au moins une forme n-linéaire alternée **non nulle**, et que par conséquent la dimension de $\Lambda_n^*(E)$ est toujours 1.

2.3 • Déterminant dans une base

On appelle déterminant dans la base $b = (e_1, \cdots, e_n)$ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$, notée Det_b, définie par :

$$\mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Lemme 2.1

Pour tout espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ et toute base b de E, l'application Det_b est une forme n-linéaire alternée non nulle sur E (elle prend la valeur 1 sur b).

La démonstration de ce lemme, un peu difficile, peut être omise en première lecture.

Démonstration

Det_b est clairement une forme n-linéaire sur E. De plus, si on applique cette forme à la famille $b = (e_1, \cdots, e_n)$, c'est-à-dire pour $a_{ij} = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), la seule permutation σ produisant un terme non nul est l'identité ; on a donc :

$$\mathrm{Det}_b(e_1, \cdots, e_n) = 1$$

L'application Det_b n'est donc pas nulle.

Il reste à démontrer que cette forme est alternée, ce qui est moins simple.

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs comportant deux éléments égaux :

$$\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \quad \text{et} \quad x_i = x_j$$

Il faut montrer que $\mathrm{Det}_b(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) = 0$.

$$\mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Séparons les permutations paires et les permutations impaires :

$$\mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Soit τ la transposition $(i,j)_n$; l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \rightarrow & \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma\tau \end{array} \right.$ est injective, et comme $\mathrm{Card}\ \mathcal{A}_n = \mathrm{Card}\ \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$, elle est bijective. On peut donc écrire :

$$\mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma\tau)\ a_{\sigma\tau(1)1} \cdots a_{\sigma\tau(n)n}$$

Or : $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, $\sigma\tau(i) = \sigma(j)$, $\sigma\tau(j) = \sigma(i)$ et, pour tout k différent de i et j : $\sigma\tau(k) = \sigma(k)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}_b(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\ \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots \\ - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\ \cdots a_{\sigma(j)i} \cdots a_{\sigma(i)j} \cdots \end{aligned}$$

Comme $x_i = x_j$, $a_{\sigma(i)j} = a_{\sigma(i)i}$ et $a_{\sigma(j)i} = a_{\sigma(j)j}$, il en résulte que $\mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) = 0$.

La forme n-linéaire Det_b est donc alternée.

On peut donc achever le raisonnement du paragraphe précédent et énoncer :

Théorème 2

Pour tout espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$, l'espace vectoriel $\Lambda_n^*(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1. Pour toute base $b = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, l'application Det_b est une base de $\Lambda_n^*(E)$ et :

$$\forall f \in \Lambda_n^*(E) \quad f = f(e_1, \cdots, e_n)\ \mathrm{Det}_b$$

On peut remarquer que, pour tout scalaire $k \in \mathbb{K}$, il existe un unique élément de $\Lambda_n^*(E)$ qui prend la valeur k sur b. En particulier, Det_b est l'unique forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur b.

2.4 • Changement de base

Si b' est une autre base de E, le déterminant dans la base b' est une forme n-linéaire alternée sur E et par conséquent :

$$\mathrm{Det}_{b'} = \mathrm{Det}_{b'}(e_1, \cdots, e_n)\ \mathrm{Det}_b \quad \text{, c'est-à-dire :}$$

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \quad \mathrm{Det}_{b'}(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{Det}_{b'}(e_1, \cdots, e_n)\ \mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n)$$

En abrégé, $\mathrm{Det}_{b'}(X) = \mathrm{Det}_{b'}(b)\mathrm{Det}_b(X)$: c'est une « relation de Chasles ».

En particulier, si $X = b'$, $\mathrm{Det}_{b'}(b)\ \mathrm{Det}_b(b') = \mathrm{Det}_{b'}(b') = 1$, d'où :

$$\mathrm{Det}_{b'}(b) = (\mathrm{Det}_b(b'))^{-1}$$

2.5 • Caractérisation d'une base

Théorème 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et b une base de E. Une famille de n vecteurs de E est une base si et seulement si son déterminant dans la base b est non nul.

Démonstration

Soit $X = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$.

- si X est une base, $\mathrm{Det}_b(X)\ \mathrm{Det}_X(b) = 1$, donc $\mathrm{Det}_b(X) \neq 0$.
- si $\mathrm{Det}_b(X) \neq 0$, X est libre, et comme elle a n éléments, c'est une base de E.

Pour s'entraîner : ex. 2

2.6 • Orientation d'un espace vectoriel réel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels et b, b' deux bases de E. On dit que b' a la même orientation que b si $\mathrm{Det}_b(b') > 0$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases de E.

Pourquoi ne peut-on pas orienter un espace vectoriel complexe ?

Les expressions *base directe*, *base rétrograde* n'ont un sens que si l'on précise que l'espace E est *orienté*.

Si b_1 et b_2 sont deux bases d'orientations différentes, c'est-à-dire si $\mathrm{Det}_{b_1}(b_2) < 0$, pour toute base b de E on aura soit $\mathrm{Det}_{b_1} b > 0$, soit $\mathrm{Det}_{b_2} b > 0$: b a soit l'orientation de b_1 soit l'orientation de b_2. Il y a donc deux classes d'équivalence dans l'ensemble des bases. Rien ne permet *a priori* de caractériser une classe par rapport à l'autre.

Orienter l'espace E, c'est choisir l'une de ces deux classes, dont les éléments seront appelés bases directes, tandis que les éléments de l'autre classe seront appelés bases rétrogrades.

3 Déterminant d'un endomorphisme

3.1 • Invariance par changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, et u un endomorphisme de E. Étant donné une base b de E, l'application de E^n dans $\mathbb{K}$:

$$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \mathrm{Det}_b(u(x_1), \cdots, u(x_n))$$

est une forme n-linéaire alternée sur E. Il existe donc, d'après le théorème 2, un scalaire λ tel que :

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \quad \mathrm{Det}_b(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = \lambda \ \mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n)$$

Étant donné une autre base b' de E :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{b'}(u(x_1), \cdots, u(x_n)) &= \mathrm{Det}_{b'}(b)\ \mathrm{Det}_b(u(x_1), \cdots, u(x_n)) \\
&= \mathrm{Det}_{b'}(b)\ \lambda\ \mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) \\
&= \lambda\ \mathrm{Det}_{b'}(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

Le scalaire λ ne dépend donc pas de la base choisie. On l'appelle déterminant de l'endomorphisme u. On a donc pour toute base b :

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n \quad \mathrm{Det}_b(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = \mathrm{Det}(u)\ \ \mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n)$$

En choisissant pour $(x_1, \cdots, x_n)$ la base $b = (e_1, \cdots, e_n)$, on remarque que :

$$\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}_b(u(e_1), \cdots, u(e_n))$$

Exemples : $\mathrm{Det}(0) = 0 \qquad \mathrm{Det}(\mathrm{Id}_E) = 1 \qquad \mathrm{Det}(k\,\mathrm{Id}_E) = k^n$.

3.2 • Propriétés

Théorème 4

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$:

1) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \mathrm{Det}(uv) = \mathrm{Det}(u)\ \mathrm{Det}(v)$

2) $\forall u \in \mathcal{L}(E) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \mathrm{Det}(\lambda u) = \lambda^n \mathrm{Det}(u)$

Démonstration

Soit $b = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

1) $\operatorname{Det}(uv) = \operatorname{Det}_b(uv(e_1), \cdots, uv(e_n)) = \operatorname{Det}(u)\ \operatorname{Det}_b(v(e_1), \cdots, v(e_n))$
$= \operatorname{Det}(u)\ \operatorname{Det}(v)$

2) $\operatorname{Det}(\lambda u) = \operatorname{Det}_b(\lambda u(e_1), \cdots, \lambda u(e_n)) = \lambda^n \operatorname{Det}_b(u(e_1), \cdots, u(e_n)) = \lambda^n \operatorname{Det}(u)$

Théorème 5

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement si $\operatorname{Det}(u) \neq 0$ et :

$$\forall u \in \mathcal{GL}(E) \quad \operatorname{Det}(u^{-1}) = (\operatorname{Det}(u))^{-1}$$

Démonstration

Soit $b = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

$u \in \mathcal{GL}(E) \iff u(b)$ est une base $\iff \operatorname{Det}_b(u(b)) \neq 0 \iff \operatorname{Det}(u) \neq 0.$

$\forall u \in \mathcal{GL}(E) \quad \operatorname{Det}(u)\ \operatorname{Det}(u^{-1}) = \operatorname{Det}(uu^{-1}) = \operatorname{Det}(\mathrm{Id}_E) = 1$,

d'où $\operatorname{Det}(u^{-1}) = (\operatorname{Det}(u))^{-1}$.

Pour s'entraîner : ex. 6 et 7

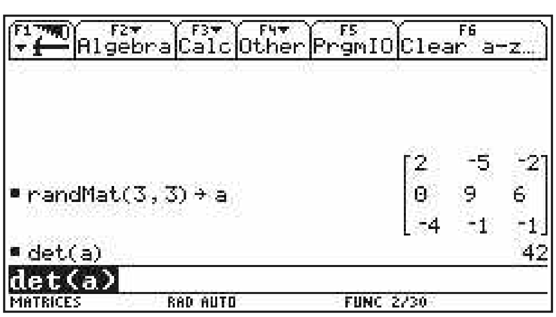
4 Déterminant d'une matrice carrée

4.1 • Définition

Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant puisqu'elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

La matrice A représente :
– une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans une base b ;
– un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ relativement à une base b.



La fonction `det` calcule le déterminant d'une matrice carrée.

On appelle déterminant de A le déterminant de cette famille dans la base b ou, ce qui revient au même, le déterminant de cet endomorphisme.

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

On le note $\operatorname{Det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

4.2 • Propriétés

Les propriétés du déterminant d'une matrice carrée découlent immédiatement de celles du déterminant d'un endomorphisme, par l'isomorphisme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathcal{M}_b(u) \end{cases} \qquad \text{d'où :}$$

Théorème 6

1) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$

2) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \mathrm{Det}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{Det}(A)$

Théorème 7

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \mathrm{Det}(A) \neq 0$

et $\quad \forall A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Det}(A^{-1}) = (\mathrm{Det}(A))^{-1}$

4.3 • Déterminant de la transposée

Théorème 8

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Det}({}^t\!A) = \mathrm{Det}(A)$$

Démonstration

Soit $A = (a_{ij})$ et ${}^t\!A = (a'_{ij})$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}({}^t\!A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1)1} a'_{\sigma(2)2} \cdots a'_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Réordonnons chacun des produits dans l'ordre du second indice :

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

Posons $\tau = \sigma^{-1}$. Nous savons que $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)$. Par ailleurs, l'application de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même, qui à σ fait correspondre $\tau = \sigma^{-1}$, est bijective. Il est donc équivalent de sommer sur toutes les permutations σ ou sur toutes les permutations τ. On obtient donc :

$$\mathrm{Det}({}^t\!A) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n} \quad \text{, c'est-à-dire} \quad \mathrm{Det}(A)$$

Pour s'entraîner : ex. 8

APPLICATION 1

Déterminant triangulaire

Calculer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & \text{\Large 0} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Pour toute permutation σ autre que l'identité, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) > i$; on a alors $a_{\sigma(i)i} = 0$ et par conséquent $a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = 0$.

Il reste : $\mathrm{Det}(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Il en va de même du déterminant d'une matrice triangulaire inférieure.

On peut conclure que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Pour s'entraîner : ex. 4

APPLICATION 2

Déterminant triangulaire par blocs

Soit A *une matrice de* $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ *de la forme :*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Montrer que $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B)\ \mathrm{Det}(C)$.

Remarquons que A peut s'écrire sous forme d'un produit $A = A'A''$, avec :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \quad \text{et} \quad A'' = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & I_p \end{array}\right)$$

Les termes non nuls du déterminant de A' sont exactement ceux du déterminant de C, avec les mêmes signes, car la signature d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{n+p}$ fixant les éléments de $[\![1, n]\!]$ est égale à la signature de sa restriction à $[\![n+1, n+p]\!]$ (ces deux permutations ont les mêmes inversions). Donc $\mathrm{Det}(A') = \mathrm{Det}(C)$.

On démontre de même que $\mathrm{Det}(A'') = \mathrm{Det}(B)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A'A'') &= \mathrm{Det}(A')\mathrm{Det}(A'') \\ &= \mathrm{Det}(C)\mathrm{Det}(B) \end{aligned}$$

Ce résultat se généralise par récurrence au cas du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, quel que soit le nombre de blocs :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & X \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \boxed{B_p} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B_1)\ \mathrm{Det}(B_2)\ \cdots\ \mathrm{Det}(B_p)$$

Pour s'entraîner : ex. 11

5 Calcul pratique d'un déterminant

5.1 • Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes

Étudions l'effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes étudiées dans le chapitre précédent.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $\operatorname{Det}(A)$ est le déterminant dans la base canonique b de $\mathbb{K}^n$ des vecteurs colonnes de A.

L'application Det_b étant n-linéaire alternée :

- L'échange de deux colonnes change le signe du déterminant. Plus généralement, une permutation des colonnes multiplie le déterminant par la signature de cette permutation.
- La multiplication d'une colonne par un scalaire λ non nul multiplie le déterminant par λ.
- L'addition dans une colonne d'une autre colonne, ou, plus généralement, d'une combinaison linéaire des autres colonnes laisse le déterminant inchangé.

Comme $\operatorname{Det}({}^tA) = \operatorname{Det}(A)$, les mêmes propriétés sont applicables aux lignes de A (qui sont les colonnes de ${}^tA$).

On peut se ramener par une succession de telles opérations à un déterminant triangulaire, qui est le produit des éléments diagonaux *(cf. Application* 1*)*.

Exemple :

Calculons le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2 \end{array} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

D'où : $\qquad D = 160$

5.2 • Développement suivant une colonne

$$\text{Soit} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Le j-ième vecteur colonne est combinaison linéaire des éléments de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Le déterminant étant linéaire par rapport à cette colonne, on peut écrire $D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, où :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \end{array} & \begin{array}{c} (j) \end{array} \\ A_{ij} = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ & \vdots & \\ & 1 & \\ & \vdots & \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{array} \right| & (i) \end{array}$$

A_{ij} est appelé cofacteur du coefficient a_{ij}.

Pour simplifier l'expression de A_{ij}, effectuons sur les colonnes le cycle $c = (1, 2, \cdots, j)$, dont la signature est $\varepsilon(c) = (-1)^{j-1}$:

$$\begin{array}{cc} & (j) \\ A_{ij} = (-1)^{j-1} \left| \begin{array}{ccc|cc} \mathbf{0} & a_{1,1} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{1} & a_{i,1} & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & a_{i,n} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & a_{n,1} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & a_{n,n} \end{array} \right| & (i) \end{array}$$

Puis effectuons sur les lignes le cycle $c' = (1, 2, \cdots, i)$, dont la signature est $\varepsilon(c') = (-1)^{i-1}$:

$$\begin{array}{cc} & (j) \\ A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \boldsymbol{a_{i,1}} & \boldsymbol{a_{i,j-1}} & \boldsymbol{a_{i,j+1}} & \boldsymbol{a_{i,n}} \\ \mathbf{0} & a_{1,1} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & a_{i-1,1} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & a_{i-1,n} \\ \hline \mathbf{0} & a_{i+1,1} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & a_{n,1} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & a_{n,n} \end{array} \right| & (i) \end{array}$$

Ce dernier déterminant se calcule par blocs :

$$\begin{array}{cc} & (j) \\ A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{cc|cc} a_{1,1} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & a_{1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & a_{n,n} \end{array} \right| & (i) \end{array}$$

C'est-à-dire : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$, où Δ_{ij} est le déterminant obtenu à partir de D en supprimant la ligne i et la colonne j.

Δ_{ij} est appelé déterminant mineur du coefficient a_{ij}.

Le coefficient $(-1)^{i+j}$ qui intervient dans l'expression du cofacteur s'obtient en examinant le « damier » :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

En particulier, les coefficients diagonaux sont affectés d'un signe $+$.

Comme $\mathrm{Det}({}^tA) = \mathrm{Det}(A)$, on peut aussi développer par rapport à une ligne : $D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ Les cofacteurs sont les mêmes, mais on somme sur tous les termes de la ligne i au lieu de ceux de la colonne j.

En définitive :
$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

Cette égalité est appelée développement de D suivant la j-ième colonne.

APPLICATION 3

Calcul d'un déterminant par récurrence

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Développons D_n par rapport à la première colonne :

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 1 & 2 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

Soit, en redéveloppant ce dernier déterminant par rapport à sa première ligne :

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

La suite (D_n) est donc arithmétique.

Or $D_1 = 2$; $D_2 = 3$, d'où $D_n = n + 1$.

Pour s'entraîner : ex. 12 à 15

6 Applications des déterminants

6.1 • Caractérisation d'une famille libre ou liée

Théorème 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.
Une famille de p vecteurs de E $(1 \leqslant p \leqslant n)$ représentée dans une base b par une matrice A est libre si et seulement si l'un au moins des déterminants formés par p lignes de A est non nul.

Démonstration

Soit $b = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $X = (x_1, \cdots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E, représentée dans la base b par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

1) Supposons que le déterminant formé par les p premières lignes de A soit non nul. La famille $(x_1, \cdots, x_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ est représentée dans la base b par la matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pp} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & 1 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\mathrm{Det}(A')$ est égal au déterminant des p premières lignes de A ; il est donc non nul. On en déduit que $(x_1, \cdots, x_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ est une base de E. Par conséquent, $(x_1, \cdots, x_p)$ est une famille libre.

Il est clair qu'on obtient la même conclusion en supposant que l'un quelconque des déterminants formés par p lignes de A est non nul.

2) Supposons réciproquement que $(x_1, \cdots, x_p)$ soit une famille libre. On peut la compléter en une base de E avec $(n-p)$ éléments de la base b. Quitte à changer l'ordre de la base b (ce qui revient à permuter les lignes de A), on peut supposer que $(x_1, \cdots, x_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ est une base de E. La matrice de passage de b à b' est A'. On en déduit que $\mathrm{Det}(A') \neq 0$, d'où :

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

6.2 • Détermination du rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice

Soit X une famille de vecteurs de E, représentée dans une base b par la matrice A. Le rang de X est le plus grand entier r tel qu'il existe une sous-famille libre de r éléments de X.

Par conséquent, c'est le plus grand entier r tel qu'il existe un déterminant d'ordre r non nul extrait de A.

On appelle déterminant extrait de A tout déterminant formé par p lignes et p colonnes de A.

Autrement dit $\mathrm{rg}\,(A) = r$ équivaut à :

– il existe un déterminant d'ordre r non nul extrait de A.

– si $r < \min(n, p)$, tous les déterminants d'ordre $r+1$ extraits de A sont nuls.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Il existe un déterminant extrait d'ordre 2 non nul, donc $\mathrm{rg}\,(A) \geqslant 2$. Tous les déterminants extraits d'ordre 3 sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donc $\mathrm{rg}\,(A) = 2$.

6.3 • Expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de ceux de A : $com(A) = (a'_{ij})$ où $a'_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

On appelle matrice complémentaire de A la transposée $\widetilde{A}$ de la comatrice. $\widetilde{A} = {}^t com(A) = (\widetilde{a}_{ij})$ où $\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji}$.

Théorème 10

1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \mathrm{Det}(A)I_n$

2) Si $\mathrm{Det}(A) \neq 0 \quad A^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}\widetilde{A}$

Le nombre d'opérations nécessaires pour calculer de cette façon l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n est équivalent à $n^2 n!$. En comparaison, la méthode de Gauss nécessite un équivalent de $\dfrac{4}{3}n^3$ opérations, soit, pour un ordinateur exécutant 10^6 opérations par seconde :

n	10	15	20
méthode des déterminants	6 mn	9 ans	30.10^6 ans
méthode de Gauss	1 ms	4,5 ms	10 ms

Ce tableau montre de façon éloquente combien l'expression explicite de l'inverse à l'aide des déterminants est peu utile dans la pratique. C'est cependant un outil de démonstration qui peut être précieux dans certains exercices.

Démonstration

1) Posons $B = A\widetilde{A} = (b_{ij})$ où $b_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik}\Delta_{jk}$.

– Si $i = j$, on reconnaît le développement de $\mathrm{Det}(A)$ suivant la i-ième ligne :

$$b_{ii} = \mathrm{Det}(A)$$

– Si $i \neq j$, tout se passe comme si on développait suivant la j-ième ligne un déterminant obtenu à partir de $\mathrm{Det}(A)$ en remplaçant cette j-ième ligne par la i-ième. Ce déterminant a deux lignes égales, il est donc nul. $i \neq j \Rightarrow b_{ij} = 0$.

D'où $A\widetilde{A} = \mathrm{Det}(A)I_n$; même calcul pour $\widetilde{A}A$.

2) Si $\mathrm{Det}(A) \neq 0$, A est inversible et $\dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}A\widetilde{A} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}\widetilde{A}A = I_n$.

D'où : $$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\widetilde{A}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour s'entraîner : ex. 16 et 17

6.4 • Formules de Cramer

Soit un système de n équations linéaires à n inconnues, qui s'écrit :

$$AX = Y \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ce système admet une solution unique si et seulement si A est inversible, c'est-à-dire si $\mathrm{Det}(A) \neq 0$. La solution unique est alors :

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\widetilde{A}Y \,,$$

soit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} y_j = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ji} y_j$$

On reconnaît le développement suivant la i -ième colonne du déterminant obtenu à partir de celui de A en remplaçant cette colonne par la colonne Y.

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (i) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & y_n & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Exemple :

Résolvons le système : $\begin{cases} 2x - y + z & = & 0 \\ x - 2y - z & = & 3 \\ 3x + y + 2z & = & 1 \end{cases}$

Le déterminant du système est égal à 6 : c'est bien un système de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = -3$$

Encore une fois, ces formules ont un intérêt plus théorique que pratique. Dès que $n \geqslant 4$, la méthode du pivot de Gauss est beaucoup plus économique.

MÉTHODE

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée, on peut :

- effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, en tenant compte de leur effet sur le déterminant, pour obtenir une forme triangulaire *(cf. exercices* 5 *et* 12*)* ;
- développer suivant une ligne ou une colonne. On peut parfois obtenir une relation de récurrence *(cf. Application* 3 *et exercice* 14*)* ;
- le décomposer en blocs *(cf. Application* 2*)* ;
- s'il s'agit d'un déterminant d'ordre 3, utiliser la règle de Sarrus *(cf. Application* 3 *du chapitre 7 et exercice* 3*)*.

Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, on peut choisir une base et représenter l'endomorphisme par une matrice carrée *(cf. exercices* 6 *et* 7*)*.

Pour déterminer le rang d'une matrice A, on peut chercher un déterminant non nul d'ordre r extrait de A, tel que tous les déterminants d'ordre $r+1$ extraits de A sont nuls.

Exercice résolu

DÉTERMINANT DE VANDERMONDE

Calculer le déterminant :

$$D(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$ *où a, b, c, d sont quatre scalaires quelconques.*

Conseils

Imaginer le développement du déterminant $D(a,b,c,X)$ suivant sa dernière colonne.

λ est le coefficient dominant du polynôme P.

Solution

Il est clair que $D(a,b,c,d)$ est nul lorsque deux des scalaires a,b,c,d sont égaux. Supposons-les maintenant distincts deux à deux. Remplaçons d par une indéterminée X. L'expression $P(X) = D(a,b,c,X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, qui admet a,b,c pour racines. On peut donc écrire :

$$P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c)$$

En particulier : $D(a,b,c,d) = \lambda(d-a)(d-b)(d-c)$

λ est le cofacteur de X^3 dans le déterminant $D(a,b,c,X)$, c'est-à-dire :

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Le même raisonnement appliqué à ce déterminant montre que :

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} (c-a)(c-b) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

D'où, en définitive :

$$D(a,b,c,d) = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$

(que a, b, c, d soient distincts ou non).

Essayer de rédiger cette récurrence.

On peut généraliser par récurrence :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une application p-linéaire sur E est une application linéaire sur E^p.

b) Une application multilinéaire alternée est invariante par toute permutation paire des variables.

c) Le déterminant d'un endomorphisme dépend de la base dans laquelle on le représente.

d) Deux matrices carrées équivalentes ont le même déterminant.

e) Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

f) Pour toute matrice carrée A, $\operatorname{Det}(-A) = -\operatorname{Det}(A)$.

g) On ne change pas un déterminant en mutipliant une ligne par un scalaire non nul.

h) Le cofacteur et le mineur d'un coefficient sont égaux au signe près.

i) Soit A une matrice. Si l'on peut extraire de A un déterminant d'ordre r non nul et un déterminant d'ordre $r+1$ nul, alors $\operatorname{rg}(A) = r$.

Notion de déterminant

2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $b = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_i = \sum_{j \neq i} e_j$. Calculer le déterminant de la famille (x_i) dans la base b.

3 Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$

4 Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_n \\ & & ⋰ & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & X \end{vmatrix}$$

5 Calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & -b & -c & -d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$

6 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que l'application :

$$u_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Montrer que $\operatorname{Det}(u_A) = (\operatorname{Det} A)^2$.

7 À tout polynôme réel P de degré inférieur ou égal à n, on associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application $P \mapsto Q$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer le déterminant de cet endomorphisme.

8 Montrer qu'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair n'est jamais inversible.

9 Soit G un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le déterminant appartient à G est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Donner des exemples.

10* Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B^{n-1} \neq 0$ et $B^n = 0$.

1) Déterminer une matrice très simple semblable à B.

2) Démontrer que $\operatorname{Det}(I_n + B) = 1$.

3) Démontrer que pour toute matrice carrée A qui commute avec B :

$$\operatorname{Det}(A + B) = \operatorname{Det}(A)$$

(On pourra distinguer deux cas suivant que A est inversible ou non.)

11* Soit C une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ décomposée en blocs :

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ appartiennent à } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Démontrer que $\operatorname{Det}(C) \geqslant 0$.

(On pourra effectuer des combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes de C avec des coefficients complexes.)

Calculs de déterminants

12 Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne est $|i-j|$.

13 Soit A une matrice carrée d'ordre n et B la matrice obtenue en ajoutant x à chaque coefficient de A. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\operatorname{Det}B = P(x)$. Quel est le degré de P ?

Application : Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \quad \text{avec } b \neq c.$$

Calculer par ailleurs le déterminant $D_n(a,b,b)$.

14 Calculer les déterminants suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{(n)} \quad \theta \in]0,\pi[$$

$$B_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(n)} \quad x \in]-1,1[$$

$$C_n = \begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 0 & & \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} & & 0 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}_{(2n)}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

$$E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$F_n = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \cdots & (2n-1)^2 \end{vmatrix}$$

15 Pour tout réel x, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

Montrer que la fonction D_n est dérivable et calculer $D_n'(x)$.

En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Comatrice

16 Calculer à l'aide de leur comatrice les inverses des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

17* Soit A une matrice carrée d'ordre n et $\widetilde{A}$ sa matrice complémentaire. Montrer que :

$$\begin{cases} \operatorname{rg} A = n & \Longrightarrow \quad \operatorname{rg} \widetilde{A} = n \\ \operatorname{rg} A = n-1 & \Longrightarrow \quad \operatorname{rg} \widetilde{A} = 1 \\ \operatorname{rg} A \leqslant n-2 & \Longrightarrow \quad \operatorname{rg} \widetilde{A} = 0 \end{cases}$$

Exercices posés aux oraux des concours

18 (CCP 2006)

Soit A, B, C, D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où A est inversible. On considère les matrices-blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice PM.

2) Montrer que $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(D - CA^{-1}B)$.

3) On suppose que $\mathrm{rg}\,(M) = n$. Démontrer que :

$$\mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(D) - \mathrm{Det}(B)\mathrm{Det}(C) = 0$$

19 (TPE 2006)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes qui commutent, g étant nilpotent.

1) Montrer que $\mathrm{Det}(g + \mathrm{Id}_E) = 1$.

2) En déduire que $\mathrm{Det}(f + g) = \mathrm{Det}(f)$.

20 (Centrale-Supelec 2007)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2$ telles que A, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$ et $A+4B$ soient inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad A + kB$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

28 Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens

INTRODUCTION

Pour décrire les propriétés géométriques de longueurs et d'angles, il faut enrichir la structure d'espace vectoriel par l'introduction d'un « produit scalaire ». Appliquée à l'analyse, cette notion permet d'utiliser le langage de la géométrie dans des espaces de fonctions, ce qui donne accès à des méthodes très efficaces d'approximations.

OBJECTIFS

- Introduction du produit scalaire.
- Utilisation des bases orthonormales.

1 Produit scalaire

1.1 • Définition

Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels.
On appelle produit scalaire sur E une **forme bilinéaire symétrique définie positive**, c'est-à-dire une application notée $\left|\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x|y) \end{array}\right.$:

- bilinéaire. Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et pour tous vecteurs x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid y) & = & \alpha_1 (x_1|y) + \alpha_2 (x_2|y) \\ (x \mid \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) & = & \beta_1 (x|y_1) + \beta_2 (x|y_2) \end{array}\right.$$

- symétrique $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad (y|x) = (x|y)$;
- définie positive $\quad \forall x \in E \quad (x|x) \geqslant 0 \quad$ et $\quad (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1.2 • Exemples

Nous verrons au paragraphe 3.1 que tout produit scalaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie est de cette forme dans certaines bases particulières, dites orthonormales.

1) $E = \mathbb{R}^n \quad$ si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \quad (x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
Il y a cependant d'autres produits scalaires possibles sur $\mathbb{R}^n$; par exemple, l'application définie par $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} k x_k y_k$.

2) $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \quad (f|g) = \int_a^b f(t) g(t)\, \mathrm{d}t$

Cette application est clairement bilinéaire symétrique. Elle est définie positive, car, pour toute fonction $f \in E$:

$$\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0 \right)$$

(car f^2 est positive et continue).

Pour s'entraîner : ex. 2

1.3 • Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1
Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad (x|y)^2 \leqslant (x|x)\,(y|y)$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration

- Si $y = 0$ $(x|y)^2 = 0$ et $(y|y) = 0$, d'où l'égalité.
- Si $y \neq 0$, observons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(x + \lambda y | x + \lambda y) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$(x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad (y|y) \neq 0$$

On reconnaît un trinôme du second degré en λ qui garde un signe constant : il a au plus une racine réelle, son discriminant est donc négatif :

$$\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)\,(y|y) \leqslant 0$$

En cas d'égalité, soit $y = 0$ et il est colinéaire à x, soit $y \neq 0$ et $\Delta' = 0$, le trinôme précédent possède alors une racine double λ_0, qui vérifie donc $(x + \lambda_0 y | x + \lambda_0 y) = 0$ d'où $x + \lambda_0 y = 0$; x et y sont liés.

Réciproquement, si x et y sont liés, soit $y = 0$, soit $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $x + \lambda y = 0$. Dans les deux cas l'égalité est vérifiée.

1.4 • Norme euclidienne

Dans un espace vectoriel réel E, on appelle norme toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall x \in E$ $N(x) \geqslant 0$;

2) $\forall x \in E$ $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall x \in E$ $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;

4) $\forall (x, y) \in E^2$ $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Théorème 2

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
L'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme, appelée *norme euclidienne* associée au produit scalaire.

Démonstration

Les points **1)** et **2)** figurent dans la définition du produit scalaire.

3) $\| \lambda x \| = \sqrt{(\lambda x | \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = |\lambda| \sqrt{(x|x)} = |\lambda| \; \| x \|$

4) $\| x + y \|^2 = (x + y | x + y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = \| x \|^2 + 2(x|y) + \| y \|^2$
$(\| x \| + \| y \|)^2 = \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2$
D'après Cauchy-Schwarz, $(x|y) \leqslant \| x \| \| y \|$; d'où $\| x + y \|^2 \leqslant (\| x \| + \| y \|)^2$
et $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.
(L'égalité est vérifiée si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.)

Un vecteur u est dit unitaire s'il est de norme 1 : $\| u \| = 1$.

Pour tout vecteur x non nul, il existe deux vecteurs unitaires colinéaires à x :

$$\frac{x}{\| x \|} \quad \text{et} \quad -\frac{x}{\| x \|}$$

■ Il existe des normes qui ne proviennent pas d'un produit scalaire. Elles font l'objet de l'étude des « espaces vectoriels normés ».

■ Une norme permet de définir une distance :

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

Elle donne donc accès aux propriétés topologiques de « voisinages », « limites », « continuité », etc.
Il existe des distances qui ne proviennent pas d'une norme. Elles font l'objet de l'étude des « espaces métriques », qui n'est pas au programme.

1.5 • Propriétés

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on obtient facilement :

$\forall (x, y) \in E^2$

$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2(x|y) + \| y \|^2 \quad ; \quad \| x-y \|^2 = \| x \|^2 - 2(x|y) + \| y \|^2$

$(x+y|x-y) = \| x \|^2 - \| y \|^2 \quad ; \quad (x|y) = \dfrac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2)$

Cette dernière égalité, appelée identité de polarisation, offre l'avantage d'exprimer un produit scalaire uniquement en termes de normes. Elle est utilisée pour démontrer des propriétés concernant le produit scalaire à partir de propriétés concernant les normes. (*Exemple : cf.* la définition d'un endomorphisme orthogonal au chapitre suivant.)

Pour s'entraîner : ex. 3

2 Orthogonalité

2.1 • Angle de deux vecteurs

Soit x, y deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{(x|y)}{\| x \| \, \| y \|} \in [-1, 1]$$

Il existe donc un réel θ unique de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que :

$$\frac{(x|y)}{\| x \| \, \| y \|} = \cos\theta$$

θ est appelé mesure de l'angle (non orienté) des vecteurs x et y.

2.2 • Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur. Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur angle a pour mesure $\pi/2$.

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits orthogonaux si :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad (x|y) = 0$$

Il est clair qu'on a alors : $F \cap G = \{0\}$.

Soit X une partie quelconque de E. On appelle orthogonal de X l'ensemble, noté $X^{\perp}$, des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de X :

$$X^{\perp} = \{y \in E \, , \, \forall x \in X \quad (y|x) = 0\}$$

Théorème 3
L'orthogonal d'une partie X de E est un sous-espace vectoriel de E et :

$$\mathrm{Vect}(X)^{\perp} = X^{\perp}$$

Démonstration
$X^{\perp}$ est non vide, car $0 \in X^{\perp}$. $X^{\perp}$ est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (y_1, y_2) \in {X^{\perp}}^2 \ \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in X \left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 | x\right) = \alpha_1 \left(y_1 | x\right) + \alpha_2 \left(y_2 | x\right) = 0$$

d'où $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in X^{\perp}$. $X^{\perp}$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
Tout vecteur orthogonal à $\mathrm{Vect}(X)$ est en particulier orthogonal à X : $\mathrm{Vect}(X)^{\perp} \subset X^{\perp}$. Et tout vecteur orthogonal à X est orthogonal à toute combinaison linéaire d'éléments de X : $X^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(X)^{\perp}$.

En particulier, si F est un sous-espace vectoriel, F et $F^{\perp}$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

2.3 • Familles orthogonales et orthonormales

Une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est dite orthogonale si ses éléments sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad (e_i | e_j) = 0$$

Une famille orthogonale dont aucun des vecteurs n'est nul est libre ; en effet, supposons que $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p = 0$, alors :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p | e_i) = \alpha_i \, (e_i | e_i) = 0$$

et, comme $\left(e_i | e_i\right) \neq 0$, $\alpha_i = 0$.

Théorème 4 (Relation de Pythagore)
Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthogonale :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \| e_i \|^2$$

Démonstration
En développant le produit scalaire $\left(\sum_{i=1}^{p} e_i \middle| \sum_{j=1}^{p} e_j \right)$, tous les termes $\left(e_i | e_j\right)$ où $i \neq j$ s'annulent.

Une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est dite orthonormale si ses éléments sont **unitaires** et orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad (e_i | e_j) = \delta_{ij}$$

δ_{ij} est appelé symbole de Kronecker :
$$\begin{cases} \text{si } i \neq j & \delta_{ij} = 0 \\ \text{si } i = j & \delta_{ij} = 1 \end{cases}$$

Une famille orthonormale est donc toujours libre.

3 Espaces euclidiens (dimension finie)

On appelle **espace vectoriel euclidien** un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

3.1 • Bases orthonormales

Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, toute famille orthonormale à n éléments est une base de E appelée **base orthonormale**.

L'intérêt de ce type de base provient de l'expression particulièrement simple du produit scalaire en fonction des coordonnées : soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale :

- Si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$:

$$(x|y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \qquad \text{et} \qquad \| x \| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

On reconnaît l'exemple de produit scalaire donné dans $\mathbb{R}^n$, qui sert donc de modèle pour tout produit scalaire en dimension finie, à condition d'utiliser une base orthonormale.

On se permet d'identifier une matrice carrée d'ordre 1 et son unique coefficient.

Matriciellement, si on représente les coordonnées de x et y par des matrices unicolonnes X et Y :

$$(x|y) = {}^tXY \quad \text{et} \quad \| x \| = \sqrt{{}^tXX}$$

Remarquons également que les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale sont les produits scalaires de ce vecteur par les vecteurs de base :

- Si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad (x|e_i) = x_i$.

On a donc :

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i) e_i$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x|y) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i) \quad \text{et} \quad \| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2}$$

Pour s'entraîner : ex. 7 et 8

3.2 • Existence de bases orthonormales

Théorème 5
Tout espace vectoriel euclidien possède au moins une base orthonormale.

Démonstration
Raisonnons par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel E.

- Si $\dim E = 0$, la famille vide est une base orthonormale de E !

- Soit n un entier naturel tel que tout espace vectoriel euclidien de dimension n possède une base orthonormale. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$. Comme $\dim E > 0$, E contient au moins un vecteur non nul u. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à u est le noyau de la forme linéaire $x \mapsto (x|u)$: c'est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension n ; d'après l'hypothèse de récurrence, il possède une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$. Le vecteur $e_{n+1} = \dfrac{u}{\|u\|}$ est unitaire ; la famille $(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1})$ est orthonormale et elle a $n+1$ éléments : c'est une base orthonormale de E.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout espace vectoriel euclidien de dimension n possède une base orthonormale.

3.3 • Supplémentaire orthogonal

Théorème 6

Si E est un espace vectoriel euclidien, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est un supplémentaire de F, appelé **supplémentaire orthogonal** de F :

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Démonstration

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormale de F. Pour tout vecteur x de E, le vecteur $x - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i$ est orthogonal à chaque vecteur e_i ; il appartient donc à $F^{\perp}$. On en déduit que $E = F + F^{\perp}$.

De plus, pour tout $x \in F \cap F^{\perp}$, $(x|x) = 0$, d'où $x = 0$. On a donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, et par conséquent $E = F \oplus F^{\perp}$. Les sous-espaces F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Il résulte de ce théorème que toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale. En effet, si la famille orthonormale $(e_1, \cdots, e_p)$ engendre le sous-espace vectoriel F, il suffit de la compléter par une base orthonormale de $F^{\perp}$ pour obtenir une base orthonormale de E.

Pour s'entraîner : ex. 4 et 5

3.4 • Projection orthogonale

Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **projection orthogonale** sur F la projection p sur F parallèlement à $F^{\perp}$. À tout vecteur x de E qui se décompose en : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$, $x_2 \in F^{\perp}$, l'application p associe x_1.

Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormale de F, nous avons déjà remarqué que $x - \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i$ appartenait à $F^{\perp}$; on a donc :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i$$

De même, on appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F la symétrie s par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$. Comme $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, pour tout vecteur x de E :

$$s(x) = 2\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i - x$$

Pour s'entraîner : ex. 6 et 9

3.5 • Orthonormalisation

Le théorème suivant donne un algorithme, appelé méthode d'**orthonormalisation de Schmidt** pour construire une base orthonormale à partir d'une base quelconque.

Théorème 7

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $b = (u_1, \cdots, u_n)$ une base quelconque de E.
Il existe une base orthonormale unique $b' = (e_1, \cdots, e_n)$ telle que :
1) $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$.
2) $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad (e_k | u_k) > 0$.

Démonstration

Raisonnons par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$.

Pour $k = 1$, il existe bien un vecteur unitaire unique colinéaire à u_1 et de même sens : $e_1 = \dfrac{u_1}{\| u_1 \|}$.

Soit pour $k \leqslant n - 1$ une famille orthonormale $(e_1, \cdots, e_k)$ répondant à la question.

On veut montrer l'existence et l'unicité d'un vecteur e_{k+1} tel que :

a) $e_{k+1} \in \text{Vect}(u_1, \cdots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k, u_{k+1})$.

b) La famille $(e_1, \cdots, e_{k+1})$ soit orthonormale.

c) $(e_{k+1} | u_{k+1}) > 0$.

Projetons orthogonalement u_{k+1} sur le sous-espace $F_k = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$:

$$u_{k+1} = (u_{k+1} | e_1) e_1 + \cdots + (u_{k+1} | e_k) e_k + v_{k+1}$$

où $v_{k+1} \in F_k^\perp$. On a bien :

a) $v_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k, u_{k+1})$.

b) La famille $(e_1, \cdots, e_k, v_{k+1})$ est orthogonale (mais pas encore orthonormale, car v_{k+1} n'est pas nécessairement unitaire).

c) Comme $(v_{k+1} | u_{k+1} - v_{k+1}) = 0$, $(v_{k+1} | u_{k+1}) = \| v_{k+1} \|^2 > 0$.

Il reste à normer v_{k+1} en le divisant par sa norme : $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{\| v_{k+1} \|}$.

e_{k+1} est l'unique vecteur satisfaisant aux trois conditions imposées.

En opérant la récurrence jusqu'au rang n, on obtient une base orthonormale unique $(e_1, \cdots, e_n)$ répondant aux conditions de l'énoncé.

Remarque *: Dans la pratique, pour alléger les calculs, on peut chercher d'abord une base uniquement orthogonale $(e'_1, \cdots, e'_n)$, puis à la fin normer les vecteurs en les divisant par leur norme.*

Exemple : $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique. Orthonormalisons la base :

$$u_1 = (1, 1, 0)\ ; \quad u_2 = (1, 0, 1)\ ; \quad u_3 = (0, 1, 1)$$

Posons

$$e'_1 = u_1 = (1, 1, 0)$$

Projetons u_2 orthogonalement sur $\mathrm{Vect}(e'_1)$: $u_2 = \lambda e'_1 + v_2$.

$$(v_2|e'_1) = (u_2|e'_1) - \lambda(e'_1|e'_1) = 1 - 2\lambda = 0 \qquad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$v_2 = u_2 - \dfrac{1}{2}e'_1 = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Choisissons $e'_2 = 2v_2 = (1, -1, 2)$.

Projetons u_3 orthogonalement sur $\mathrm{Vect}\,(e'_1, e'_2)$: $u_3 = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + v_3$.

$$\left(v_3|e'_1\right) = \left(u_3|e'_1\right) - \lambda_1\left(e'_1|e'_1\right) = 1 - 2\lambda_1 = 0 \qquad \text{d'où} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(v_3|e'_2\right) = \left(u_3|e'_2\right) - \lambda_2(e'_2|e'_2) = 1 - 6\lambda_2 = 0 \qquad \text{d'où} \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

$v_3 = u_3 - \dfrac{1}{2}e'_1 - \dfrac{1}{6}e'_2 = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. Choisissons $e'_3 = \dfrac{3}{2}v_3 = (-1, 1, 1)$.

Il reste à normer les vecteurs trouvés :

$$e_1 = \frac{e'_1}{\| e'_1 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$e_2 = \frac{e'_2}{\| e'_2 \|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e_3 = \frac{e'_3}{\| e'_3 \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

APPLICATION 1

Polynômes de Legendre

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$(P|Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Soit $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ la base orthonormalisée de la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}P_k.$$

1) *Calculer les polynômes L_0 à L_3.*

2) *Démontrer que pour tout n, le polynôme L_n possède n racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $]-1, 1[$.*

1) $P_0 = \dfrac{1}{\| 1 \|} = 1$, d'où $L_0 = 1$.

Posons : $\quad Q_1 = X - \dfrac{(X|L_0)}{(L_0|L_0)}L_0 = X.$

$$\| Q_1 \|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3},$$

d'où

$$P_1 = \frac{Q_1}{\| Q_1 \|} = \sqrt{3}X \quad \text{et} \quad L_1 = X.$$

Posons :

$$Q_2 = X^2 - \frac{(X^2|L_0)}{(L_0|L_0)}L_0 - \frac{(X^2|L_1)}{(L_1|L_1)}L_1 = X^2 - \frac{1}{3}.$$

$$\| Q_2 \|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{4}{45},$$

d'où

$$P_2 = \frac{Q_2}{\| Q_2 \|} = \frac{\sqrt{5}}{2}(3X^2 - 1)$$

et

$$L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1).$$

Posons :

$$Q_3 = X^3 - \frac{(X^3|L_0)}{(L_0|L_0)}L_0 - \frac{(X^3|L_1)}{(L_1|L_1)}L_1 - \frac{(X^3|L_2)}{(L_2|L_2)}L_2$$
$$= X^3 - \frac{3}{5}X.$$

$$\| Q_3 \|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{4}{175},$$

d'où

$$P_3 = \frac{Q_3}{\| Q_3 \|} = \frac{\sqrt{7}}{2}(5X^3 - 3X)$$

et

$$L_3 = \frac{1}{2}(5X^3 - 3X).$$

2) Supposons que le polynôme L_n change k fois de signe ($k \in [\![0, n]\!]$) dans l'intervalle $]-1, 1[$ pour les valeurs $(x_1, \cdots, x_k)$ (ce sont les racines d'ordre impair de L_n). Considérons le polynôme $K = (X - x_1)\cdots(X - x_k)$ (si $k = 0$, on posera $K = 1$). Le produit KL_n reste positif sur $]-1, 1[$ sans être partout nul, donc :

$$\int_{-1}^{1} K(t)L_n(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

c'est-à-dire $(K|L_n) > 0$. Comme L_n est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(L_0, \cdots, L_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en déduit que K est de degré n.

Le polynôme L_n possède donc n racines distinctes dans $]-1, 1[$. Comme il est de degré n, il n'a pas d'autres racines.

Pour s'entraîner : ex. 10

3.6 • Forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien

La structure d'espace vectoriel euclidien permet de représenter une forme linéaire par un vecteur unique.

Théorème 8

Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour toute forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un vecteur y unique tel que :

$$\forall x \in E \quad f(x) = (x|y)$$

Démonstration

À tout y de E on peut associer la forme linéaire $\left|\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta_y} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x|y) \end{array}\right.$.

L'application $\left|\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ y & \mapsto & \theta_y \end{array}\right.$ est linéaire. Son noyau est :

$$\mathrm{Ker}\,\theta = \{ y \in E\ ,\ \forall x \in E \quad (x|y) = 0 \} = E^{\perp} = \{0\}$$

θ est donc injective et comme $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, elle est bijective.

θ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Toute forme linéaire f a donc un antécédent unique par cet isomorphisme, c'est-à-dire un vecteur y tel que pour tout $x \in E$: $f(x) = (x|y)$.

Exemples :

1) C'est ce théorème qui permet de représenter un hyperplan H, noyau d'une forme linéaire non nulle, par un **vecteur normal** n : pour tout $x \in E$, $x \in H \iff (x|n) = 0$.

2) Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et x, y deux vecteurs de E. L'application qui à un troisième vecteur z associe le déterminant de la famille (x, y, z) dans une base orthonormale directe, appelé **produit mixte** et noté $[x, y, z]$, est une forme linéaire sur E. Il existe donc un vecteur X tel que pour tout $z \in E$, $[x, y, z] = (X|z)$; on l'appelle **produit vectoriel** de x et y et on le note $x \wedge y$. Ainsi :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad [x, y, z] = (x \wedge y \mid z)$$

3) Nous verrons, dans le chapitre 31 : *Fonctions de deux variables*, que la différentielle $\mathrm{d}f$ d'une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. Il existe donc un vecteur, appelé **gradient** de f tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{d}f(u) = (\mathrm{Grad}(f) \mid u)$$

MÉTHODE

Pour montrer qu'une application f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire, on peut :

- montrer d'abord qu'elle est linéaire par rapport à la première variable ;
- puis qu'elle est symétrique, ce qui établit la bilinéarité ;
- montrer ensuite qu'elle est positive :

$$\forall x \in E \quad f(x, x) \geqslant 0 ;$$

- et enfin que :

$$\forall x \in E \quad f(x, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

(cf. exercice 2) .

Pour montrer qu'une application N de E dans $\mathbb{R}$ est une norme euclidienne, on peut lui associer l'application f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\right)$$

et vérifier que f est linéaire par rapport à la première variable (elle sera alors nécessairement bilinéaire symétrique et définie positive).

Pour construire une base orthonormale, on peut partir d'une base quelconque et l'orthonormaliser par le procédé de Schmidt *(cf. Application* 1 et *exercice* 10)

Exercice résolu

POLYNÔMES INTERPOLATEURS DE LAGRANGE

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et l'application :*

$$\left| \begin{array}{ccc} E^2 & \overset{\varphi}{\to} & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(i)\, Q(i) \end{array} \right.$$

1 *Montrer que* φ *est un produit scalaire sur* E.

2 *Déterminer une famille de* $n+1$ *polynômes de* E : $(L_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n)$ *telle que :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad L_i(j) = \delta_{i,j}$$

3 *Montrer que* $(L_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n)$ *est une base orthonormée de* (E, φ).

4 *Donner les coordonnées dans cette base d'un polynôme* P *de* E.

Conseils

Appliquer le définition d'un produit scalaire.

Solution

1) Vérifions que φ est :

- symétrique :

$$\begin{aligned} \forall (P, Q) \in E^2, \qquad \varphi(Q, P) &= \sum_{i=0}^{n} Q(i)\, P(i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(i)\, Q(i) = \varphi(P, Q) \end{aligned}$$

- bilinéaire : la symétrie permet de se limiter à la linéarité par rapport à l'une des deux variables ; pour tout $(P, Q, R) \in E^3$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q, R) &= \sum_{i=0}^{n} [\alpha P(i) + \beta Q(i)]\ R(i) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n} P(i)\, R(i) + \beta \sum_{i=0}^{n} Q(i)\, R(i) \\ &= \alpha\, \varphi(P, R) + \beta\, \varphi(Q, R) \end{aligned}$$

- définie positive :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P, P) = \sum_{i=0}^{n} P(i)^2 \geqslant 0$$

$$\text{et :} \quad \varphi(P, P) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![0, n]\!]^2 \quad P(i) = 0$$

Le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, possède alors $n+1$ racines distinctes : c'est le polynôme nul.

φ est donc un produit scalaire, (E, φ) est un espace vectoriel euclidien de dimension $n + 1$.

Examinez les propriétés que doit vérifier le polynôme L_i

2) Pour tout $j \neq i$, $L_i(j) = 0$, ce qui entraîne que L_i est divisible par

$$\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - j).$$

d'où :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - j)\ Q_i(X) \quad \text{avec} \quad Q_i \in \mathbb{R}[X]$$

alors $\deg(L_i) = n + \deg(Q_i)$, or $\deg(L_i) \leqslant n$, ce qui entraîne que Q_i est une constante q_i. De plus

$$L_i(i) = 1,$$

d'où :

$$\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (i - j)\ q_i = 1$$

ce qui donne q_i, et en définitive :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - j}{i - j}$$

Ces polynômes ont déjà été étudiés dans l'exercice résolu du chapitre 13.

Les polynômes L_i sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange aux points i, pour $i \in [\![0, n]\!]$.

3) Calculons, pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ $\varphi(L_i, L_j)$:

$$\varphi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(k)\, L_j(k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\, \delta_{j,k} = \delta_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il est inutile de vérifier d'abord que la famille est libre : il suffit de montrer qu'elle est orthonormale.

La famille $(L_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille de $n + 1$ polynômes de E, orthonormale donc libre : c'est une base de E.

4) Pour tout polynôme $P \in E$:

$$P = \sum_{i=0}^{n} \varphi(P, L_i) L_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} P(k) L_i(k) L_i = \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i$$

Les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale sont les produits scalaires de ce vecteur par les vecteurs de base.

Les coordonnées du polynôme P dans la base (L_i) sont les valeurs $P(i)$ prises par le polynôme aux points $i \in [\![0, n]\!]$.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Pour tous vecteurs x et y d'un e.v. euclidien :

$$(x|y) \leqslant \| x \| \| y \|$$

b) Pour tout vecteur x et tout réel k : $\| kx \| = k \| x \|$

c) Le seul vecteur orthogonal à tous les éléments de E est le vecteur nul.

d) L'expression du produit scalaire est la même dans toutes les bases orthonormales.

e) Dans un espace vectoriel euclidien, un sous-espace vectoriel et son orthogonal sont supplémentaires.

f) Toute famille libre d'un espace vectoriel euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

g) Toute forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien associe à un vecteur son produit scalaire par un vecteur fixé.

Produit scalaire

2 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer que l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f \mid g) = f(0)\, g(0) + \int_0^1 f'(t) g'(t)\, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

3 Soit E un espace vectoriel euclidien et f, g, deux endomorphismes de E tels que :

$$\forall x \in E \quad \| f(x) \| = \| g(x) \|$$

Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x)|f(y)) = (g(x)|g(y))$$

4 Soit X une partie quelconque d'un espace vectoriel euclidien. Démontrer que :

$$(X^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(X)$$

5 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.

1) Montrer que : $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$.

2) Comparer $(F + G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp$.

3) Comparer $(F \cap G)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp$.

6 Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E. Démontrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \| p(x) \| \leqslant \| x \|$$

Bases orthonormales

7 Soit E l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n :

$$f(x) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} a_{ij} \cos^i x \sin^j x$$

On munit E du produit scalaire défini par :

$$(f \mid g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Montrer que la famille :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx \right)$$

est une base orthonormale de E. En déduire la dimension de E.

8 Soit E un espace vectoriel euclidien, et $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que :

$$\forall x \in E \quad \| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$

Montrer que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

9 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormale. Déterminer la matrice dans cette base de la projection orthogonale sur la droite vectorielle dirigée par le vecteur unitaire $u = (\alpha, \beta, \gamma)$.

En déduire la matrice dans cette même base de la projection orthogonale sur le plan vectoriel de vecteur normal unitaire u, puis les matrices des symétries orthogonales par rapport à ces deux sous-espaces.

10 Orthonormaliser la base suivante de $\mathbb{R}^4$ (pour le produit scalaire habituel) :

$$u_1 = (0, 1, 1, 1) \quad u_2 = (1, 0, 1, 1)$$

$$u_3 = (1, 1, 0, 1) \quad u_4 = (1, 1, 1, 0)$$

Exercices posés aux oraux des concours

11 (Petites Mines 2003)

Soit D la droite vectorielle dirigée par $u = i + 2j + 3k$, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, muni de la base orthonormée $B = (i, j, k)$.

Déterminer la matrice relativement à B de la projection orthogonale p sur D et en déduire celle de la projection orthogonale sur $D^\perp$.

12 (CCP 2006)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

1) Montrer que pour tous $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}$: $\|f^k(x)\| \leqslant \|x\|$.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) = E$.

3) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

29 Automorphismes orthogonaux

INTRODUCTION

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux endomorphismes de la structure d'espace vectoriel euclidien, c'est-à-dire aux endomorphismes (au sens applications linéaires) qui conservent le produit scalaire. Cette étude prépare d'un point de vue purement vectoriel celle des isométries du plan ou de l'espace, qui fera l'objet du chapitre suivant.

OBJECTIFS

- Savoir reconnaître une matrice orthogonale.
- Savoir reconnaître un automorphisme orthogonal et trouver ses éléments caractéristiques.
- En particulier, savoir trouver l'axe et l'angle d'une rotation vectorielle de l'espace.

1 Automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien

1.1 • Définition et caractérisation

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme f de E est dit **orthogonal** s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (f(x) \mid f(y)) = (x|y)$$

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E \quad \| f(x) \| = \| x \|$$

Démonstration

1) Soit f un endomorphisme orthogonal de E. f conserve le produit scalaire ; en particulier :

$$\forall x \in E \quad \| f(x) \|^2 = (f(x) \mid f(x)) = (x|x) = \| x \|^2$$

f conserve la norme.

Voir chapitre 28, paragraphe 1.5.

2) Soit f un endomorphisme de E qui conserve la norme ; d'après l'égalité de polarisation, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
\big(f(x)|f(y)\big) &= \frac{1}{4}\left(\| f(x) + f(y) \|^2 - \| f(x) - f(y) \|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\| f(x+y) \|^2 - \| f(x-y) \|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2\right) \\
&= (x|y)
\end{aligned}$$

f conserve le produit scalaire : il est orthogonal.

Il résulte de ce théorème qu'un endomorphisme orthogonal est nécessairement bijectif ; en effet :

$$f(x) = 0 \ \Rightarrow \| f(x) \| = 0 \ \Rightarrow \| x \| = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$$

donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$; comme E est de dimension finie, f est bijectif. On parlera désormais d'**automorphisme orthogonal**.

APPLICATION 1

Montrer qu'une application de E dans E qui conserve le produit scalaire est nécessairement linéaire. En est-il de même d'une application qui conserve la norme ?

Supposons que f conserve le produit scalaire ; soit x, y deux vecteurs de E, et α, β deux réels. En développant l'expression :

$$\| f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) \|^2$$

on fait apparaître des produits scalaires d'images de vecteurs par f, qui sont égaux aux produits scalaires de ces vecteurs, d'où :

$$\|f(\alpha x+\beta y)-\alpha f(x)-\beta f(y)\|^2$$
$$=\|(\alpha x+\beta y)-\alpha x-\beta y\|^2=0$$

On en déduit : $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$: f est linéaire.

Notons que si f conserve le produit scalaire, elle conserve la norme. Néanmoins, une application qui conserve seulement la norme n'est pas nécessairement linéaire : par exemple, si $b=(e_1,e_2)$ est une base orthonormale, l'application $x\mapsto\|x\|\,e_1$ n'est pas linéaire.

1.2 • Groupe orthogonal de E

Théorème 2

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$, appelé **groupe orthogonal** de E et noté $\mathcal{O}(E)$.

Démonstration

Id_E est orthogonal ; la composée de deux automorphismes orthogonaux de E est orthogonale ; l'inverse d'un automorphisme orthogonal est orthogonal.

1.3 • Image d'une base orthonormale

Montrons qu'on peut aussi caractériser un endomorphisme orthogonal par la conservation du caractère orthonormal d'une base.

Théorème 3

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $b=(e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormale de E. Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si la famille $f(b)=(f(e_1),\cdots,f(e_n))$ est une base orthonormale.

RAPPEL

δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$
$\delta_{ij}=1$ si $i=j$

Démonstration

1) Soit f un endomorphisme orthogonal de E. f conserve le produit scalaire, donc :

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\quad (f(e_i)|f(e_j))=(e_i|e_j)=\delta_{ij}$$

donc la famille $(f(e_1),\cdots,f(e_n))$ est orthonormale ; comme elle a n éléments, c'est une base.

2) Supposons que la famille $f(b)$ soit une base orthonormale. Pour tout vecteur $x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n$ de E, $f(x)=\xi_1f(e_1)+\cdots+\xi_nf(e_n)$. L'expression de la norme étant la même dans toutes les bases orthonormales :

$$\|x\|=\|f(x)\|=\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}$$

f conserve donc la norme : il est orthogonal.

Remarque *: Ce théorème prouve que si f est orthogonal, l'image de* toute *base orthonormale est une base orthonormale, mais pour démontrer qu'un endomorphisme est orthogonal, il suffit de montrer que l'image d'*une *base orthonormale donnée est orthonormale.*

2 Matrices orthogonales

2.1 • Matrice d'un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale

Soit E un espace vectoriel euclidien, $b = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, et f un endomorphisme de E. Considérons la matrice A représentative de f dans la base b :

$$A = \mathcal{M}_b(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

f est orthogonal si et seulement si la famille de vecteurs colonnes

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

est orthonormale, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \quad {}^tX_iX_j = \delta_{ij}$$

ce qui exprime que : ${}^tAA = I_n$, c'est-à-dire : ${}^tA = A^{-1}$.

Remarque *: On a aussi :* $A\,{}^tA = I_n$.

RAPPEL

δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

On appelle **matrice orthogonale** une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible dont l'inverse est égale à la transposée.

Nous venons de montrer que si un endomorphisme f est orthogonal, sa matrice dans toute base orthonormale est orthogonale, et qu'il suffit que sa matrice dans une base orthonormale donnée soit orthogonale pour que f soit orthogonal.

Notons de plus que puisqu'un automorphisme orthogonal transforme une base orthonormale en une base orthonormale, la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre est une matrice orthogonale. Étant donné deux bases dont la matrice de passage est orthogonale, si l'une est orthonormale, l'autre l'est aussi.

2.2 • Groupe orthogonal d'ordre *n*

Théorème 4

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe orthogonal** d'ordre n et noté $\mathcal{O}(n)$.

Démonstration

C'est l'image du groupe $\mathcal{O}(E)$ par l'isomorphisme $f \mapsto \mathcal{M}_b(f)$ où E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, et b une base orthonormale de E.

2.3 • Déterminant d'un automorphisme ou d'une matrice orthogonal(e)

Soit A une matrice orthogonale d'ordre $n \leqslant 3$. De l'égalité : ${}^tAA = I_n$, on déduit : $\text{Det}\,{}^tA\,\text{Det}A = 1$, c'est-à-dire : $(\text{Det}A)^2 = 1$, d'où : $\text{Det}A = \pm 1$.

Une matrice orthogonale, et par conséquent un automorphisme orthogonal, a nécessairement pour déterminant 1 ou -1.

Théorème 5
L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$, appelé **groupe spécial orthogonal** d'ordre n et noté $\mathcal{SO}(n)$.
L'ensemble des automorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, appelé **groupe spécial orthogonal** de E et noté $\mathcal{SO}(E)$.

Démonstration
$\mathcal{SO}(n)$ est le noyau du morphisme de groupes de $\mathcal{O}(n)$ dans $\{-1, 1\}$: $A \mapsto \mathrm{Det}A$.

$\mathcal{SO}(E)$ est le noyau du morphisme de groupes de $\mathcal{O}(E)$ dans $\{-1, 1\}$: $f \mapsto \mathrm{Det}f$.

3 Symétries et réflexions

3.1 • Symétries orthogonales

Un premier exemple d'automorphisme orthogonal nous est donné par une symétrie orthogonale, c'est-à-dire la symétrie par rapport à un sous-espace F parallèlement à $F^\perp$:

ATTENTION
Il ne faut pas se fier à l'apparente évidence de l'énoncé de ce théorème. Une projection orthogonale par exemple n'est jamais un automorphisme orthogonal sauf si c'est l'identité de E !

Théorème 6
Une symétrie est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Démonstration
1) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Supposons que $s \in \mathcal{O}(E)$.

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad (x|y) = (s(x) \mid s(y)) = (x| - y) = -(x|y) \quad \text{d'où} \quad (x|y) = 0$$

F et G sont orthogonaux et supplémentaires, donc s est une symétrie orthogonale.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E et s la symétrie orthogonale par rapport à F. Pour tout x et tout y de E, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, y_1) \in F$ et $(x_2, y_2) \in F^\perp$.

$$\begin{array}{rcccl} (x|y) & = & (x_1 + x_2|y_1 + y_2) & = & (x_1|y_1) + (x_2|y_2) \\ (s(x)|s(y)) & = & (x_1 - x_2|y_1 - y_2) & = & (x_1|y_1) + (x_2|y_2) \end{array}$$

donc s conserve le produit scalaire ; c'est un automorphisme orthogonal.

On appelle **réflexion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. C'est un automorphisme orthogonal de déterminant -1 (penser à sa matrice dans une base convenablement choisie).

3.2 • Ensemble des vecteurs invariants par un automorphisme orthogonal

Soit E un espace vectoriel euclidien, et f un automorphisme orthogonal de E. L'ensemble des vecteurs de E invariants par f est le sous-espace vectoriel $F = \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$.

Montrons que le sous-espace $F^\perp$ est stable par f :

Soit $x \in F^\perp$ $\quad \forall y \in F \quad (f(x)\,|y) = (f(x)\,|\,f(y)) = (x|y) = 0$:

$$f(x) \in F^\perp.$$

Donc $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

La restriction de f à $F^\perp \to F^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$.

Théorème 7

Un automorphisme orthogonal dont l'ensemble des vecteurs invariants est un hyperplan H est la réflexion par rapport à H.

Démonstration

Le sous-espace $H^\perp$ est une droite. La restriction de f à $H^\perp \to H^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $H^\perp$, distinct de $\text{Id}_{H^\perp}$ (sinon, l'ensemble des vecteurs invariants par f serait E tout entier). C'est nécessairement $-\text{Id}_{H^\perp}$.

Pour tout vecteur x de E se décomposant en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H$, $x_2 \in H^\perp$, $f(x) = x_1 - x_2$: f est la réflexion par rapport à l'hyperplan H.

Ce théorème va nous permettre de donner une classification des automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace, en discutant suivant la dimension du sous-espace F.

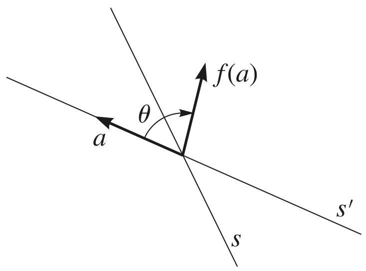
Pour s'entraîner : ex. 2

4 Automorphismes orthogonaux du plan

4.1 • Automorphismes orthogonaux en dimension 2

Soit E un plan euclidien ($\dim E = 2$) orienté, f un automorphisme orthogonal de E et $F = \text{Ker}\,(f - \text{Id}_E)$ l'ensemble des vecteurs invariants par f.

- Si $\dim F = 2$, $\quad F = E$, $\quad f = \text{Id}_E$.
- Si $\dim F = 1$, $\quad F$ est une droite vectorielle, c'est-à-dire un hyperplan de E. f est la réflexion par rapport à la droite F. Son déterminant est -1.
- Si $\dim F = 0$, $\quad F = \{0\}$. Soit a un vecteur non nul de E, s la réflexion par rapport à la médiatrice de $[a, f(a)]$. L'automorphisme orthogonal $s \circ f$ laisse



Doc. 1 Composée de deux réflexion.

a invariant ; comme ce n'est pas l'identité de E, il s'agit d'une réflexion s'. En définitive $f = s \circ s'$. f est la composée de deux réflexions ; son déterminant est $+1$. Pour tout vecteur x de E, l'angle orienté $(x, f(x))$ est le double de l'angle des axes des deux réflexions : c'est une constante θ. f est la **rotation vectorielle** d'angle θ (*Doc.* 1).

Remarque : *Par exemple, la symétrie centrale* $-\mathrm{Id}_E$ *est la rotation vectorielle d'angle* π.

En conclusion, les automorphismes orthogonaux du plan euclidien sont les rotations (dont l'identité) et les réflexions. L'ensemble des rotations est le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$.

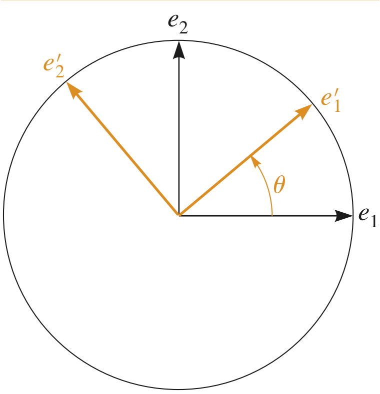
Tout automorphisme orthogonal du plan est la composée d'au plus deux réflexions : les réflexions engendrent le groupe $\mathcal{O}(E)$.

4.2 • Groupe $\mathcal{O}(2)$

Soit A une matrice orthogonale d'ordre 2. A est la matrice d'un automorphisme orthogonal f dans une base orthonormale $b = (e_1, e_2)$ que l'on peut choisir directe.

- Si $\det A = 1$, f est une rotation, qui transforme la base b en une base orthonormale directe $b' = (e'_1, e'_2)$. Comme $\| e'_1 \| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e'_1 = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$. e'_2 est l'image de e'_1 par la rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$: $e'_2 = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$ (*Doc.* 2). D'où la matrice A :

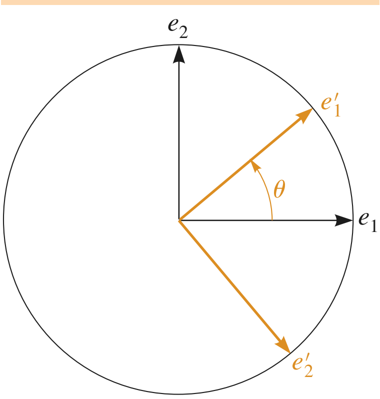
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Doc. 2 Rotation d'angle θ.

- Si $\det A = -1$, f est une réflexion, qui transforme la base b en une base orthonormale rétrograde $b' = (e'_1, e'_2)$. Comme $\| e'_1 \| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e'_1 = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$. e'_2 est l'image de e'_1 par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$: $e'_2 = \sin\theta\, e_1 - \cos\theta\, e_2$ (*Doc.* 3). D'où la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$



Doc. 3 Réflexion.

Remarque : *La rotation vectorielle d'angle* θ *a la même matrice dans toutes les bases orthonormales directes, alors que la matrice d'une réflexion dépend de la base choisie ; en prenant* e_1 *sur l'axe* D *de la réflexion et* e_2 *sur la droite* $D^\perp$, *la matrice de la réflexion devient :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3 • Composition des rotations planes

Théorème 8

La composée des rotations vectorielles d'angles θ et θ' est la rotation vectorielle d'angle $\theta + \theta'$. Autrement dit, l'application qui à θ fait correspondre la rotation d'angle θ est un morphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{O}(E)$.

Démonstration

Il suffit d'effectuer le produit de matrices :

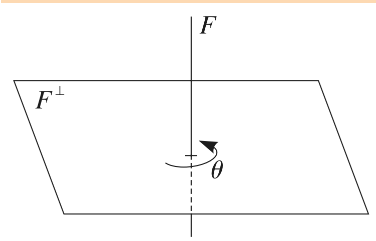
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

5 Automorphismes orthogonaux de l'espace

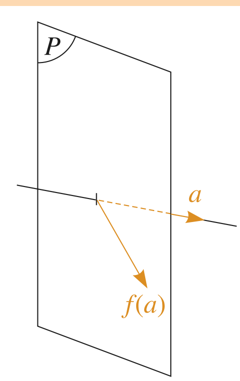
5.1 • Automorphismes orthogonaux en dimension 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté, f un automorphisme orthogonal de E et $F = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ l'ensemble des vecteurs invariants par f.

- Si $\dim F = 3$, $F = E$, $f = \mathrm{Id}_E$.
- Si $\dim F = 2$, F est un plan, c'est-à-dire un hyperplan de E. f est la réflexion par rapport au plan F. Son déterminant est -1.
- Si $\dim F = 1$, F est une droite, $F^\perp$ est un plan ; la restriction de f à $F^\perp$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$ qui n'a pas de vecteur invariant non nul : c'est une rotation du plan $F^\perp$, composée de deux réflexions d'axes D_1, D_2 dans le plan $F^\perp$.
  f est la composée des réflexions de l'espace par rapport aux plans $D_1 + F$, $D_2 + F$. Elle appelée **rotation** d'axe F. Son déterminant est $+1$.
  Pour attribuer un angle à cette rotation, il faut orienter la droite F, ce qui induit une orientation du plan $F^\perp$ conformément à l'orientation de l'espace. On appellera alors angle de la rotation f l'angle de sa restriction au plan orienté $F^\perp$ (*Doc.* 4).
- Si $\dim F = 0$, $F = \{0\}$. Soit a un vecteur non nul de E, s la réflexion par rapport au plan médiateur de $[a, f(a)]$. L'automorphisme orthogonal $s \circ f$ laisse a invariant ; comme ce n'est ni l'identité de E ni une réflexion, c'est nécessairement une rotation, c'est-à-dire la composée de deux réflexions (*Doc.* 5). En définitive, f est la composée de trois réflexions ; son déterminant est -1 .



Doc. 4 Rotation d'axe F.



Doc. 5 Décomposition de f lorsque $\dim F = 0$.

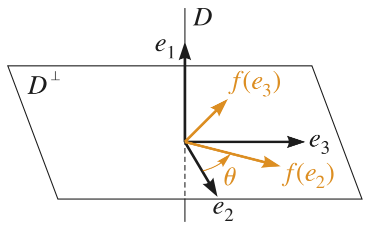
Remarque *: Alors qu'en dimension 2 la symétrie centrale $-\mathrm{Id}_E$ est une rotation, en dimension 3 c'est la composée de trois réflexions : son déterminant est -1.*

En conclusion, les automorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 sont les rotations (dont l'identité), les réflexions, et les composées de trois réflexions. L'ensemble des rotations est le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}(E)$.

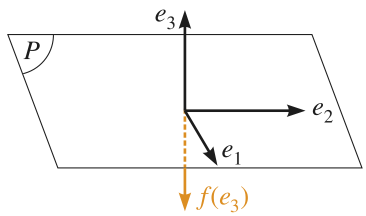
Tout automorphisme orthogonal de l'espace est la composée d'au plus trois réflexions : les réflexions engendrent le groupe $\mathcal{O}(E)$.

5.2 • Groupe $\mathcal{O}(3)$

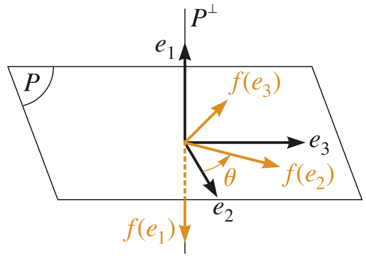
La forme de la matrice d'un automorphisme orthogonal f d'un espace de dimension 3 relativement à une base orthonormale quelconque peut être compliquée et difficilement reconnaissable. Nous nous contenterons de donner la matrice de f dans une base orthonormale convenablement choisie.



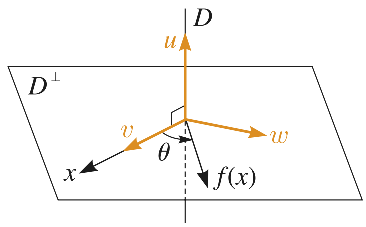
Doc. 6 Rotation d'axe D



Doc. 7 Réflexion de plan P.



Doc. 8 Composée rotation-réflexion.



Doc. 9 Détermination de l'angle d'une rotation.

- Si f est la rotation d'axe D de vecteur unitaire e_1 d'angle θ (relativement à l'orientation de D par le vecteur e_1), on complète e_1 en une base orthonormale directe $b = (e_1, e_2, e_3)$ (*Doc.* 6). La matrice de f dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Si f est la réflexion de plan P, on complète une base orthonormale (e_1, e_2) de P en une base orthonormale $b = (e_1, e_2, e_3)$ de E (*Doc.* 7). La matrice de f dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si f est la composée de la réflexion de plan P et de la rotation d'axe $P^{\perp}$ de vecteur unitaire e_1 d'angle θ (relativement à l'orientation de $P^{\perp}$ par le vecteur e_1), on complète e_1 en une base orthonormale directe $b = (e_1, e_2, e_3)$ (*Doc.* 8). La matrice de f dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5.3 • Étude d'une rotation de l'espace

Soit f la rotation d'axe D dirigé par le vecteur unitaire u, d'angle θ (relativement à l'orientation de D induite par le vecteur u).

Cherchons l'image par f d'un vecteur x orthogonal à D. Considérons les vecteurs : $v = \dfrac{x}{\|x\|}$, $w = u \wedge v$; la famille (u, v, w) est une base orthonormale directe de E (*Doc.* 9). $f(v) = \cos\theta\, v + \sin\theta\, w$, d'où en multipliant par $\|x\|$:

$$f(x) = \cos\theta\, x + \sin\theta\, u \wedge x$$

On en déduit :

$$\big(x | f(x)\big) = \|x\|^2 \cos\theta \quad ; \quad x \wedge f(x) = \|x\|^2 \sin\theta\, u$$

Ces relations peuvent servir à déterminer l'angle d'une rotation.

APPLICATION 2

Reconnaître une rotation

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une rotation ; déterminer son axe et son angle.

On vérifie que les vecteurs colonnes de la matrice A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, donc f est un automorphisme orthogonal. Cherchons l'ensemble des vecteurs invariants par f, c'est-à-dire le sous-espace $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à :

$$\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

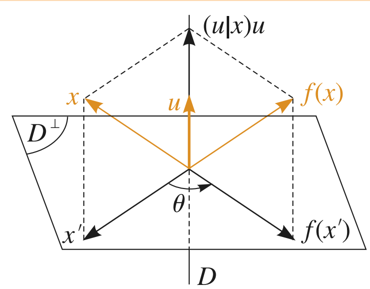
Ce système a pour solution l'ensemble des éléments (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = 3x = 3y$. L'application f est donc une rotation d'axe D, dirigé par le vecteur $(1, 1, 3)$.

Choisissons un vecteur x orthogonal à cet axe, par exemple $x = (1, -1, 0)$. On calcule son image : $f(x) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. D'où $\big(x|f(x)\big) = -\frac{5}{3}$ et $\cos\theta = \frac{\big(x|f(x)\big)}{\|x\|^2} = -\frac{5}{6}$. L'angle de la rotation est donc en valeur absolue $\theta = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$.

Pour orienter cet angle, calculons :

$$x \wedge f(x) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) ;$$

en orientant l'axe D dans le sens du vecteur $(1, 1, 3)$, l'angle de la rotation est direct.



Doc. 10 Expression générale d'une rotation.

Plus généralement, cherchons l'image d'un vecteur x quelconque ; on peut décomposer x en (*Doc.* 10) :

$$x = (u|x)\,u + x' \quad \text{où } x' \in D^\perp$$

On a alors :

$$f(x) = (u|x)\,u + f(x') = (u|x)\,u + \cos\theta\, x' + \sin\theta\, u \wedge x'$$

or $u \wedge x' = u \wedge x$, d'où :

$$f(x) = (u|x)\,u + \cos\theta\,(x - (u|x)\,u) + \sin\theta\, u \wedge x$$

$$\boxed{f(x) = (u|x)\,(1 - \cos\theta)\,u + \cos\theta\, x + \sin\theta\, u \wedge x}$$

Cette relation permet d'écrire la matrice la plus générale d'une rotation relativement à une base orthonormale directe (*cf.* exercice 5).

Pour s'entraîner : ex. 3 à 5

MÉTHODE

Pour montrer qu'un endomorphisme est orthogonal, on peut :

- montrer qu'il conserve le produit scalaire ;
- montrer qu'il conserve la norme ;
- montrer qu'il transforme une base orthonormale en une autre ;
- montrer que sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Pour montrer qu'une matrice carrée est orthogonale, on peut :

- montrer que le produit de cette matrice par sa transposée est égal à la matrice unité ;
- montrer que les vecteurs colonnes forment une famille orthonormale ;
- montrer que c'est la matrice de passage d'une base orthonormale en une autre ;
- montrer que l'endomorphisme canoniquement associé est orthogonal.

Pour reconnaître un automorphisme orthogonal f à partir de sa matrice dans une base orthonormale :

- avant tout vérifier que cette matrice est orthogonale ;
- éventuellement calculer son déterminant, qui peut être 1 ou -1 ;
- chercher l'ensemble des vecteurs invariants ; c'est un sous-espace dont la dimension renseigne complètement sur la nature de l'application f ;
- déterminer les éléments caractéristiques de f (par exemple pour une rotation, axe et angle).

Pour déterminer l'angle d'une rotation, on peut :

- choisir un vecteur x orthogonal à l'axe de la rotation ; le produit scalaire $(x|f(x))$ donne l'angle de la rotation, sans orientation ; le produit vectoriel $x \wedge f(x)$ détermine l'orientation de l'axe qui permet de prendre positif l'angle de la rotation.

Exercice résolu

ROTATIONS DE L'ESPACE QUI COMMUTENT

1) *Soit R une rotation de l'espace. Montrer que s'il existe un vecteur v non nul tel que $R(v) = -v$, alors R est un demi-tour dont l'axe est orthogonal à v.*

2) *Soit R, R' deux rotations distinctes de l'identité, d'axes dirigés respectivement par les vecteurs unitaires u et u'. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que R et R' commutent.*

Conseils

Choisir une base et exprimer analytiquement la rotation.

À quelle condition existe-t-il un vecteur v non nul tel que $R(v) = -v$?

Appliquer l'égalité $R \circ R' = R' \circ R$ aux vecteurs u et u'.

Ne pas oublier la réciproque.

Solution

1) Soit e_1 un vecteur unitaire de l'axe de la rotation R. On peut compléter (e_1) en une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) ; la matrice de R dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Cherchons un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ tel que $R(v) = -v$, ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} x = -x \\ y\cos\theta - z\sin\theta = -y \\ y\sin\theta + z\cos\theta = -z \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y(1+\cos\theta) - z\sin\theta = 0 \\ y\sin\theta + z(1+\cos\theta) = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système possède une solution non nulle, il est nécessaire que son déterminant soit nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 1+\cos\theta \end{vmatrix} = 0$$

ce qui équivaut à : $(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 0$, d'où $\cos\theta = -1$, $\theta = \pi$: la rotation R est un demi-tour.

Réciproquement, si R est un demi-tour, tout vecteur orthogonal à l'axe est transformé en son opposé.

2) Supposons que $R \circ R' = R' \circ R$. En appliquant cette égalité au vecteur u, invariant par R, on obtient : $R\Big(R'(u)\Big) = R'(u)$; le vecteur $R'(u)$ est invariant par R, il est donc colinéaire à u. Comme R' conserve la norme, on a : $R'(u) = \pm u$.

- Si $R'(u) = u$, u est invariant par R', donc colinéaire à u' : les rotations R et R' ont le même axe.
- Si $R'(u) = -u$, R' est un demi-tour d'axe orthogonal à u. Le même raisonnement s'applique à R : R et R' sont deux demi-tours d'axes orthogonaux.

Réciproquement, il est clair que deux rotations de même axe commutent ; il en est de même de deux demi-tours d'axes orthogonaux.

En conclusion, deux rotations distinctes de l'identité commutent si et seulement si elles ont le même axe, ou si ce sont deux demi-tours d'axes orthogonaux.

1 Vrai ou faux ?

a) Une projection orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

b) Une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

c) Une matrice carrée est orthogonale si et seulement si sa transposée est son inverse.

d) Tout automorphisme de déterminant ± 1 est orthogonal.

e) Tout automorphisme orthogonal de déterminant $+1$ en dimension 2 ou 3 est une rotation.

f) Tout automorphisme orthogonal de déterminant -1 en dimension 2 ou 3 est une réflexion.

g) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal d'un e.v. euclidien de dimension 2 ou 3.

2

E est un espace vectoriel euclidien. À tout $x \in E\backslash\{0\}$, on associe l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_x} & E \\ y & \mapsto & y - \dfrac{2(x|y)}{\| x \|^2} x \end{array} \right.$$

1) Montrer que φ_x est un automorphisme orthogonal.

2) Reconnaître la nature de φ_x.

3

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^{*3}$ pour que la matrice :

$$A = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & -\frac{1}{2} & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

soit orthogonale. Reconnaître les automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ correspondants.

4

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\beta\alpha & 1 - 2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\gamma\alpha & -2\gamma\beta & 1 - 2\gamma^2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

$$D = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

5

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormale directe. Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur unitaire, et R la rotation d'angle θ d'axe dirigé par u. Démontrer que pour tout vecteur x de E :

$$R(x) = (u|x)(1 - \cos\theta)u + \cos\theta\, x + \sin\theta\, u \wedge x$$

En déduire la matrice générale d'une rotation dans une base orthonormale. Étudier le cas particulier d'un demi-tour.

Exercices posés aux oraux des concours

6 (Petites Mines 2003)

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = n \quad \text{et} \quad \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$$

7 (Petites Mines 2004)

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ? Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. f est-il une rotation ? Déterminer une base où la matrice de f est plus simple.

8 (ENS 2006)

Soit G un ensemble de n matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ inversibles et distinctes, stable par produit.

1) Soit $M_i \in G$. Montrer que $\varphi : \varphi(M) = M_i M$ définit une application de G dans G bijective, en déduire que G est un groupe si $\mathrm{I}_d \in G$.

2) Montrer que $Q(X, Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(M_k X | M_k Y)$ est un produit scalaire.

3) Montrer que M_i est une matrice orthogonale pour Q.

4) Montrer que si l'on définit $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k$ vérifiant $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(M^j) = 0$.

9 (CCP 2006)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et φ un morphisme de groupes de $\mathcal{O}(E)$ dans $\mathbb{R}^*$.

1) Montrer que pour toute réflexion s : $\varphi(s) = \pm 1$.

2) Soit s et s' deux réflexions d'hyperplans H et H'. Montrer qu'il existe une réflexion s_1 telle que :

$$s' \circ s_1 = s_1 \circ s.$$

En déduire que $\varphi(s) = \varphi(s')$.

3) Trouver tous les morphismes de groupes de $\mathcal{O}(E)$ dans $\mathbb{R}^*$.

10 (TPE 2006)

Soit M une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M + \mathrm{I}$ est inversible (si $MX + X = 0$, on pourra calculer ${}^t(MX)(MX)$). Montrer que $A = (M - \mathrm{I})(M + \mathrm{I})^{-1}$ est orthogonale.

11 (Centrale-Supelec 2007)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'équation $AX = B$ admet-elle des solutions ?
Existe-t-il X_0 tel que $\|AX_0 - B\|$ est minimal ?
X_0 est-il unique ?

30 Transformations du plan et de l'espace

INTRODUCTION

Dans le « programme d'Erlangen » publié en 1872, le mathématicien allemand Félix Klein propose de classer la géométrie suivant les propriétés invariantes par un groupe spécifique de transformations. En ce sens, la géométrie euclidienne est l'étude des invariants par les isométries, c'est-à-dire la conservation des distances et des angles. Si on veut conserver l'orientation, on utilisera le groupe des déplacements ; si on veut conserver seulement les rapports de distances, celui des similitudes. Ainsi, les transformations deviennent les objets primordiaux de la géométrie, prenant le pas sur les configurations de points qui ne sont que leur champ d'application.

OBJECTIFS

- Étude des isométries du plan et de l'espace.
- Étude des similitudes directes du plan.

1 Isométries d'un espace vectoriel euclidien

1.1 • Définition et exemples

Soit E un espace vectoriel euclidien. Les éléments de E seront considérés dans ce chapitre soit comme des points, soit comme des vecteurs.
On appelle **isométrie** de E toute application de E dans E qui conserve les distances, c'est-à-dire telle que pour tous points A et B de E, d'images respectives A', B' par f : $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemples : Une translation, une symétrie orthogonale (en particulier une symétrie centrale, une réflexion), une rotation sont des isométries. La composée de deux isométries est une isométrie.

1.2 • Partie linéaire d'une isométrie

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel euclidien, et f une isométrie de E.
1) Pour tout point O de E, l'application φ_o qui au vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\overrightarrow{f(O)f(O+\vec{u})}$ est linéaire.
2) L'application φ_o ne dépend pas de O ; on peut la noter φ.
3) φ est un automorphisme orthogonal de E.

c'est-à-dire
$f(O+\vec{u}) = f(O) + \varphi_0(\vec{u})$

Démonstration

1) Désignons par O' l'image de O par f. φ_o est l'application telle que pour tout point M de E, d'image M' par f, $\varphi_o(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$. Montrons qu'elle conserve le produit scalaire.
Soit A et B deux points de E, d'images respectives A', B' par f :

$$(\overrightarrow{O'A'} \mid \overrightarrow{O'B'}) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{O'A'}\|^2 + \|\overrightarrow{O'B'}\|^2 - \|\overrightarrow{A'B'}\|^2\right)$$

Comme f conserve les distances :

$$(\overrightarrow{O'A'} \mid \overrightarrow{O'B'}) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2\right) = (\overrightarrow{OA} \mid \overrightarrow{OB})$$

Donc pour tous vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$: $(\varphi_o(\vec{x}) \mid \varphi_o(\vec{y})) = (\vec{x} \mid \vec{y})$; l'application φ_o conserve le produit scalaire. D'après le résultat de l'Application 1 du chapitre 29 : *Automorphismes orthogonaux*, elle est donc linéaire.

2) Soit O_1, O_2 deux points quelconques de E. Pour tout vecteur $\vec{x}$, il existe un point M unique tel que $\vec{x} = \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_2M} - \overrightarrow{O_2O_1}$.

$$\varphi_{o_2}(\vec{x}) = \varphi_{o_2}(\overrightarrow{O_2M} - \overrightarrow{O_2O_1}) = \varphi_{o_2}(\overrightarrow{O_2M}) - \varphi_{o_2}(\overrightarrow{O_2O_1})$$

car φ_{o_2} est linéaire ; d'où :

$$\varphi_{o_2}(\vec{x}) = \overrightarrow{O_2'M'} - \overrightarrow{O_2'O_1'} = \overrightarrow{O_1'M'} = \varphi_{o_1}(\overrightarrow{O_1M}) = \varphi_{o_1}(\vec{x})$$

c'est-à-dire : $\varphi_{o_2} = \varphi_{o_1}$.
L'application φ_o ne dépend pas du point O. On peut la noter φ.

3) φ est une application linéaire de E dans E qui conserve le produit scalaire : c'est un automorphisme orthogonal.

L'application φ est appelée **partie linéaire** de f. Elle traduit la façon dont f transforme les vecteurs. On peut aussi la noter $\overrightarrow{f}$. On a pour tous points A et B de E, d'images respectives A', B' par f :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$$

et pour tout point A, tout vecteur $\vec{x}$:

$$f(A + \vec{x}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\vec{x})$$

Exemple : Si f est une symétrie centrale, pour tous points A et B de E, $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{f} = -\mathrm{Id}_E$. Pour tout point A et tout vecteur $\vec{x}$: $f(A + \vec{x}) = f(A) - \vec{x}$.

La partie linéaire d'une isométrie est un automorphisme orthogonal ; son déterminant est donc 1 ou -1. On appelle **déplacement** une isométrie dont la partie linéaire a pour déterminant $+1$, et **antidéplacement** une isométrie dont la partie linéaire a pour déterminant -1.

Remarque *: Une application f possédant une partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est dite* ***affine****. Nous venons de montrer qu'une isométrie était une application affine, mais il existe des applications affines dont la partie linéaire n'est pas orthogonale et qui ne sont donc pas des isométries.*

1.3 • Partie linéaire d'une composée d'isométries

Soit f et g deux isométries, de parties linéaires respectives $\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{g}$. Pour tout point A et tout vecteur $\vec{x}$:

$$f \circ g\,(A + \vec{x}) = f\Big(g(A + \vec{x})\Big) = f\Big(g(A) + \overrightarrow{g}(\vec{x})\Big) = f \circ g\,(A) + \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}\,(\vec{x})$$

La partie linéaire de $f \circ g$ est $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

D'autre part, f étant une isométrie, sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est bijective. Pour tout point O d'image O' et tout point A, l'équation $f(M) = A$ équivaut à $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'A}$, c'est-à-dire à $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{O'A})$; cette équation a une solution unique : $M = O + \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{O'A})$, donc f est bijective. De plus, f^{-1} est une isométrie dont la partie linéaire est $\overrightarrow{f}^{-1}$.

On peut donc énoncer :

Théorème 2
L'ensemble des isométries de E est un groupe, noté Is(E).
L'ensemble des déplacements de E est un sous-groupe de Is(E), noté Dep(E).

Démonstration
Is(E) est non vide, stable par composition et il contient les inverses de ses éléments : c'est un sous-groupe du groupe des bijections de E dans E.
Dep(E) est le noyau du morphisme de groupes de Is(E) dans $\{-1, 1\}$ qui à f associe $\mathrm{Det}\,\overrightarrow{f}$.

1.4 • Partie linéaire d'une translation

Si f est une translation de vecteur $\vec{u}$, pour tous points A et B de E, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, donc $ABB'A'$ est un parallélogramme, et : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. La partie linéaire d'une translation est l'identité.

Réciproquement, si f est une isométrie dont la partie linéaire est Id_E, pour tous points A et B de E, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, donc $ABB'A'$ est un parallélogramme, et : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$; le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est constant, f est une translation.

On peut donc énoncer : une isométrie est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité.
Plus généralement :

Théorème 3
Deux isométries f et g ont la même partie linéaire si et seulement si elles sont égales à une translation près, c'est-à-dire s'il existe une translation t telle que $f = t \circ g$.

Démonstration
Soit f et g deux isométries telles que $\vec{f} = \vec{g}$. La partie linéaire de $f \circ g^{-1}$ est $\vec{f} \circ \vec{g}^{-1} = \mathrm{Id}_E$, donc $f \circ g^{-1}$ est une translation t : $f = t \circ g$.
Réciproquement, si $f = t \circ g$, $\vec{f} = \vec{t} \circ \vec{g} = \vec{g}$. f et g ont la même partie linéaire.

Exemple : Toutes les symétries centrales ont la même partie linéaire $-\mathrm{Id}_E$; elles sont égales à une translation près.

Remarque importante : *Une isométrie ayant au moins un point invariant O peut être identifiée à sa partie linéaire par l'isomorphisme $M \mapsto \overrightarrow{OM}$. Tout ce qui a été dit des automorphismes orthogonaux dans le chapitre précédent s'applique donc aux isométries laissant invariant le point O. Dans le cas général, on peut considérer l'isométrie f comme la composée de sa partie linéaire, qui laisse O invariant, et de la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.*

1.5 • Conservation du barycentre

Théorème 4
Toute isométrie conserve les barycentres. C'est-à-dire que l'image du barycentre d'un système de points pondérés est le barycentre du système formé des images de ces points affectés des mêmes coefficients.

Démonstration

Soit $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_n, \alpha_n)\}$ un système de points pondérés avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Le barycentre du système est l'unique point G tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Soit f une isométrie, de partie linéaire $\overrightarrow{f}$; on note $G', A'_1, \cdots, A'_n$ les images par f des points $G, A_1, \cdots, A_n$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{0}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$$

ce qui signifie que G' est le barycentre du système $\{(A'_1, \alpha_1), \cdots, (A'_n, \alpha_n)\}$.

De nombreuses configurations de points peuvent se traduire en termes de barycentres. Elles sont conservées par une isométrie. Par exemple, $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre de $\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}$; donc l'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme.

APPLICATION 1

Groupe des isométries conservant une figure

Soit E un espace vectoriel euclidien, et F un ensemble fini de points de E. Il est clair que l'ensemble des isométries conservant F (c'est-à-dire telles que l'image de tout point de F soit un point de F) est un sous-goupe du groupe $\mathrm{Is(E)}$, que l'on peut noter $\mathrm{Is(F)}$. Toute isométrie conservant F conserve l'isobarycentre O des points de F ; ainsi le groupe $\mathrm{Is(F)}$ ne contient aucune translation.

Exemples :

1) F est un triangle équilatéral du plan. $\mathrm{Is(F)}$ est constitué des trois réflexions par rapport aux médiatrices des côtés, et des trois rotations de centre O d'angle $\frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \{-1, 0, 1\}$ (dont l'identité) ; $\mathrm{Card\ Is(F)} = 6$.

2) F est un cube de l'espace.
Cherchons d'abord les déplacements conservant F. Combien y en a-t-il ? Pour spécifier la position d'un dé cubique posé sur une table, on doit préciser laquelle des six faces est sur le dessus, puis celle des quatre faces latérales qui est face à vous. On doit donc trouver 24 déplacements laissant globalement le cube invariant. Il y a :

- l'identité ;
- pour chaque paire d'arêtes opposées, le demi-tour dont l'axe est la médiatrice de ces arêtes ;
- pour chaque paire de faces opposées, trois rotations d'angles $\frac{k\pi}{2}$ ($k \in \{1, 2, 3\}$), dont l'axe joint les centres de ces faces ;
- pour chaque diagonale, deux rotations d'angles $\frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \{-1, 0, 1\}$), ayant pour axe cette diagonale.

Soit au total 24 déplacements ; il n'y en a donc pas d'autres.

Prenons une réflexion s conservant le cube (par exemple par rapport au plan formé par deux arêtes opposées). L'application $f \mapsto s \circ f$ est une bijection de l'ensemble des déplacements conservant le cube dans l'ensemble des antidéplacements le conservant. Ainsi, il y a également 24 antidéplacements conservant le cube (vous dénombrerez facilement 9 réflexions ; il y a aussi 15 composées rotation-réflexion plus difficiles à voir). $\mathrm{Card\ Is(F)} = 48$.

2 Étude des isométries du plan et de l'espace

2.1 • Composition des réflexions

Soit s_1 et s_2 deux réflexions du plan euclidien, d'axes respectifs D_1 et D_2.

- Si D_1 et D_2 sont parallèles, s_1 et s_2 ont la même partie linéaire : réflexion vectorielle par rapport à la direction de D_1 et D_2 ; elles sont donc égales à une translation près : $s_2 = t \circ s_1$, d'où $s_2 \circ s_1 = t$, où t est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{O_1O_2}$, avec $O_1 \in D_1$, $O_2 \in D_2$, $(O_1O_2) \perp D_1$.

La composée de deux réflexions du plan d'axes parallèles est une translation.

Réciproquement, toute translation de vecteur $\vec{u}$ est la composée de deux réflexions d'axes orthogonaux à $\vec{u}$ et image l'un de l'autre par la translation de vecteur $\dfrac{\vec{u}}{2}$.

- Si D_1 et D_2 sont sécantes en un point O, on peut identifier s_1 et s_2 à leurs parties linéaires, dont la composée est une rotation vectorielle d'angle $\theta = 2(D_1, D_2)$. $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre O d'angle θ.

La composée de deux réflexions du plan d'axes sécants est une rotation.

Réciproquement, toute rotation de centre O d'angle θ est la composée de deux réflexions d'axes sécants en O et image l'un de l'autre par la rotation d'angle $\dfrac{\theta}{2}$.

Ces résultats se généralisent à l'espace de dimension 3 : la composée de deux réflexions par rapport à des plans parallèles est une translation ; la composée de deux réflexions par rapport à des plans sécants est une rotation, dont l'axe est l'intersection des deux plans.

2.2 • Isométries du plan

Soit f une isométrie du plan euclidien P. Soit O un point quelconque de P, $O' = f(0)$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. L'application $f_o = t^{-1} \circ f$ est une isométrie de même partie linéaire que f et laissant le point O invariant. On peut l'identifier avec l'endomorphisme orthogonal $\vec{f}$, c'est-à-dire une rotation ou une réflexion. f est donc la composée de cette application avec une translation.

1) Si $\mathrm{Det}(f) = +1$ (déplacement) :

a) $f_o = \mathrm{Id}_E$, $f = t$, f est une **translation** ;

b) f_o est une rotation de centre O, d'angle $\theta \neq 0 \mod 2\pi$.

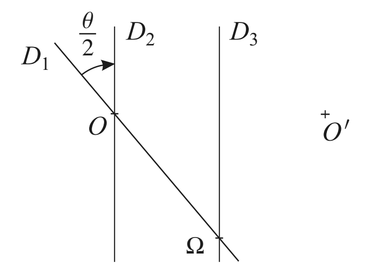
Soit D_2 la droite passant par O et orthogonale à (OO'), D_1 l'image de D_2 par la rotation de centre O d'angle $-\dfrac{\theta}{2}$, et D_3 l'image de D_2 par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{OO'}}{2}$ (*Doc.* 1). Soit s_1, s_2, s_3 les réflexions d'axes respectifs D_1,

D_2, D_3. On peut décomposer f_o et t de la façon suivante :

$$f_o = s_2 \circ s_1 \qquad t = s_3 \circ s_2 \qquad \text{d'où} \qquad f = t \circ f_o = s_3 \circ s_1$$

f est la composée de deux réflexions d'axes sécants : c'est la **rotation** de centre Ω et d'angle θ.

Tout déplacement du plan est une translation ou une rotation.

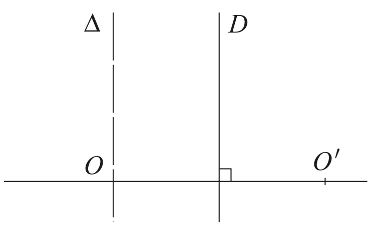


Doc. 1 Rotation.

2) Si $\operatorname{Det}(f) = -1$ (antidéplacement) :

f_o est une réflexion, d'axe Δ passant par O.

a) Si $\Delta \perp (OO')$, soit D l'image de Δ par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{OO'}}{2}$, et soit s la réflexion d'axe D (*Doc.* 2).



Doc. 2 Réflexion.

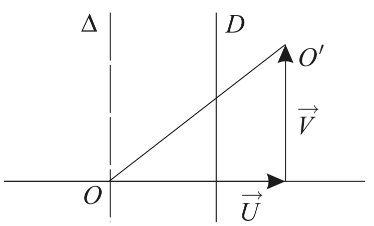
On peut décomposer t en : $t = s \circ f_o$, d'où l'on déduit $f = t \circ f_o = s$.
f est une **réflexion** d'axe D.

b) Si Δ n'est pas orthogonale à (OO'), décomposons le vecteur $\overrightarrow{OO'}$:

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{U} + \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{U} \in \vec{\Delta}^{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{V} \in \vec{\Delta}$$

On a alors : $t = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}}$, d'où : $f = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}} \circ f_o$

D'après **a)**, $t_{\vec{U}} \circ f_o$ est une réflexion s. f est la composée de la réflexion s d'axe D et de la translation $t_{\vec{V}}$ dont le vecteur appartient à la direction de D. Cette application est appelée réflexion glissée d'axe D et de vecteur $\vec{V}$ (*Doc.* 3).



Doc. 3 Réflexion glissée.

(Cette composée est commutative : $f = t_{\vec{V}} \circ s = s \circ t_{\vec{V}}$.)

Tout antidéplacement du plan est une réflexion ou une réflexion glissée.

Dans tous les cas, f est la composée d'une, deux ou trois réflexions.

Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois réflexions.

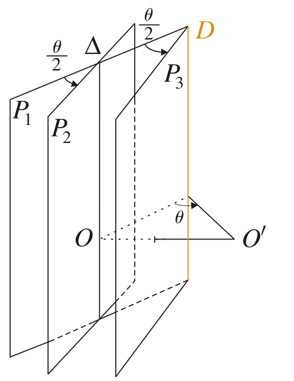
Pour s'entraîner : ex. 2 à 4

2.3 • Isométries de l'espace de dimension 3

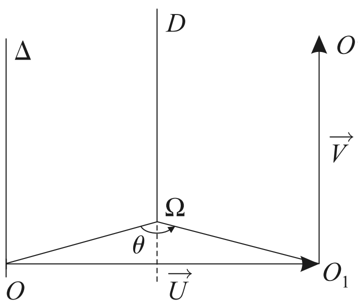
Soit f une isométrie de l'espace euclidien E de dimension 3. Soit O un point quelconque de E, $O' = f(0)$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. L'application $f_o = t^{-1} \circ f$ est une isométrie de même partie linéaire que f et laissant le point O invariant. On peut l'identifier avec l'endomorphisme orthogonal $\vec{f} \in O(\vec{E})$, c'est-à-dire une rotation, une réflexion ou la composée d'une rotation et d'une réflexion. f est donc la composée de cette application avec une translation.

1) Si $\operatorname{Det}(f) = +1$ (déplacement) :

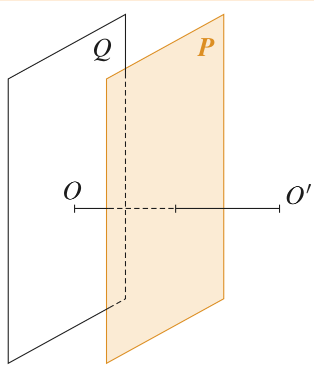
a) $f_o = \mathrm{Id}_E$, $f = t$, f est une **translation** ;



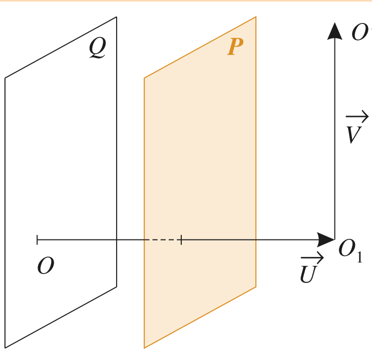
Doc. 4 Rotation.



Doc. 5 Vissage.



Doc. 6 Réflexion.



Doc. 7 Réflexion glissée.

b) f_o est une rotation d'axe Δ passant par O, d'angle $\theta \neq 0 \mod 2\pi$.

- Si $\Delta \perp (OO')$, on peut procéder comme en dimension 2 :

Soit P_2 le plan passant par O et orthogonal à (OO'), P_1 l'image de P_2 par la rotation d'axe Δ d'angle $-\dfrac{\theta}{2}$, et P_3 l'image de P_2 par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{OO'}}{2}$ (*Doc.* 4). Soit s_1, s_2, s_3 les réflexions de plans respectifs P_1, P_2, P_3. On peut décomposer f_o et t de la façon suivante :

$$f_o = s_2 \circ s_1 \qquad t = s_3 \circ s_2 \qquad \text{d'où} \qquad f = t \circ f_o = s_3 \circ s_1$$

f est la composée de deux réflexions par rapport à des plans sécants : c'est la **rotation** d'axe $D = P1 \cap P_3$ et d'angle θ.

- Si Δ n'est pas orthogonale à (OO'), on peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{OO'}$:

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{U} + \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{U} \in \vec{\Delta}^{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{V} \in \vec{\Delta} \qquad (\textit{Doc. } 5)$$

On a alors : $t = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}}$, d'où : $f = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}} \circ f_o$

$t_{\vec{U}} \circ f_o$ est une rotation R, d'axe D parallèle à Δ et d'angle θ.

f est la composée de la rotation R d'axe D et de la translation $t_{\vec{V}}$ dont le vecteur appartient à la direction de D. Cette application est appelée vissage d'axe D, d'angle θ et de vecteur $\vec{V}$.

(Cette composée est commutative : $f = t_{\vec{V}} \circ R = R \circ t_{\vec{V}}$.)

> Tout déplacement de l'espace de dimension 3 est une translation, une rotation ou un vissage.

2) Si $\text{Det}(f) = -1$ (antidéplacement) :

a) f_o est une réflexion de plan Q contenant O.

- Si $Q \perp (OO')$, soit P l'image de Q par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{OO'}}{2}$ et s la réflexion de plan P (*Doc.* 6).

On peut décomposer t en : $t = s \circ f_o$; d'où l'on déduit : $f = t \circ f_o = s$.
f est une **réflexion**.

- Si Q n'est pas orthogonal à (OO'), on peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{OO'}$:

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{U} + \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{U} \in \vec{Q}^{\perp} \quad \text{et} \quad \vec{V} \in \vec{Q} \qquad (\textit{Doc. } 7)$$

On a alors : $t = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}}$, d'où : $f = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}} \circ f_o$

$t_{\vec{U}} \circ f_o$ est une réflexion s, de plan P parallèle à Q.

f est la composée de la réflexion s de plan P et de la translation $t_{\vec{V}}$ dont le vecteur appartient à la direction de P. Cette application est appelée réflexion glissée de plan P et de vecteur $\vec{V}$.

(Cette composée est commutative : $f = t_{\vec{V}} \circ s = s \circ t_{\vec{V}}$.)

Ce dernier cas est hors-programme. Nous ne le donnons que pour clore notre classification.

b) f_O est la composée d'une réflexion s de plan Q contenant O et d'une rotation R d'axe Δ perpendiculaire à Q en O. Décomposons le vecteur $\overrightarrow{OO'}$:

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{U} + \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{U} \in \overrightarrow{Q} \quad \text{et} \quad \vec{V} \in \overrightarrow{\Delta}$$

On a alors :

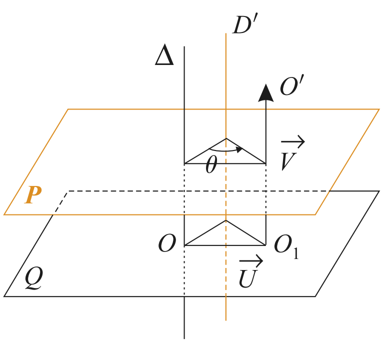
$$f = t_{\vec{V}} \circ t_{\vec{U}} \circ R \circ s$$

$t_{\vec{U}} \circ R$ est une rotation R' d'axe D' parallèle à Δ. Cette rotation commute avec la translation $t_{\vec{V}}$ dont le vecteur appartient à $\overrightarrow{D}$ (*Doc.* 8).

$$f = R' \circ t_{\vec{V}} \circ s$$

$t_{\vec{V}} \circ s$ est une réflexion s' de plan P parallèle à Q.

En définitive, f est encore la composée d'une rotation et d'une réflexion.



Doc. 8 Composée rotation-réflexion.

Tout antidéplacement de l'espace de dimension 3 est une réflexion, une réflexion glissée ou une réflexion-rotation.

Dans tous les cas, f est la composée d'une, deux, trois ou quatre réflexions.

Toute isométrie de l'espace de dimension 3 est la composée d'au plus quatre réflexions.

Tableau récapitulatif

points invariants	**déplacements**	**antidéplacements**
E	Id_E	
plan		réflexion
droite	**rotation** d'angle $\theta \neq 0$, mod 2π	
$\{0\}$		réflexion $\circ$ rotation $\theta \neq 0$ mod 2π
$\varnothing$	**translation** de vecteur $\vec{V} \neq \vec{0}$ **vissage** $\theta \neq 0$ mod 2π $\vec{V} \neq \vec{0}$	réflexion glissée $\vec{V} \neq \vec{0}$

Pour s'entraîner : ex. 5 et 6

APPLICATION 2

Les demi-tours engendrent le groupe des déplacements

Démontrer que tout déplacement de l'espace est la composée d'au plus deux demi-tours.

– Une translation T de vecteur $\vec{u}$ est la composée de deux demi-tours d'axes D et D' parallèles tels que $D' = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(D)$.

– Une rotation R d'axe Δ, d'angle θ est la composée de deux demi-tours d'axes D et D' perpendiculaires à Δ en un même point O, et tels que $(D, D') = \dfrac{\theta}{2}$.

– Un vissage V d'axe Δ, d'angle θ et de vecteur $\vec{u}$ est la composée d'une rotation R et d'une translation T, que l'on peut décomposer chacune en deux demi-tours de la façon suivante :

- $R = s' \circ s$, où s et s' sont deux demi-tours d'axes D et D' perpendiculaires à Δ en O, et tels que $(D, D') = \dfrac{\theta}{2}$.
- $T = s'' \circ s'$, où s'' est le demi-tour d'axe $D'' = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(D')$.

On en déduit $V = T \circ R = s'' \circ s$. V est la composée de deux demi-tours d'axes non coplanaires.

3 Similitudes

3.1 • Conservation des rapports de distance

Soit E un espace euclidien. On appelle similitude de E toute bijection affine de E dans E qui conserve les rapports de distance : quels que soient les points A, B, C, D, distincts de E :

$$A' = f(A)\ ,\ B' = f(B)\ ,\ C' = f(C)\ ,\ D' = f(D)\ , \quad \Longrightarrow \quad \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

On en déduit que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = k \in \mathbb{R}_+^*$$

Une similitude multiplie les distances par un même scalaire non nul, que l'on appelle rapport de la similitude. Si on désigne par h une homothétie de centre quelconque et de rapport k, l'application $g = h^{-1} \circ f$ conserve les distances : c'est une isométrie. $f = h \circ g$: toute similitude de rapport k est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k.

Cette décomposition n'est pas unique. Mais $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h} \circ \overrightarrow{g} = k\,\overrightarrow{g}$, si bien que la partie linéaire de l'isométrie g est fixée. La nature de g est donc indépendante de la décomposition.

- Si g est un déplacement, on dit que f est une similitude directe.
- Si g est un antidéplacement, on dit que f est une similitude rétrograde.

L'ensemble des similitudes et l'ensemble des similitudes directes de E sont des sous-groupes du groupe des bijections de E dans E, notés respectivement $\mathcal{S}im(E)$ et $\mathcal{S}im_+(E)$.

3.2 • Similitudes directes du plan

Nous nous limitons dans ce paragraphe à l'étude des similitudes directes du plan euclidien orienté P, c'est-à-dire la composée d'une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ avec une translation ou une rotation.

Théorème 5

En identifiant P au plan complexe, l'ensemble des similitudes directes de P est l'ensemble des applications :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array} \right. \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{C}^*, \ b \in \mathbb{C}$$

Démonstration

Une homothétie de centre Ω d'affixe ω, et de rapport k est représentée par :

$$z \longmapsto \omega + k(z - \omega)$$

Une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe u est représentée par :

$$z \longmapsto z + u$$

Une rotation de centre Ω d'affixe ω, et d'angle θ est représentée par :

$$z \longmapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$

Toute similitude directe est une composée de ces applications, donc elle est bien de la forme $z \longmapsto az + b$.

Réciproquement, si $a = ke^{i\theta}$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $z \longmapsto az + b$ est la composée de la rotation de centre O d'angle θ, de l'homothétie de centre O de rapport k, et de la translation dont le vecteur est l'image du complexe b. C'est bien une similitude directe.

Corollaire 5.1

Toute similitude directe f qui n'est pas une translation possède un point invariant unique I, appelé centre de la similitude. f est alors la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation de centre I.

Démonstration

$f : z \longmapsto az + b$ n'est pas une translation si et seulement si $a \neq 1$. Dans ce cas, l'équation $az + b = z$ admet une solution unique :

$$z = \frac{b}{1-a}$$

f a donc un point invariant unique I. En choisissant ce point comme origine, f est représentée par $z \longmapsto az$. C'est la composée commutative de l'homothétie de centre I de rapport $|a|$ et de la rotation de centre I d'angle $\arg(a)$.

Une similitude directe qui n'est pas une translation est donc caractérisée par : son centre, son rapport et son angle.

Le résultat suivant est très important dans les applications :

Théorème 6
Étant donné deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de longueur non nulle, il existe une similitude directe et une seule transformant A en A' et B en B'.

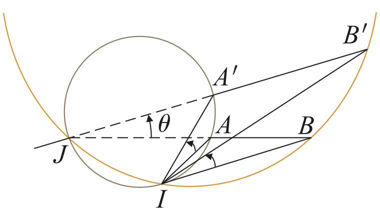
Démonstration
Soit a, b, a', b' les affixes de A, B, A' et B'. Déterminons deux complexes α et β tels que : $\begin{cases} \alpha a + \beta = a' \\ \alpha b + \beta = b' \end{cases}$. On obtient :

$$\alpha = \frac{a' - b'}{a - b} \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{et} \quad \beta = a' - \frac{a' - b'}{a - b} a = \frac{ab' - a'b}{a - b}$$

Géométriquement, le rapport de cette similitude est $\dfrac{A'B'}{AB}$ et son angle est $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$; son centre I est caractérisé par :

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = \frac{A'B'}{AB} \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}) = (\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \theta$$

ce qui permet de le construire par des intersections de cercles (*Doc.* 9).



Doc. 9 I est l'intersection du cercle circonscrit au triangle JAA' et du cercle circonscrit au triangle JBB'.

Pour s'entraîner : ex. 7 et 8

MÉTHODE

Pour montrer qu'une application est une isométrie, on peut :

- montrer qu'elle conserve les distances ;
- montrer qu'elle conserve les produits scalaires ;
- montrer que c'est une application affine dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal ;
- montrer que c'est une application affine qui transforme un repère orthonormal en un autre.

Pour reconnaître une isométrie f donnée par son expression analytique dans un repère orthonormal :

- on vérifie avant tout que sa matrice est orthogonale ;
- on peut calculer son déterminant pour savoir s'il s'agit d'un déplacement ou d'un antidéplacement ;
- on cherche l'ensemble des vecteurs invariants pour reconnaître la partie linéaire de f ;
- on cherche l'ensemble des points invariants pour reconnaître la nature et les éléments caractéristiques de f ;
- dans le cas où f n'a pas de points invariants, on peut décrire f comme la composée d'une isométrie fixant un point O, et de la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Pour montrer qu'une application du plan dans lui-même est une similitude directe, on peut :

- montrer qu'elle conserve les rapports de distance et l'orientation des angles ;
- montrer que c'est la composée d'une homothétie et d'un déplacement ;
- montrer qu'elle s'exprime dans le plan complexe sous la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exercice résolu

UTILISER UNE ROTATION

Soit ABC un triangle équilatéral. Démontrer que pour tout point M du plan, $MA \leqslant MB + MC$.
Déterminer l'ensemble des points vérifiant l'égalité.

Conseils

Un triangle équilatéral est caractérisé par l'existence d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ fixant l'un des sommets et associant les deux autres.

Traduire géométriquement les conditions (1) et (2).

Solution

Désignons par R la rotation de centre A qui transforme B en C ; soit M un point quelconque du plan, et M' son image par R. La rotation R transforme le segment $[BM]$ en $[CM']$, d'où $BM = CM'$. Écrivons l'inégalité triangulaire dans le triangle CMM' (*Doc.* 10) :

$$MM' \leqslant MC + CM'$$

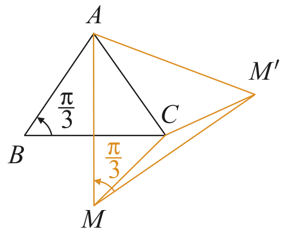
Comme le triangle AMM' est équilatéral, $MM' = MA$. On a donc bien :

$$MA \leqslant MC + MB$$

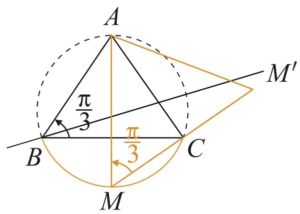
L'égalité est vérifiée si et seulement si les points M, C, M' sont alignés dans cet ordre, c'est-à-dire si :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = \dfrac{\pi}{3} & (1) \\ MC \leqslant MM' & (2) \end{cases}$$

D'après le théorème de l'angle inscrit, la condition (1) est réalisée si et seulement si M appartient au grand arc (AC) du cercle Γ circonscrit à ABC.
La condition (2) équivaut à $MC \leqslant MA$: M est du même côté que C par rapport à la médiatrice de $[AC]$.
En définitive, l'ensemble des points M vérifiant $MA = MB + MC$ est le petit arc (BC) du cercle Γ. (*Doc.* 11)



Doc. 10



Doc. 11

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Une isométrie conserve les angles.

b) La composée de deux rotations du plan est une rotation ou une translation.

c) La composée de deux rotations de l'espace est une rotation ou une translation.

d) Les réflexions engendrent le groupe des isométries de l'espace.

e) Toute similitude directe du plan est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

Isométries

2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications définies analytiquement par ce qui suit.

a) $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 4 - \sqrt{3} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2} - 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \end{cases}$

3 Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par :

R_A la rotation de centre A d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$;

R_B la rotation de centre B d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$;

R_C la rotation de centre C d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Déterminer la composée $R_A \circ R_B \circ R_C$.

4 Montrer que tout sous-groupe fini du groupe des déplacements du plan est commutatif.

5 L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications définies analytiquement par :

a) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z - 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z - 1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 6) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = z - 2 \\ z' = x + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -z + 2 \\ z' = -x + 3 \end{cases}$

6 Soit R une rotation d'axe D, distincte de l'identité.

1) Déterminer les droites globalement invariantes par R.

2) En déduire l'ensemble des rotations qui commutent avec R.

Similitudes directes du plan

7 ABC étant un triangle quelconque, on désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme B en C. Soit M un point du cercle circonscrit à ABC et M' son image par S. Démontrer que les points M, C et M' sont alignés.

8 ABC étant un triangle quelconque, on désigne par S_1, S_2, S_3 les similitudes directes de centres respectifs A, B, C telles que $S_1(B) = C$, $S_2(C) = A$ et $S_3(A) = B$. Étudier les composées $S_1 \circ S_2 \circ S_3$ et $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

31 Fonctions de deux variables réelles

INTRODUCTION

Toutes les fonctions que nous avons envisagées jusqu'ici étaient définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il est utile, en particulier dans les applications des mathématiques à la physique, de concevoir des fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Nous nous limiterons dans ce chapitre à des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ (appelées fonctions de deux variables réelles). Ces notions seront approfondies en deuxième année dans le cadre des espaces vectoriels normés.

OBJECTIFS

- Notions de base sur les fonctions de deux variables : continuité, dérivées partielles, développement limité d'une fonction de classe C^1.
- Brève extension au cas des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

1 L'espace $\mathbb{R}^2$

Rappelons que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel réel, muni d'un produit scalaire défini par :

$$u = (x, y)\ ;\ v = (x', y') \quad \Rightarrow \quad u \cdot v = xx' + yy'$$

et de la norme euclidienne définie par :

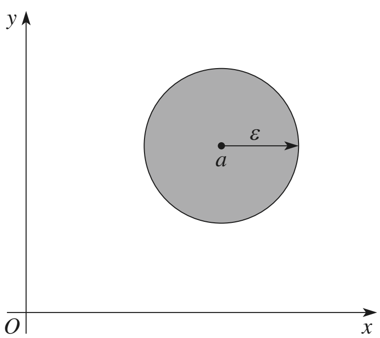
$$u = (x, y) \quad \Rightarrow \quad \| u \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On peut étendre à $\mathbb{R}^2$ certaines notions connues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en remplaçant la valeur absolue ou le module par la norme euclidienne. Par exemple :

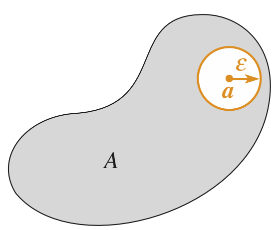
- On appelle **distance euclidienne** de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ la norme de leur différence : $d(u, v) = \| u - v \|$.
- Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite **bornée** s'il existe un réel M tel que pour tout u élément de A : $\| u \| \leqslant M$.
- Étant donné un élément u de $\mathbb{R}^2$ et un réel strictement positif r, on appelle **boule ouverte** de centre u de rayon r l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ dont la distance à u est strictement inférieure à r (*Doc.* 1) :

$$B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^2\ ,\ \| v - u \| < r\}$$

- Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite **ouverte** si pour tout u élément de A, il existe un réel strictement positif ε tel que la boule ouverte $B(u, \varepsilon)$ soit incluse dans A (on dit aussi que A est un ouvert) (*Doc.* 2).



Doc. 1 Boule ouverte.



Doc. 2 Partie ouverte.

Exemples : Un demi-plan ouvert (droite frontière non comprise), un disque ouvert (cercle frontière non compris), sont des ouverts.

Notons qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, et qu'une intersection *finie* d'ouverts est ouverte (*cf. exercice* 3).

Pour s'entraîner : ex. 2 à 4

2 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on peut considérer une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (dite **fonction vectorielle**) comme une fonction à valeurs complexes. Nous avons déjà étendu à ce type de fonctions les notions suivantes :

- Continuité. Si f est l'application $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$, f est continue en t_0 si et seulement si les fonctions réelles x et y sont continues en t_0.
- Limites. f a pour limite $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ en t_0 si et seulement si x a pour limite ℓ_1 et y a pour limite ℓ_2 en t_0.
- Dérivation. f est dérivable en t_0 si et seulement si x et y sont dérivables en t_0 et $f'(t_0) = \big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$.
- Intégration. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$:

$$\int_{[a,b]} f = \left(\int_{[a,b]} x\ ,\ \int_{[a,b]} y\right)$$

- Inégalité des accroissements finis :

$$\forall t \in [a, b] \quad \| f'(t) \| \leqslant M \quad \Rightarrow \quad \| f(b) - f(a) \| \leqslant M|b-a|$$

- Formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Développements limités.

Ces propriétés sont utilisées pour l'étude des courbes paramétrées. Elles sont très simples car elles se ramènent aux propriétés des fonctions composantes x et y à valeurs réelles.

D'autre part, ces propriétés s'étendent sans difficulté aux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$: continuité et limites

On rencontre en revanche des difficultés tout à fait nouvelles lorsqu'on tente d'étendre les notions précédentes aux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$ (appelées **fonctions de deux variables**).

3.1 • Applications partielles

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

On peut se figurer f comme définissant une « altitude » en tout point de D et donc la représenter par une surface.

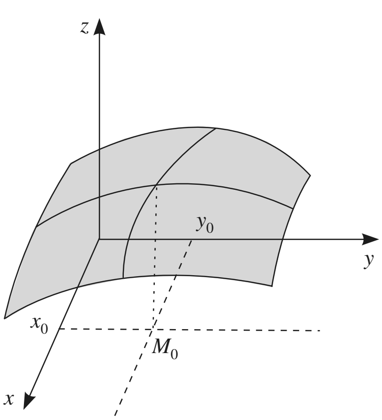
En un point $(x_0, y_0) \in D$, on peut considérer les deux fonctions d'une seule variable réelle :

$$x \mapsto f(x, y_0) \qquad \text{(première application partielle)}$$

$$y \mapsto f(x_0, y) \qquad \text{(deuxième application partielle)}$$

Il faut bien noter que ces applications ne caractérisent pas complètement la fonction f au voisinage de (x_0, y_0). Elles ne donnent des informations que dans deux directions privilégiées (*Doc.* 3).

Par exemple si $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, les deux applications partielles au point $(0, 0)$ sont nulles. Cependant $\forall \alpha \neq 0 \; f(\alpha, \alpha) = \dfrac{1}{2}$, si bien que f est loin d'être nulle au voisinage de $(0, 0)$...



Doc. 3 Fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Les applications partielles ne jouent donc pas du tout le même rôle que les fonctions composantes pour les fonctions vectorielles.

3.2 • Continuité

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et a_0 un point donné de U. f est dite **continue** en a_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall u \in U \quad \| u - a_0 \| \leqslant \alpha \implies |f(u) - f(a_0)| \leqslant \varepsilon$$

Théorème 1

Si une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est continue en un point a_0, chacune des deux applications partielles est continue en ce point.
La réciproque est fausse : la continuité des deux applications partielles n'est pas suffisante pour que f soit continue...

Démonstration

Supposons f continue en $a_0 = (x_0, y_0)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall u \in U \qquad \| u - a_0 \| \leqslant \alpha \implies |f(u) - f(a_0)| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, si $u = (x, y_0)$, $\quad \| u - a_0 \| = |x - x_0|$, donc :

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$$

La première application partielle au point (x_0, y_0) est donc continue en x_0. On montre de même que la deuxième application partielle est continue en y_0.

Montrons à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse :

soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Au point $(0,0)$, les deux applications partielles sont constantes nulles, donc tout ce qu'il y a de plus continues. Cependant, la fonction prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ en (α, α) pour tout $\alpha \neq 0$, c'est-à-dire aussi près que l'on veut de $(0,0)$: f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

On montre facilement que :

- La somme de deux fonctions continues est continue.
- Le produit de deux fonctions continues est continu.
- Le quotient de deux fonctions continues est continu en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ continues sur U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, notée $C^0(U, \mathbb{R})$.

Pour s'entraîner : ex. 5

3.3 • Limites

On peut étendre aux fonctions de deux variables la notion de limite : soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert U, et a un point tel que toute boule ouverte de centre a rencontre U $\quad (\forall \varepsilon > 0 \quad U \cap B(a, \varepsilon) \neq \varnothing)$.

On dit que f admet une limite quand u tend vers a s'il existe une fonction $\overline{f}$ prolongeant f à $U \cup \{a\}$ et continue en a.
On pose alors $\ell = \overline{f}(a)$.

$$\lim_a f = \ell \qquad \text{signifie donc :}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall u \in U \qquad \| u - a \| \leqslant \alpha \quad \implies \quad |f(u) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Il est très important de remarquer qu'il n'est pas suffisant d'obtenir une limite en faisant tendre u vers a suivant un chemin particulier. Par exemple, en reprenant la fonction $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, si on fait tendre d'abord x vers 0 à y constant, puis y vers 0 (ou vice versa), $f(x, y)$ tend vers 0. Pourtant f n'admet pas pour limite 0 en $(0, 0)$ puisque la fonction $\overline{f}$ obtenue en prolongeant f par la valeur 0 en $(0, 0)$ n'est pas continue.

Pour s'entraîner : ex. 6

3.4 • Extension aux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left| \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \big(X(x, y), Y(x, y)\big) \end{array} \right.$$

Les fonctions X et Y de U dans $\mathbb{R}$ sont appelées **fonctions composantes** de f.

Soit a_0 un point donné de U. f est dite **continue** en a_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall u \in U \quad \| u - a_0 \| \leqslant \alpha \implies \| f(u) - f(a_0) \| \leqslant \varepsilon$$

Théorème 2

Une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est continue en un point si et seulement si ses deux fonctions composantes sont continues en ce point.

Démonstration

$$\| f(u) - f(a_0) \| = \sqrt{\Big(X(u) - X(a_0)\Big)^2 + \Big(Y(u) - Y(a_0)\Big)^2}$$

Donc

$$\| f(u) - f(a_0) \| \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |X(u) - X(a_0)| \leqslant \varepsilon \text{ et } |Y(u) - Y(a_0)| \leqslant \varepsilon$$

Si f est continue, les fonctions X et Y sont continues.

Réciproquement, si les fonctions X et Y sont continues, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\exists \alpha_1 > 0 \quad \forall u \in U \quad \| u - a_0 \| \leqslant \alpha_1 \implies |X(u) - X(a_0)| \leqslant \varepsilon$$

$$\exists \alpha_2 > 0 \quad \forall u \in U \quad \| u - a_0 \| \leqslant \alpha_2 \implies |Y(u) - Y(a_0)| \leqslant \varepsilon$$

Alors pour tout $u \in U$:

$$\| u - a_0 \| \leqslant \min(\alpha_1, \alpha_2) \implies \sqrt{\Big(X(u) - X(a_0)\Big)^2 + \Big(Y(u) - Y(a_0)\Big)^2} \leqslant \varepsilon\sqrt{2}$$

c'est-à-dire :

$$\| f(u) - f(a_0) \| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}$$

f est donc continue en a_0.

Ainsi, contrairement aux applications partielles, la continuité des fonctions composantes caractérise celle de la fonction f. Le rôle des coordonnées n'est donc pas du tout le même dans l'ensemble de départ et dans l'ensemble d'arrivée.

On montre facilement que :

- La somme de deux fonctions continues est continue.
- Le produit d'une fonction continue par un réel est continu.

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ continues sur U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $C^0(U, \mathbb{R}^2)$

On montrerait de même qu'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ admet une limite (ℓ_1, ℓ_2) en un point si et seulement si ses fonctions composantes admettent respectivement ℓ_1 et ℓ_2 pour limite en ce point.

3.5 • Fonctions composées

Théorème 3

p, n, q sont trois entiers compris entre 1 et 2. Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et g une fonction définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(U)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Démonstration

Soit $a_0 \in U$; comme g est continue en $f(a_0)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall v \in V \quad \| v - f(a_0) \| \leqslant \alpha \implies \| g(v) - g(f(a_0)) \| \leqslant \varepsilon$$

Comme f est continue en a_0, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall u \in U \quad \| u - a_0 \| \leqslant \beta \implies \| f(u) - f(a_0) \| \leqslant \alpha$$

En combinant ces deux implications avec $v = f(u)$, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall u \in U \quad \| u - a_0 \| \leqslant \beta \implies \| g \circ f\,(u) - g \circ f\,(a_0) \| \leqslant \varepsilon$$

ce qui exprime que $g \circ f$ est continue en a_0.

Exemple : Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, continue en a_0, et $\vec{h}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Considérons la fonction $\varphi_{\vec{h}}$ définie au voisinage de 0 par : $\varphi_{\vec{h}}(t) = f(a_0 + t\vec{h})$. $\varphi_{\vec{h}}$ est continue en 0 comme composée de la fonction affine $t \mapsto a_0 + t\vec{h}$ et de f. Ceci généralise la continuité des fonctions partielles : f est continue « dans toutes les directions » en 0.

Cependant, il faut se garder de croire que la continuité de toutes les fonctions $\varphi_{\vec{h}}$ suffit à établir la continuité de f, comme le montre le contre-exemple suivant :

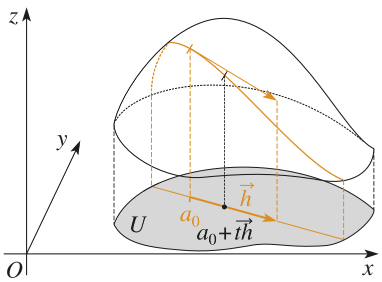
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases}$$

En $a_0 = (0, 0)$, pour $\vec{h} = (h_1, h_2)$, $\varphi_{\vec{h}}(t) = t\dfrac{h_1^2}{h_2}$ si $h_2 \neq 0$, et $\varphi_{\vec{h}}(t) = 0$ si $h_2 = 0$. Dans les deux cas, $\lim\limits_{t \to 0} \varphi_{\vec{h}}(t) = 0$: la fonction $\varphi_{\vec{h}}$ est continue en 0 pour tout $\vec{h}$. Cependant, la fonction f n'est pas continue en 0 puisque pour tout $t \in \mathbb{R}^*$: $f(t, t^2) = 1$.

4 Calcul différentiel

4.1 • Dérivée suivant un vecteur ; dérivées partielles



Doc. 4 Dérivée suivant un vecteur.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

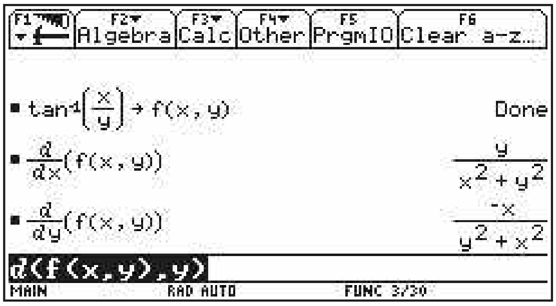
Soit $a_0 = (x_0, y_0)$ un point de U et $\vec{h}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. U étant ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, $a_0 + t\vec{h} \in U$ (*Doc.* 4).

On pose alors $\varphi_{\vec{h}}(t) = f(a_0 + t\vec{h})$. Si $\varphi_{\vec{h}}$ est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée suivant le vecteur $\vec{h}$ et l'on pose :

$$D_{\vec{h}}\, f(a_0) = \varphi'_{\vec{h}}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

si $\vec{h} = (h_1, h_2)$ $\qquad D_{\vec{h}}\, f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t}$

En particulier, les dérivées suivant les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$, si elles existent, sont appelées première et deuxième dérivée partielle (ce sont les dérivées des applications partielles en a_0).



La fonction de dérivation de la TI-92/Voyage 200 calcule tout naturellement des dérivées partielles.

Elles sont notées : $D_1 f(a_0), D_2 f(a_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a_0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

⚠ Les dérivées partielles ne caractérisent pas complètement la fonction au voisinage de a_0. L'existence de dérivées partielles en un point n'implique même pas la continuité en ce point (*cf.* l'exemple du § 3.2).

Pour s'entraîner : ex. 7

4.2 • Fonction de classe C^1

Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert U est dite de classe C^1 sur U si elle admet des dérivées partielles continues sur U.

L'ensemble des fonctions de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $C^1(U, \mathbb{R})$.

L'existence de dérivées partielles **continues** permet de « linéariser » la fonction au voisinage d'un point :

Théorème 4

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
f admet en tout point a_0 de U une dérivée suivant tout vecteur $\vec{h} = (h_1, h_2)$, et :

$$D_{\vec{h}} f(a_0) = h_1 D_1 f(a_0) + h_2 D_2 f(a_0)$$

De plus, f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a_0 :

$$f(a_0 + t\vec{h}) = f(a_0) + t\, D_{\vec{h}} f(a_0) + o(t)$$

Démonstration

Effectuons un développement limité à l'ordre 1 de chacune des applications partielles associées à f en a_0 :

$$\begin{aligned} f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) &= f(x_0 + th_1, y_0) + th_2 D_2 f(x_0 + th_1, y_0) + o(th_2) \\ &= f(x_0, y_0) + th_1 D_1 f(x_0, y_0) + o(th_1) \\ &\quad + th_2 D_2 f(x_0 + th_1, y_0) + o(th_2) \end{aligned}$$

Or $D_2 f$ est continue au point (x_0, y_0) :

$$D_2 f(x_0 + th_1, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) + o(1)$$

$$f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) = f(x_0, y_0) + th_1 D_1 f(x_0, y_0) + th_2 D_2 f(x_0, y_0) + o(t)$$

D'où :

$$\frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t} = h_1 D_1 f(x_0, y_0) + h_2 D_2 f(x_0, y_0) + o(1)$$

(quand t tend vers 0)

f admet bien une dérivée suivant le vecteur $\vec{h}$, qui vaut $h_1 D_1 f(x_0, y_0) + h_2 D_2 f(x_0, y_0)$.
On obtient bien le développement limité attendu quand t tend vers 0.

L'application $\vec{h} \mapsto D_{\vec{h}} f(a_0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, représentée dans la base canonique par la matrice $J = \big(D_1 f(a_0), D_2 f(a_0)\big)$. On l'appelle différentielle de f.

On la note parfois $\mathrm{d}f$ et si on choisit de noter $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on peut écrire :

$$\text{(au point } a_0) \quad \mathrm{d}f = D_1 f\ \mathrm{d}x + D_2 f\ \mathrm{d}y \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Cette formule est utilisée par les physiciens en interprétant $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ comme des accroissements « infinitésimaux » de x et y, et $\mathrm{d}f$ comme l'accroissement correspondant de $f(x, y)$.

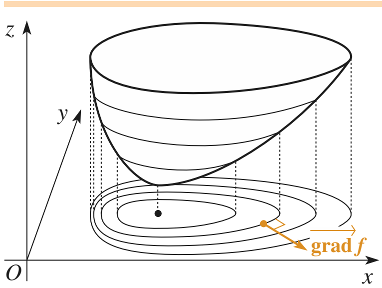
On peut aussi interpréter $D_{\vec{h}} f(a_0)$ comme le produit scalaire de $\vec{h}$ avec le vecteur $\big(D_1 f(a_0), D_2 f(a_0)\big)$, appelé gradient de f en a_0 et noté $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, f(a_0)$.

$$D_{\vec{h}} f(a_0) = (\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, f(a_0) \mid \vec{h})$$

Pour s'entraîner : ex. 8

Notons que la dérivée de f suivant un vecteur orthogonal au gradient est nulle. C'est la direction de la tangente à la ligne de niveau de f passant par a_0.

En tout point, le gradient est normal aux lignes de niveau (*Doc.* 5).



Doc. 5 Gradient et lignes de niveau.

4.3 • Généralisation

On peut généraliser le théorème précédent au cas des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, en l'appliquant à chacune des fonctions coordonnées.

Soit, par exemple, f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Posons :

$$f(x, y, z) = \big(X(x, y, z), Y(x, y, z)\big)$$

où X et Y sont deux fonctions de classe C^1 de U dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $a_0 \in U$ et tout vecteur $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire :

$$f(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + D_{\vec{h}} f(a_0) + o(\vec{h})$$

où : $$D_{\vec{h}} f(a_0) = \begin{pmatrix} h_1 D_1 X(a_0) + h_2 D_2 X(a_0) + h_3 D_3 X(a_0) \\ h_1 D_1 Y(a_0) + h_2 D_2 Y(a_0) + h_3 D_3 Y(a_0) \end{pmatrix}$$

L'application $\mathrm{d}f : \vec{h} \mapsto D_{\vec{h}} f(a_0)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, appelée différentielle de f en a_0 et représentée dans les bases canoniques par la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} D_1 X(a_0) & D_2 X(a_0) & D_3 X(a_0) \\ D_1 Y(a_0) & D_2 Y(a_0) & D_3 Y(a_0) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial X}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial z} \end{pmatrix}_{a_0}$$

appelée matrice jacobienne de f en a_0.

Pour s'entraîner : ex. 9 et 10

4.4 • Différentielle d'une fonction composée

Théorème 5

Soit φ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^r$. $f \circ \varphi$ est de classe C^1 et sa différentielle en un point a_0 est :

$$\mathrm{d}(f \circ \varphi)_{a_0} = \mathrm{d}f_{\varphi(a_0)} \circ \mathrm{d}\varphi_{a_0}$$

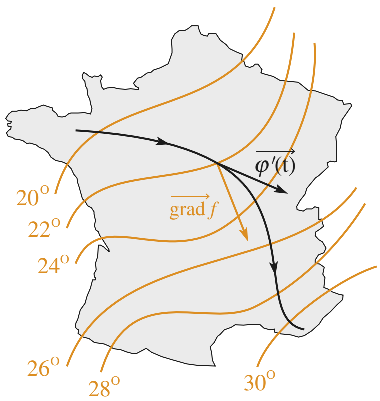
La matrice jacobienne de $f \circ \varphi$ est donc le produit des matrices jacobiennes de f et de φ.

Démonstration

Effectuons le développement limité de φ à l'ordre 1 en a_0, puis celui de f en $\varphi(a_0)$:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(a_0 + \vec{h}) &= f\left(\varphi(a_0 + \vec{h})\right) = f\left(\varphi(a_0) + \mathrm{d}\varphi_{a_0}(\vec{h}) + o(\vec{h})\right) \\ &= f \circ \varphi(a_0) + \mathrm{d}f_{\varphi(a_0)}\left(\mathrm{d}\varphi_{a_0}(\vec{h}) + o(\vec{h})\right) + o(\vec{h}) \\ &= f \circ \varphi(a_0) + \mathrm{d}_{\varphi(a_0)} \circ \mathrm{d}\varphi_{a_0}(\vec{h}) + o(\vec{h}) \end{aligned}$$

On obtient bien un développement limité à l'ordre 1 de $f \circ \varphi$ en a_0.



Doc. 6 La dérivée de la température au cours du voyage est le produit scalaire du gradient du champ de température par le vecteur vitesse du mobile.

Exemples

■ Choisissons $(p, q, r) = (1, 2, 1)$; φ est une fonction vectorielle de la variable réelle : $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, de classe C^1 sur un intervalle I et à valeurs dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et f une fonction de classe C^1 sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction $F = f \circ \varphi$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur I :

$$\forall t \in I \quad F(t) = f \circ \varphi(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$$

On obtient la dérivée de F en multipliant les matrices jacobiennes de f et φ :

$$F'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

(Il est sous-entendu que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont évaluées au point $(x(t), y(t))$.)

C'est-à-dire :

$$F'(t) = \left(\overrightarrow{\text{Grad}}\, f_{\varphi(t)} \mid \overrightarrow{\varphi'}(t)\right) \qquad (\textit{Doc.}\ 6).$$

■ Choisissons $(p, q, r) = (2, 2, 1)$; φ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $\varphi(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$, de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. La fonction $F = f \circ \varphi$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur V :

$$\forall (x, y) \in V \quad F(x, y) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

Pour alléger les notations, on omet d'écrire en quel point sont évaluées les dérivées partielles. On pourra compléter en précisant s'il s'agit de (x, y) ou de $(u(x, y), v(x, y))$. Par ailleurs, pour rendre les formules plus lisibles, les dérivées partielles de f sont notées ici $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

Écrivons la matrice jacobienne de F :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[3mm] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Pour s'entraîner : ex. 11

APPLICATION 1

Coordonnées polaires

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à un couple de coordonnées polaires (ρ, θ) d'un point du plan fait correspondre le couple de ses coordonnées cartésiennes (x, y) :

$$x = \rho\,\cos\theta$$
$$y = \rho\,\sin\theta$$

La fonction φ est de classe C^1 en tout point (ρ, θ) de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert U. On peut exprimer $f(x,y)$ à l'aide des coordonnées polaires (ρ,θ) :

$$\forall (x,y) \in U \quad f(x,y) = F(\rho,\theta)$$

c'est-à-dire $F = f \circ \varphi$, d'où :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} & \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}\rho\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta \end{cases}$$

Notons que $\operatorname{Det} J = \rho$; J est inversible si et seulement si $\rho \neq 0$, et, dans ce cas :

$$J^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{\rho} & \dfrac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}$$

J^{-1} est la matrice jacobienne de l'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi]$ qui à (x,y) fait correspondre (ρ,θ).

C'est-à-dire : $J^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} & \dfrac{\partial \rho}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$

On peut donc inverser les formules précédentes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial \rho}\cos\theta - \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{\rho} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial \rho}\sin\theta + \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{\rho} \end{cases}$$

On remarque que :

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\theta\,.$$

Les dérivées partielles, malgré les apparences, ne sont pas des quotients !

Pour s'entraîner : ex. 12

5 Extremum local

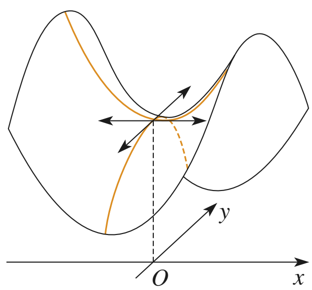
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert U. On dit que f présente un maximum local en $a_0 \in U$ s'il existe un ouvert V inclus dans U et contenant a_0 tel que $\forall x \in V\ f(x) \leqslant f(a_0)$. On peut définir de même un minimum local et on appelle extremum local un point qui est soit un maximum local soit un minimum local.

Théorème 6

Si une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ présente un extremum local en a_0, son gradient s'annule en a_0 (c'est-à-dire que ses deux dérivées partielles s'annulent en ce point). La réciproque est fausse : le gradient peut s'annuler en un point sans qu'il s'agisse d'un extremum local.

Démonstration

Posons $a_0 = (x_0, y_0)$. Si f présente un extremum local en a_0, les deux applications partielles présentent un extremum local respectivement en x_0 et y_0. Leurs dérivées s'annulent donc en ce point.



Doc. 7 Col.

Réciproquement, si les deux dérivées partielles s'annulent en a_0 :

- Les applications partielles n'admettent pas nécessairement d'extremum local.
- Les deux applications partielles peuvent admettre l'une un maximum local, l'autre un minimum local. Globalement, f n'admet pas d'extremum local (*Doc.* 7).
- Quand bien même les applications partielles admettraient toutes deux un maximum local, rien ne dit qu'il en soit de même pour f…

Dans la pratique, on cherchera les points où le gradient s'annule, puis on déterminera pour chacun d'eux s'il s'agit bien d'un extremum local.

Exemple : Cherchons les extrema locaux de la fonction définie par :

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 - y^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(1 - x^2)$$

Le gradient de f s'annule en cinq points :

$$(0,0) \quad (1,1) \quad (1,-1) \quad (-1,1) \quad (-1,-1)$$

Au voisinage du point $(0,0)$: $x \in]-1,1[\;\Rightarrow\; f(x,y) = x^4 + 2y^2(1-x^2) \geqslant 0$.
f présente donc un minimum local en $(0,0)$.
Au voisinage de $(1,1)$, $f(1,1) = 1$, or :

$$f(x,1) - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geqslant 0$$

tandis que $f(x,x) - 1 = -x^4 + 2x^2 - 1 = -(x^2 - 1)^2 \leqslant 0$.
f ne présente donc pas d'extremum local en $(1,1)$. Par symétrie, il en est de même pour les trois autres points.

Pour s'entraîner : ex. 14

6 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant sur un ouvert U des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ces deux fonctions peuvent elles-mêmes admettre des dérivées partielles :

$$D_1^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad D_2D_1 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$D_1D_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad D_2^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

f est dite de classe C^2 sur U si ces quatre dérivées secondes sont continues sur U.

L'ensemble des fonctions de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $C^2(U,\mathbb{R})$.

Les applications linéaires D_1 et D_2 de $C^2(U,\mathbb{R})$ dans $C^1(U,\mathbb{R})$ commutent :

L'hypothèse « f de classe C^2 » est suffisante, mais non nécessaire : seule la continuité des dérivées secondes croisées intervient.

Théorème 7 (Théorème de Schwarz)

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur un ouvert U, en tout point de U :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

La démonstration de ce théorème n'est pas au programme.

Contre-exemple, lorsque les dérivées secondes ne sont pas continues :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Si $y \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y$; donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \text{ ; donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1$$

Si $x \neq 0$, $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x$; donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$;

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \text{ ; donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1$$

Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ne prennent pas la même valeur en $(0,0)$; ces deux fonctions ne sont pas continues en ce point, comme on peut le vérifier par ailleurs.

Plus généralement, une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est dite de classe C^k si toutes ses dérivées d'ordre k sont continues. L'ensemble des fonctions de classe C^k sur U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $C^k(U,\mathbb{R})$. Sur cet espace vectoriel, k opérateurs de dérivation successifs commutent.

Pour s'entraîner : ex. 15 à 17

MÉTHODE

Pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte, on peut :

montrer que chacun de ses points est le centre d'une boule ouverte contenue dans cette partie.

Pour montrer qu'une fonction de deux variables est discontinue en un point,

il suffit de montrer qu'elle admet deux limites différentes sur deux chemins conduisant à ce point *(cf. exercice* 5).

Pour montrer qu'une fonction de deux variables est continue en un point (a, b), on peut :

- montrer que c'est une composée de fonctions continues ;
- majorer $|f(x, y) - f(a, b)|$ par $k\| (x, y) - (a, b) \|$

(cf. exercice 5).

Pour montrer qu'une fonction de deux variables est de classe C^1 sur une partie U de $\mathbb{R}^2$,

on montre qu'elle admet des dérivées partielles continues en tout point de U *(cf. exercice* 8).

Pour calculer les dérivées partielles d'une composée de fonctions de classe C^1,

on multiplie les matrices jacobiennes de ces fonctions *(cf. exercice* 11 *à* 13).

Pour déterminer les extrema d'une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

- on cherche les points où le gradient de cette fonction s'annule (c'est-à-dire que les deux dérivées partielles s'annulent) ;
- on étudie chacun de ces points pour voir s'il s'agit bien d'un extremum

(cf. exercice 14).

Exercice résolu

DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$x + i\,y \mapsto X(x, y) + i\,Y(x, y)$$

où X et Y sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ supposées de classe C^1. On dit que f est dérivable en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, si le quotient $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0 dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que f est dérivable en z_0 si et seulement si :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Y}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Y}{\partial x}(z_0) \quad \textit{(conditions de Cauchy)}$$

Montrer que, dans ce cas, la différentielle de f en z_0 est une similitude directe.

Les fonctions suivantes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont-elles dérivables ?

$$z \mapsto \overline{z} \qquad z \mapsto e^z \qquad z \mapsto \mathrm{Re}\,(z) \qquad z \mapsto |z| \qquad z \mapsto \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Conseils

Écrire les développements limités d'ordre 1 des fonctions réelles X et Y.

Distinguer clairement les deux implications.

Solution

Posons $z_0 = x_0 + i\,y_0$ et $h = h_1 + i\,h_2$.

$$\begin{aligned} f(z_0+h) - f(z_0) &= f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) \\ &= \big(X(x_0+h_1, y_0+h_2) - X(x_0, y_0)\big) \\ &\quad + i\,\big(Y(x_0+h_1, y_0+h_2) - Y(x_0, y_0)\big) \end{aligned}$$

Les fonctions X et Y étant de classe C^1, on peut écrire un développement limité d'ordre 1 :

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x}\right) h_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right) h_2 + o(h)$$

- Si $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ quand h tend vers 0, on doit avoir : $f(z_0+h) - f(z_0) = l\,h + o(h) = l\,h_1 + i\,l\,h_2 + o(h)$

En identifiant ces deux D.L., on obtient :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x} = l \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial y} + i\,\frac{\partial Y}{\partial y} = i\,l$$

On en déduit les conditions de Cauchy.

Dans chaque exemple, déterminer les fonctions X et Y, puis leurs dérivées partielles $\dfrac{\partial X}{\partial x}, \dfrac{\partial X}{\partial y}, \dfrac{\partial Y}{\partial x}, \dfrac{\partial Y}{\partial y}$.

■ Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, le D.L. de f peut s'écrire :

$$f(z_0+h)-f(z_0)=\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(h_1+i\,h_2)+o(h)$$

d'où $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial x}$: f est dérivable en z_0.

La matrice jacobienne de f en (x_0,y_0) est alors :

$$J=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial x} & -\dfrac{\partial Y}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial x}\end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice d'une similitude directe, de la forme

$$k\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Exemples :

- $f(z)=\overline{z}$ $\quad X(x,y)=x \quad Y(x,y)=-y \qquad \dfrac{\partial X}{\partial x}=1 \quad \dfrac{\partial Y}{\partial y}=-1.$

f n'est dérivable en aucun point.

- $f(z)=\mathrm{e}^z$ $\quad X(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y \quad Y(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y=\frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

f est dérivable en tout point et :

$$f'(z)=\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial x}=\mathrm{e}^x(\cos y+i\,\sin y)=\mathrm{e}^{x+iy}.$$

Ainsi, la relation $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$ est encore valable pour la fonction de la variable complexe.

- $f(z)=\mathrm{Re}\,(z)$ $\quad X(x,y)=x \quad Y(x,y)=0$: f n'est dérivable en aucun point.

- $f(z)=|z|$ $\quad X(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \quad Y(x,y)=0$: X et Y sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, mais les conditions de Cauchy ne sont satisfaites en aucun point, donc f n'est pas dérivable.

- $f(z)=\cos z$ $\quad X(x,y)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y \quad Y(x,y)=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y$

$$\frac{\partial X}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{ch}\,y=\frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y}=\cos x\,\mathrm{sh}\,y=-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

f est dérivable en tout point et :

$$f'(z)=\frac{\partial X}{\partial x}+i\,\frac{\partial Y}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{ch}\,y-i\,\cos x\,\mathrm{sh}\,y$$

$$f'(z)=-\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}\cdot\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}-i\,\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}$$

$$f'(z)=-\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix-y}-\mathrm{e}^{-ix+y}\right)=-\frac{\mathrm{e}^{i(x+iy)}-\mathrm{e}^{-i(x+iy)}}{2i}=-\sin z$$

Ainsi, la relation $(\cos z)'=-\sin z$ est encore valable pour la fonction de la variable complexe.

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) La réunion d'une famille quelconque de parties bornées est bornée.
b) La réunion d'une famille quelconque de parties ouvertes est ouverte.
c) Une fonction de deux variables dont les deux applications partielles sont continues en un point est continue en ce point.
d) Une fonction de deux variables qui possède des dérivées partielles en un point est continue en ce point.
e) Si une fonction de classe C^1 présente un extremum local en un point, son gradient est nul en ce point.
f) Si le gradient d'une fonction de classe C^1 s'annule en un point, cette fonction présente un extremum en ce point.
g) Quand on calcule une dérivée partielle seconde par rapport à deux variables, l'ordre des dérivations n'importe pas.

Espace $\mathbb{R}^2$

2 Montrer que pour tous points a et b de $\mathbb{R}^2$ il existe des boules ouvertes de centres a et b disjointes.

3 Démontrer que l'intersection et la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts.

Peut-on généraliser à une famille quelconque d'ouverts ?

4 * On désigne par p_1 et p_2 les projections de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$:

$$p_1 : \quad (x, y) \mapsto x \qquad p_2 : \quad (x, y) \mapsto y$$

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$; montrer que $p_1(A)$ et $p_2(A)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Fonctions de deux variables

5 Étudier la continuité des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} \text{si } (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{si } y \neq 0 & f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} \\ f(x,0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{si } (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{si } x \neq y & f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y} \\ f(x,x) = e^x \end{cases}$

6 Les fonctions suivantes admettent-elles une limite au point indiqué ?

a) $f(x,y) = x^y$ en $(0,0)$;

b) $f(x,y) = \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x} + \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{y}$ en $(0,0)$;

c) $f(x,y) = \dfrac{x^y - y^x}{x-y}$ en (a,a), $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Dérivées partielles

7 Calculer les dérivées partielles des fonctions :

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **b)** $f(x,y) = x^{y^x}$

c) $\begin{cases} \text{si } (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{\sin x^3 y}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{si } x \neq 0 & f(x,y) = x^2 \sin \dfrac{y}{x} \\ f(0,y) = 0 \end{cases}$

8 Les fonctions suivantes sont-elles de classe C^1 au point $(0,0)$? Si oui, calculer leur gradient en ce point.

a) $\begin{cases} \text{si } (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{si } (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{si } (x,y) \neq (0,0) & f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

9 Écrire la matrice jacobienne des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

a) $f(x,y) = (xy\,,\ x^2+y^2)$;

b) $f(x,y) = \left(\operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}, \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{y}\right)$.

10 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle inversion de pôle O et de rayon R l'application f qui à tout point $M(x,y)$ distinct de O fait correspondre le point M' de la demi-droite $[OM)$ tel que $OM \cdot OM' = R^2$.

Calculer la matrice jacobienne de l'application f en un point distinct de l'origine. Montrer que la différentielle de f en ce point est une similitude rétrograde dont on déterminera les éléments caractéristiques.

11 Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a$$

On pourra effectuer le changement de variables :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y\,. \end{cases}$$

12 Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = kf$$

Existe-t-il une solution continue sur $\mathbb{R}^2$?

On pourra passer en coordonnées polaires.

13 * **Théorème d'Euler.** Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel α vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$$

Démontrer que : $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Donner des exemples avec diverses valeurs de α.

14 Étudier les extremums des fonctions :

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3$;

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$.

Dérivées partielles d'ordre 2

15 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad f(x, y) = \dfrac{y^4}{x^2 + y^2} \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point. Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

3) Les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont-elles continues ?

16 Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On appelle *laplacien* de f la fonction $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1) Donner l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

2) La fonction f est dite harmonique si son laplacien est nul sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les fonctions harmoniques isotropes (c'est-à-dire qui ne dépendent pas de l'angle polaire θ).

17 Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \textbf{(1)}$$

On pose $u = x + y$; $v = x - y$ et $f(x, y) = F(u, v)$.

Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$. En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant la relation **(1)**.

Exercices posés aux oraux des concours

18 (Petites Mines 2006)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\,, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \qquad \text{et} \qquad f(0, 0) = 0$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

19 (CCP 2006)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}\,, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \qquad \text{et} \qquad f(0, 0) = 0$$

f est-elle de classe C^1 en $(0, 0)$?

20 (Mines-Ponts 2006)

Soit $F \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes, et P, Q les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $P(x, y) = \mathrm{Re}\,(F(x + iy))$, $Q(x, y) = \mathrm{Im}\,(F(x + iy))$.

Montrer que : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

32 Calcul intégral et champs de vecteurs

INTRODUCTION

Les fonctions de plusieurs variables introduites au chapitre 31 vont nous permettre de définir de nouvelles sortes d'intégrales : intégrales doubles, intégrales curvilignes, dont les applications sont très nombreuses en Géométrie – calculs d'aires, de volumes, de centres de gravité – et en Physique – moments d'inertie, potentiel d'un champ électrique, etc.

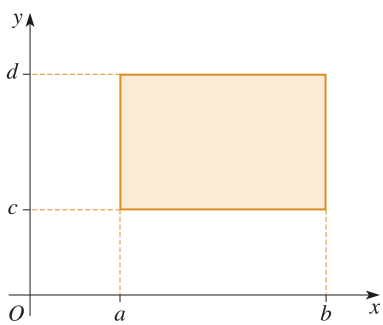
OBJECTIFS

- Notions de base sur les intégrales doubles et les intégrales curvilignes.
- Application au calcul de grandeurs physiques : aires, volumes, moments d'inertie, centres d'inertie.

1 Intégrales doubles

1.1 • Intégrale double sur un rectangle

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, commençons par le cas simple où le domaine d'intégration est un rectangle (*Doc.* 1).



Doc. 1 Rectangle de $\mathbb{R}^2$.

* Ce que nous admettrons.

Théorème 1 (Théorème de Fubini)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie et continue sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$, $(a < b$ et $c < d)$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Démonstration

Posons :

$$F(x, y) = \int_a^x \left(\int_c^y f(u, v)\ \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \qquad G(x, y) = \int_c^y \left(\int_a^x f(u, v)\ \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v$$

L'application $u \mapsto \int_b^y f(u, v)\ \mathrm{d}v$ étant continue (*), F est dérivable par rapport à x et :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_c^y f(x, v)\ \mathrm{d}v$$

L'application $v \mapsto f(x, v)$ étant continue, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est dérivable par rapport à y et :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y)$$

Le même calcul conduit à $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.

f étant continue, on peut conclure, grâce au théorème de Schwarz, que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 (F - G)}{\partial y \partial x} = 0$$

On en déduit qu'il existe des fonctions φ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \quad F(x, y) - G(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

Pour $x = a$: $\quad \forall y \in [c, d] \quad F(a, y) - G(a, y) = 0 \quad$ d'où $\quad \varphi(a) + \psi(y) = 0$

Pour $y = c$: $\quad \forall x \in [a, b] \quad F(x, c) - G(x, c) = 0 \quad$ d'où $\quad \varphi(x) + \psi(c) = 0$

En ajoutant membre à membre : $\varphi(x) + \psi(c) + \varphi(a) + \psi(y) = 0$

Or $\varphi(a) + \psi(c) = 0$, d'où :$\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \quad \varphi(x) + \psi(y) = 0$

C'est-à-dire : $\qquad F(x, y) - G(x, y) = 0$

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale double de f sur $R = [a, b] \times [c, d]$ et notée :

$$I = \iint_R f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

■ Un cas simple est celui où f est de la forme :

$$f(x, y) = g(x) h(y)$$

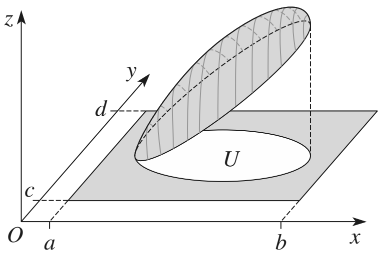
On a alors :

$$\iint_R f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \int_c^d h(y)\ \mathrm{d}y$$

■ En particulier :

$$\iint_R \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = (b - a)(d - c)$$

qui représente **l'aire** du rectangle R.



Doc. 2 Prolongement d'une fonction définie sur U.

L'existence de cette intégrale ne dépend pas que de la fonction f, mais aussi du domaine U. Même l'intégrale $\iint_U \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ n'est pas toujours définie : un domaine borné U ne possède pas nécessairement une aire…

1.2 • Intégrale double sur une partie bornée

Soit U une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur U.

U est inclus dans un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ (*Doc.* 2). Prolongeons f à R en posant :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in U & \overline{f}(x, y) = f(x, y) \\ \forall (x, y) \in R \backslash U & \overline{f}(x, y) = 0 \end{cases}$$

On dit que f est intégrable sur U si $\overline{f}$ est intégrable sur R et l'on pose alors :

$$\iint_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R \overline{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

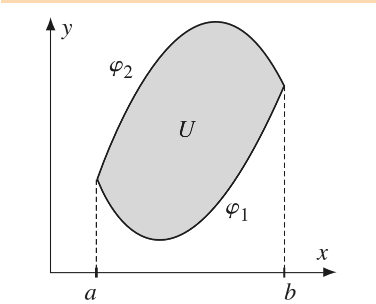
Dans la pratique, on aura le plus souvent affaire au domaine compris entre les courbes représentatives de deux fonctions continues :

Si U est de la forme (*Doc.* 3) : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \end{cases}$

$$\iint_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Exemple : L'aire du domaine U est :

$$A = \iint_U \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,\mathrm{d}x$$

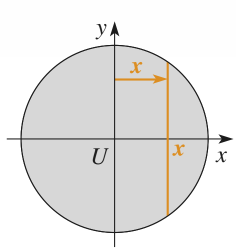


Doc. 3 Domaine élémentaire.

APPLICATION 1

Moment d'inertie d'un disque par rapport à un diamètre

Soit U le disque de centre O de rayon R et μ sa masse surfacique. Déterminer le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Oy (Doc. 4).



Doc. 4

La masse du disque est $M = \mu\pi R^2$.

Son moment d'inertie est :

$$J = \iint_U \mu x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu \int_{-R}^{R} \left(x^2 \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= 2\mu \int_{-R}^{R} x^2 \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2\mu R^4 \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\mu R^4}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{\mu\pi R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

Pour s'entraîner : ex. 2 et 3

1.3 • Changement de variables

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie et continue sur le domaine borné U. On peut, dans certains cas, simplifier le calcul de l'intégrale double $\iint_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ par un changement de variables :

Soit φ une application $(x, y) \mapsto (u, v)$, bijective, de classe C^1 sur U, et telle que la bijection réciproque φ^{-1} : $(u, v) \mapsto (x, y)$ soit également de classe C^1 sur $U' = \varphi(U)$.

$f(x, y)$ peut s'exprimer en fonction de u et v : $f(x, y) = g(u, v)$.
Nous admettrons qu'on a alors :

Sans chercher à démontrer cette formule, on peut expliquer la présence de $|\mathrm{Det}\,J|$ en remarquant que c'est le facteur par lequel la différentielle de φ^{-1} multiplie les aires et que par conséquent, il faut remplacer l'élément différentiel $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ par $|\mathrm{Det}\,J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

$$\iint_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{U'} g(u, v)\,|\mathrm{Det}\,J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

où J est la matrice jacobienne de φ^{-1}, c'est-à-dire que :

$$\mathrm{Det}\,J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Dans le cas du changement de variable dans l'intégrale d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on avait :

$$\int_{[a',b']} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f \circ \varphi(u)\,|\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u\,, \quad \text{où} \quad [a', b'] = \varphi\big([a, b]\big)$$

Exemple : Coordonnées polaires

Si $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$:

$$\mathrm{Det}\,J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

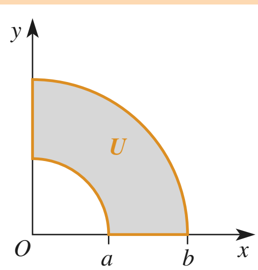
D'où : $$\iint_U f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{U'} g(\rho, \theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{où } \rho > 0)$$

Soit, par exemple : $$I = \iint_U \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\,,\ a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2\}$ (*Doc.* 5)

Alors : $I = \iint_{U'} \rho\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$ où $U' = [a, b] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

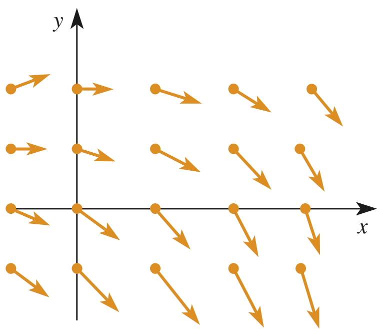
C'est-à-dire : $$I = \int_a^b \rho^2\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{b^3 - a^3}{6}.$$



Doc. 5 Le domaine U.

Pour s'entraîner : ex. 4

2 Champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$



Doc. 6 Champ de vecteurs.

2.1 • Définition

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. On appelle champ de vecteurs défini sur U une application qui, à tout point de U, fait correspondre un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (*Doc.* 6).

$$\forall (x, y) \in U \quad \overrightarrow{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Si cette application est de classe C^1, elle possède en tout point une différentielle, endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique par la matrice jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2.2 • Champ de gradient

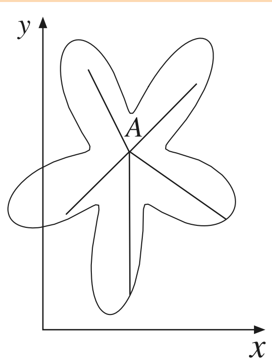
En particulier, si f est une fonction de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$, son gradient $\overrightarrow{\mathrm{Grad}} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ est un champ de vecteurs de matrice jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

On voit que, d'après le théorème de Schwarz, cette matrice est symétrique.

Réciproquement, tout champ de vecteurs dont la matrice jacobienne est symétrique est-il un champ de gradient ?

- Oui, **localement**, c'est-à-dire que chaque point de U possède un voisinage sur lequel il existe une fonction f dont le champ de vecteurs soit le gradient.
- Non, en général, sur U tout entier. La possibilité de « recoller » les solutions locales dépend étroitement des propriétés topologiques de U.



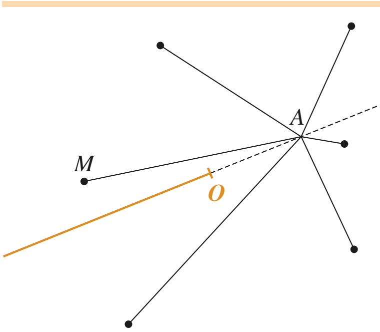
Doc. 7 Partie étoilée

Nous allons donner, sans démonstration, une condition suffisante pour que ce recollement soit possible. Donnons, pour cela, une définition : on dit que U est étoilé par rapport à un de ses points A si (*Doc.* 7) :

$$\forall M \in U \quad [AM] \subset U$$

Exemples :

- Une partie convexe est une partie étoilée par rapport à chacun de ses points.
- $\mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$ n'est étoilé par rapport à aucun de ses points.
- $\mathbb{R}^2$ privé d'une demi-droite d'origine O est étoilé par rapport à un point de la demi-droite opposée (*Doc.* 8).



Doc. 8 Le plan privé d'une demi-droite est étoilé.

Nous admettrons le résultat suivant :

Henri Poincaré
mathématicien français
(1854-1912)

Théorème 2 : Théorème de Poincaré

Tout champ de vecteurs de classe C^1 $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ dont la matrice jacobienne est symétrique $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ sur un domaine U étoilé par rapport à un de ses points est un champ de gradient, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in U \quad P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

On dit alors que f est un potentiel scalaire du champ $\vec{V}$ et que ce champ dérive d'un potentiel scalaire.

Exemple : Considérons le champ de vecteurs défini sur $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$ par :

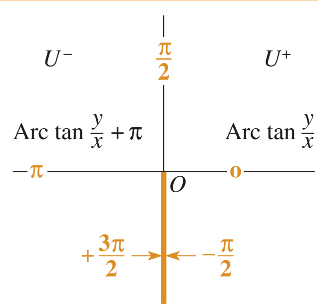
$$\vec{V}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

On vérifie que : $\quad \forall (x,y) \in U^2 \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

On ne peut rien dire d'emblée sur U tout entier, qui n'est pas étoilé. Posons $U_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ et $U_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0\}$. On vérifie que, sur U_+ ou sur U_-, qui sont convexes donc étoilés, $\vec{V}$ est le gradient de la fonction : $f(x,y) = \text{Arctan}\, \frac{y}{x}$.

Soit $U_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y)\ x = 0\ y \leqslant 0\}$. U_1 est le plan privé d'une demi-droite : il est étoilé. $\vec{V}$ est le gradient sur U_1 de la fonction définie par :

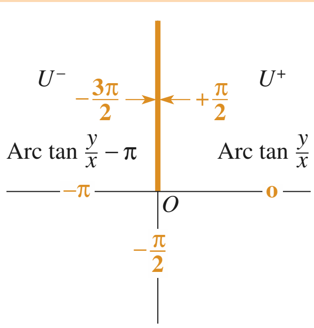
$$\begin{cases} \text{si } x > 0 \quad f(x,y) = \text{Arctan}\, \frac{y}{x} \\ \text{si } x < 0 \quad f(x,y) = \text{Arctan}\, \frac{y}{x} + \pi \\ \text{si } x = 0 \quad \text{et} \quad y > 0 \quad f(x,y) = \frac{\pi}{2} \qquad (\textit{Doc. } 9) \end{cases}$$



Doc. 9 U_1 est étoilé.

De même, sur $U_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y)\ x = 0 \quad y \geqslant 0\}$, qui est aussi étoilé, $\vec{V}$ est le gradient de la fonction définie par :

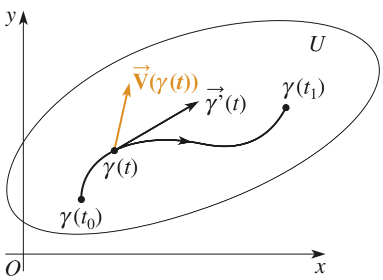
$$\begin{cases} \text{si } x > 0 \quad f(x,y) = \text{Arctan}\, \frac{y}{x} \\ \text{si } x < 0 \quad f(x,y) = \text{Arctan}\, \frac{y}{x} - \pi \\ \text{si } x = 0 \quad \text{et} \quad y < 0 \quad f(x,y) = -\frac{\pi}{2} \qquad (\textit{Doc. } 10) \end{cases}$$



Doc. 10 U_2 est étoilé.

Mais aucun recollement n'est possible sur U tout entier...

2.3 • Intégrale curviligne



Doc. 11 Circulation de $\vec{V}$ sur l'axe γ .

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, et γ une courbe paramétrée de U de classe C^1 sur un segment $[t_0, t_1]$, avec $t_0 < t_1$. On appelle circulation du champ $\overrightarrow{V}$ sur γ l'intégrale (*Doc.* 11) :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\overrightarrow{V}(\gamma(t)) \mid \overrightarrow{\gamma'}(t) \right) \mathrm{d}\, t$$

Si $\overrightarrow{V}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ et $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, cette intégrale s'écrit :

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left[P\big(x(t), y(t)\big)\ x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)\ y'(t) \right] \mathrm{d}\, t$$

Un changement de paramètre de classe C^1 correspond à un changement de variable dans cette intégrale : la circulation du champ $\overrightarrow{V}$ sur γ ne dépend donc pas du paramétrage, mais seulement du support de γ et des points de départ et d'arrivée.

En remarquant que $x'(t)\ \mathrm{d}\, t = \mathrm{d}\, x$ et $y'(t)\ \mathrm{d}\, t = \mathrm{d}\, y$, on peut écrire :

$$I = \int_\gamma P(x, y)\ \mathrm{d}\, x + Q(x, y)\ \mathrm{d}\, y$$

Cette notation est appelée intégrale curviligne . L'indice γ rappelle la courbe paramétrée sur laquelle on intègre, puisque plus rien dans l'intégrale n'y fait référence.

Exemple : Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma y\ \mathrm{d}\, x - x\ \mathrm{d}\, y$, où γ est le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct.

Paramétrons γ par : $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$

$$I = \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t\ \mathrm{d}\, t) - \cos t(\cos t\ \mathrm{d}\, t) = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\ \mathrm{d}\, t = -2\pi$$

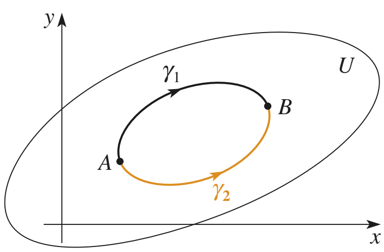
2.4 • Circulation d'un champ de gradient

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur une partie U, et γ une courbe paramétrée de U de classe C^1 sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, la circulation du gradient de f sur γ est :

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}\ \mathrm{d}\, x + \frac{\partial f}{\partial y}\ \mathrm{d}\, y \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\ y'(t) \right] \mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

On reconnaît dans le crochet la dérivée de la fonction $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$.

Par conséquent : $I = f\big(x(t_1), y(t_1)\big) - f\big(x(t_0, y(t_0)\big)$.



Doc. 12 Circulation sur deux arcs d'extrémités A et B.

On peut énoncer :

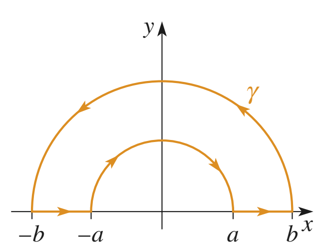
Théorème 3
La circulation du champ de gradient d'une fonction f de classe C^1 sur une courbe paramétrée ne dépend que des valeurs de f aux extrémités de cette courbe et non du chemin utilisé pour relier ces points.
En particulier, la circulation d'un champ de gradient sur une courbe fermée est nulle (*Doc.* 12).

Dans la pratique, on utilise le théorème de Poincaré pour reconnaître si un champ de vecteurs est un champ de gradient :

Corollaire 3.1
Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de classe C^1 sur un domaine U étoilé par rapport à un de ses points, dont la matrice jacobienne est symétrique, la circulation de $\overrightarrow{V}$ entre deux points ne dépend pas du chemin utilisé pour relier ces points **en restant dans** U.
En particulier, la circulation de $\overrightarrow{V}$ est nulle sur toute courbe fermée **incluse dans** U.

Exemple : Reprenons le champ étudié au *paragraphe* 2.2 :

$$\overrightarrow{V}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$



Doc. 13 Définition de l'arc γ.

■ Calculons la circulation de $\overrightarrow{V}$ sur le chemin indiqué sur le *document* 13.

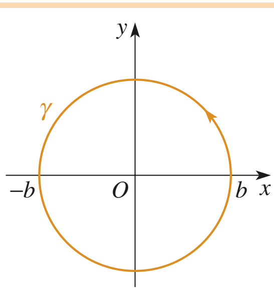
$$I = \int_0^{\pi}\left[-\frac{b\sin t}{b^2}(-b\sin t) + \frac{b\cos t}{b^2}(b\cos t)\right]\mathrm{d}\,t$$

$$+\int_{\pi}^{0}\left[-\frac{a\sin t}{a^2}(-a\sin t) + \frac{a\cos t}{a^2}(a\cos t)\right]\mathrm{d}\,t = 0$$

la courbe γ restant dans le domaine étoilé $\mathbb{R}^2\backslash\{(x,y)\,,\ x=0 \text{ et } y>0\}$, il est normal d'obtenir une circulation nulle.

■ Calculons la circulation de $\overrightarrow{V}$ sur tout le cercle de centre O de rayon b parcouru dans le sens direct (*Doc.* 14) :

$$I = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{b\sin t}{b^2}(-b\sin t) + \frac{b\cos t}{b^2}(b\cos t)\right]\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,t = 2\pi$$



Doc. 14 Circulation sur un cercle de centre O.

Ici, la courbe γ n'est incluse dans aucun domaine étoilé. La circulation de $\overrightarrow{V}$ n'est pas nulle, bien que la courbe soit fermée...

Pour s'entraîner : ex. 5 à 7

3 Formule de Green-Riemann

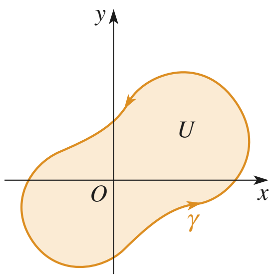
3.1 • La formule de Green-Riemann

Le théorème suivant, que nous admettrons, permet de passer d'une intégrale curviligne à une intégrale double et vice versa :

Théorème 4

Soit U un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est une courbe simple fermée γ de classe C^1, parcourue dans le sens direct.
Soit $\overrightarrow{V} = (P, Q)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur U.

$$\int_\gamma P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$



Doc. 15 Domaine limité par un arc simple fermé de classe C^1.

Remarque *: On retrouve le résultat du corollaire 3.1 :*

$$\forall (x, y) \in U \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \int_\gamma P \, dx + Q \, dy = 0$$

(Le domaine U, bien que n'étant pas nécessairement étoilé, possède des propriétés topologiques suffisantes pour que le théorème de Poincaré s'applique (Doc. 15).)

Il faut bien faire attention pour appliquer ce théorème à ce que $\overrightarrow{V}$ **soit bien de classe** C^1 **sur** U **tout entier, et pas seulement sur** γ.

Pour s'entraîner : ex. 8 et 9

3.2 • Application aux calculs d'aire

Considérons le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = (-y, 0)$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Soit U un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est une courbe simple fermée γ de classe C^1, parcourue dans le sens direct.

La formule de Green-Riemann nous donne :

$$\int_\gamma -y \,\mathrm{d}x = \iint_U \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

On reconnaît l'aire A du domaine U. On peut faire de même avec le champ $\overrightarrow{V} = (0, x)$. D'où :

$$A = \int_\gamma -y \,\mathrm{d}x = \int_\gamma x \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_\gamma -y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y$$

Exemple : Aire de l'intérieur d'une ellipse : $x = a\cos t \quad y = b\sin t$

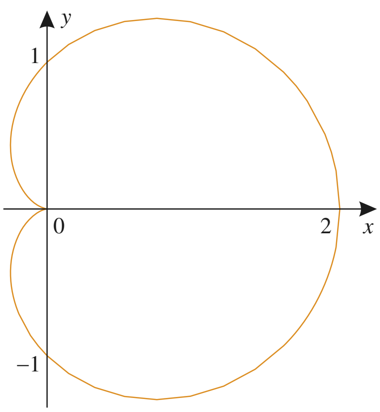
$$A = \int_\gamma -y\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} ab\sin^2 t\ \mathrm{d}t = \pi ab$$

3.3 • Aire en coordonnées polaires

$$\begin{aligned} -y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y &= -\rho\sin\theta(\cos\theta\ \mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\ \mathrm{d}\theta) + \rho\cos\theta(\sin\theta\ \mathrm{d}\rho + \rho\cos\theta\ \mathrm{d}\theta) \\ &= \rho^2\ \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_\gamma \rho^2\ \mathrm{d}\theta}$$



Doc. 16 Cardioïde.

Exemple : Aire de l'intérieur d'une cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$ (*Doc.* 16)

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}$$

MÉTHODE

Pour calculer une intégrale double, on peut :

- la calculer directement *(cf. exercice* 2*)* ;
- effectuer un changement de variables *(cf. exercice* 4*)* ;
- utiliser la formule de Green-Riemann pour se ramener à une intégrale curviligne *(cf. exercices* 8 *et* 9 *)*.

Pour calculer une intégrale curviligne, on peut :

- utiliser un paramétrage pour se ramener à une intégrale simple *(cf. exercices* 5 *et* 7*)* ;
- s'il s'agit d'un champ de gradient, calculer le potentiel scalaire correspondant ; l'intégrale est alors égale à la différence de potentiel entre les deux extrémités *(cf. exercice* 6*)*.

Pour reconnaître si un champ de vecteurs de classe C^1 est un champ de gradient, on peut utiliser le théorème de Poincaré : il suffit que la matrice jacobienne du champ soit symétrique sur un domaine étoilé par rapport à un de ses points *(cf. exercice* 6*)*.

Exercice résolu

UN CALCUL D'INTÉGRALES SIMPLES À L'AIDE D'INTÉGRALES DOUBLES

Soit r un réel strictement positif. On considère les intégrales simples :

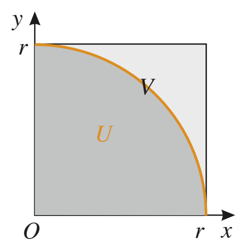
$$C(r) = \int_0^r e^{-t^2} \cos t^2 \, \mathrm{d}t, \qquad S(r) = \int_0^r e^{-t^2} \sin t^2 \, \mathrm{d}t$$

et les intégrales doubles :

$$I_U(r) = \iint_U \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad J_U(r) = \iint_U \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_V(r) = \iint_V \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad J_V(r) = \iint_V \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où U est le quart de disque de centre O de rayon r limité par les demi-axes Ox, Oy et V le carré $[0, r]^2$ (Doc. 17).



Doc. 17.

1. *Calculer $I_U(r)$ et $J_U(r)$ en utilisant les coordonnées polaires.*
2. *Montrer que $I_U(r)$ et $J_U(r)$ admettent des limites que l'on déterminera quand r tend vers $+\infty$.*
3. *Que peut-on dire de $I_V(r) - I_U(r)$ et $J_V(r) - J_U(r)$ quand r tend vers $+\infty$?*
4. *Montrer que : $I_V(r) = C(r)^2 - S(r)^2$ et $J_V(r) = 2C(r)S(r)$.*
5. *En déduire des expressions de $C(r)$ et $S(r)$ en fonction de $I_V(r)$ et $J_V(r)$.*
6. *Déterminer les limites de $C(r)$ et $S(r)$ quand r tend vers $+\infty$.*

Conseils

Attention $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se remplace par $\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$.

Cette intégrale simple se calcule facilement.

Solution

1) En coordonnées polaires :

$$I_U(r) = \iint_{U'} \mathrm{e}^{-\rho^2} \cos(\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

où $U' = [0, r] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. D'où :

$$I_U(r) = \frac{\pi}{2} \int_0^r \mathrm{e}^{-\rho^2} \cos(\rho^2)\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

Effectuons le changement de variable $u = \rho^2$:

$$I_U(r) = \frac{\pi}{4} \int_0^{r^2} \mathrm{e}^{-u} \cos u\,\mathrm{d}u.$$

Par une intégration par parties répétée, on obtient :

$$I_U(r) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-r^2}}{2}(\sin r^2 - \cos r^2)\right)$$

Un calcul similaire conduit à :

$$J_U(r) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-r^2}}{2}(\sin r^2 + \cos r^2)\right)$$

e^{-r^2} tend vers 0 ; $\sin r^2$ et $\cos r^2$ sont bornés.

2) Lorsque r tend vers $+\infty$, $I_U(r)$ et $J_U(r)$ tendent vers $\frac{\pi}{8}$.

3) La différence $I_V(r) - I_U(r)$ représente l'intégrale double de la fonction $e^{-x^2-y^2}\cos(x^2+y^2)$ sur l'ensemble $V \backslash U$; on peut la majorer :

Quelle est l'aire du domaine $V \backslash U$?

$$\left|I_V(r) - I_U(r)\right| \leqslant e^{-r^2}\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right)$$

Ce qui prouve que $I_V(r) - I_U(r)$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$; $I_V(r)$ tend donc vers $\frac{\pi}{8}$. Le même raisonnement est applicable à $J_V(r)$.

Appliquer les formules d'addition du cosinus et du sinus pour exprimer $I_V(r)$ et $J_V(r)$ en fonction de $C(r)$ et $S(r)$.

4) Calculons $I_V(r)$ en utilisant la formule d'addition du cosinus :

$$\begin{aligned}
I_V(r) &= \iint_V e^{-x^2-y^2}(\cos x^2 \cos y^2 - \sin x^2 \sin y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_V e^{-x^2}e^{-y^2}\cos x^2 \cos y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad - \iint_V e^{-x^2}e^{-y^2}\sin x^2 \sin y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_0^r e^{-x^2}\cos x^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^r e^{-x^2}\sin x^2 \mathrm{d}x\right)^2 \\
&= C(r)^2 - S(r)^2
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
J_V(r) &= \iint_V e^{-x^2-y^2}(\sin x^2 \cos y^2 - \cos x^2 \sin y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_V e^{-x^2}e^{-y^2}\sin x^2 \cos y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad - \iint_V e^{-x^2}e^{-y^2}\cos x^2 \sin y^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^r e^{-x^2}\sin x^2\, \mathrm{d}x \int_0^r e^{-x^2}\cos x^2\, \mathrm{d}x \\
&= 2\, C(r)\, S(r)
\end{aligned}$$

Résoudre le système formé par les deux équations.

5) On a :

$$\begin{cases} C(r)^2 - S(r)^2 = I_V(r) \\ C(r)^2\left(-S(r)^2\right) = -\dfrac{J_V(r)^2}{4} \end{cases}$$

Donc $C(r)^2$ et $-S(r)^2$ sont les racines du trinôme :

$$X^2 - I_V(r)\,X - \frac{J_V(r)^2}{4}$$

Le discriminant est : $\Delta = I_V(r)^2 + J_V(r)^2$. D'où :

$$\begin{cases} C(r)^2 = \dfrac{1}{2}\left(I_V(r) + \sqrt{I_V(r)^2 + J_V(r)^2}\right) \\ S(r)^2 = \dfrac{1}{2}\left(-I_V(r) + \sqrt{I_V(r)^2 + J_V(r)^2}\right) \end{cases}$$

6) Il en résulte que $C(r)^2$ tend vers $\dfrac{\pi}{16}(\sqrt{2}+1)$ et $S(r)^2$ vers $\dfrac{\pi}{16}(\sqrt{2}-1)$.

En admettant que $C(r)$ et $S(r)$ sont positifs :

$$\lim_{r\longrightarrow+\infty} C(r) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi(\sqrt{2}+1)} \;;\; \lim_{r\longrightarrow+\infty} S(r) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi(\sqrt{2}-1)}$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{\pi(\sqrt{2}+1)} \;;$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{\pi(\sqrt{2}-1)}$$

Exercices

1 Vrai ou faux ?

a) Tout domaine borné du plan possède une aire.
b) Une fonction continue est intégrable sur tout domaine borné du plan.
c) La matrice jacobienne du champ de gradient d'une fonction de classe C^2 est symétrique.
d) Un champ de vecteurs (P,Q) tel que $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ est le gradient d'une fonction.
e) L'intégrale curviligne d'un champ de gradient sur un contour fermé est nulle.
f) L'aire de la région du plan limitée par une courbe γ définie par une équation polaire est $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\gamma \rho^2\,\mathrm{d}\theta$.

Intégrales doubles

2 Calculer les intégrales doubles :

a) $\displaystyle\iint_U xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\}$;

b) $\displaystyle\iint_U |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$;

c) $\displaystyle\iint_U (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$U=$ intérieur du triangle de sommets

$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,0)$;

d) $\displaystyle\iint_U \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$

$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\geqslant 1,\ y\geqslant 1,\ x+y\leqslant 3\}$.

3 Calculer le volume de la région de $\mathbb{R}^3$ limitée par la surface d'équation $z=x^2+2y^2$ et le plan d'équation $z=1$.

4 Calculer à l'aide d'un changement de variables les intégrales doubles :

a) $\displaystyle\iint_U \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+1}$

$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x^2+y^2\leqslant 1\}$;

b) $\displaystyle\iint_U \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

Champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$

5 Calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_C (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2+x)\,\mathrm{d}y$$

sur différents arcs C d'extrémités $A(-1,-1)$ et $B(1,1)$.

6 Montrer que les intégrales curvilignes suivantes ne dépendent que des extrémités de l'arc C. Les calculer en fonction des coordonnées de ces extrémités :

a) $\displaystyle\int_C (x^2-y^2)\,\mathrm{d}x-2xy\,\mathrm{d}y$;

b) $\displaystyle\int_C \frac{2x}{y}\,\mathrm{d}x+\frac{y^2-x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y$ (avec $y>0$).

7 Calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_C \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$ suivant que C est :

a) le cercle de centre O de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

b) le carré de diagonale $A(1,-1)$, $C(-1,1)$ parcouru dans le sens direct ;

Commenter le résultat.

8 Calculer l'intégrale double : $I=\displaystyle\iint_U (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où : $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\}$

1) directement,

2) par un changement de variables,

3) à l'aide de la formule de Green-Riemann.

9 Même exercice avec : $I=\displaystyle\iint_U xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où : $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$

Exercice posé aux oraux des concours

10 (Centrale-Supelec 2006)

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$; dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la courbe C d'équation cartésienne :

$$x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)$$

Déterminer une équation polaire de C, la tracer et calculer l'aire de la boucle.

33 Étude métrique des courbes planes

INTRODUCTION

L'étude des courbes planes que nous avons commencée dès le début de l'année, enrichie par l'étude locale que permettent les développements limités, est purement affine, c'est-à-dire que les propriétés étudiées sont invariantes par n'importe quelle application affine (projection, homothétie, affinité...). Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier les propriétés des courbes liées à la métrique du plan, c'est-à-dire invariantes seulement par une isométrie, voire même un déplacement. Prenons un exemple : du point de vue affine, toutes les ellipses se ressemblent et l'étude faite pour l'une (par exemple un cercle) vaut pour toutes. En revanche, la connaissance de la longueur d'un cercle ne donne aucun renseignement sur celle d'une ellipse : la longueur d'une courbe est une propriété métrique.

OBJECTIFS

- Propriétés métriques des courbes planes : abscisse curviligne, longueur, courbure.
- Usage du repère de Frenet.

1 Représentation normale d'un arc

1.1 • Paramétrage admissible

Nous avons vu au début de l'année qu'une courbe plane pouvait être représentée paramétriquement de plusieurs façons. Précisons ce point de vue. On appelle **arc paramétré** du plan P une application $\vec{f}$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans P ; on le note $(I,\vec{f})$. Supposons-le de classe C^k. Désignons par $\mathcal{C}$ le support de cet arc.

L'arc $(J,\vec{g})$ de classe C^k est dit équivalent à $(I,\vec{f})$ s'il existe une bijection θ de I dans J, de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que : $\vec{f} = \vec{g} \circ \theta$. On dit que θ est un **paramétrage admissible** de $(I,\vec{f})$.

$$\forall t \in I \quad \vec{f}(t) = \vec{g}\Big(\theta(t)\Big)$$

$$\forall u \in J \quad \vec{g}(u) = \vec{f}\Big(\theta^{-1}(u)\Big)$$

Les arcs $(I,\vec{f})$ et $(J,\vec{g})$ ont le même support $\mathcal{C}$. $\theta(t)$ est un nouveau paramètre permettant de décrire $\mathcal{C}$ à l'aide de la fonction $\vec{g}$.

Si $k \geqslant 1$, les fonctions $\vec{f},\vec{g},\theta$ sont dérivables et :

$$\vec{f}\,'(t) = \theta'(t)\,\vec{g}\,'\Big(\theta(t)\Big)$$

Les vecteurs dérivés $\vec{f}\,'(t)$ et $\vec{g}\,'\Big(\theta(t)\Big)$ sont donc colinéaires, et comme θ' ne s'annule pas (car θ^{-1} est dérivable), ces deux vecteurs ne peuvent s'annuler que simultanément : les arcs $(I,\vec{f})$ et $J,\vec{g})$ ont les mêmes points stationnaires. En particulier, si l'un est régulier, l'autre aussi. Ceci montre qu'il ne suffit pas que deux arcs aient le même support pour qu'ils soient équivalents.

1.2 • Abscisse curviligne

Soit $(I,\vec{f})$ un arc de classe C^1 régulier. Il existe en tout point de I un vecteur vitesse $\vec{f}\,'(t)$; la norme de ce vecteur représente la **vitesse numérique** du mobile. On appelle **abscisse curviligne** toute primitive de la fonction continue $t \mapsto \| \vec{f}\,'(t) \|$.

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \| \vec{f}\,'(u) \| \,\mathrm{d}u$$

Intuitivement, l'abscisse curviligne représente une sorte de « compteur kilométrique » permettant de mesurer la distance parcourue sur la courbe $\mathcal{C}$.

Théorème 1
Pour tout arc $(I,\vec{f})$ de classe C^1 régulier, l'abscisse curviligne est un paramétrage admissible.

Démonstration

Par définition, l'abscisse curviligne σ est dérivable et : $\sigma'(t) = \|\vec{f}\,'(t)\|$. Cette dérivée est continue : σ est de classe C^1 ; de plus, l'arc étant régulier, $\sigma'(t)$ est strictement positif : la fonction σ est strictement croissante sur I et continue donc bijective. Sa bijection réciproque est dérivable et pour tout $s \in \sigma(I)$:

$$(\sigma^{-1})'(s) = \frac{1}{\|\,\vec{f}\,'(\sigma^{-1}(s))\,\|}$$

$(\sigma^{-1})'$ est continue, donc σ^{-1} est de classe C^1. σ est bien un paramétrage admissible de classe C^1.

Ce paramétrage admissible permet de définir l'arc équivalent $(J, \vec{F})$ tel que $\vec{f} = \vec{F} \circ \sigma$, c'est-à-dire pour tout $t \in I$: $\vec{f}(t) = \vec{F}\big(\sigma(t)\big)$. En dérivant, on obtient :

$$\vec{f}\,'(t) = \sigma'(t)\,\vec{F}\,'\big(\sigma(t)\big) = \|\vec{f}\,'(t)\|\;\vec{F}\,'\big(\sigma(t)\big)$$

d'où :

$$\vec{F}\,'\big(\sigma(t)\big) = \frac{\vec{f}\,'(t)}{\|\vec{f}\,'(t)\|}$$

Ce vecteur est de norme 1 : c'est le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{f}\,'(t)$ de même sens.

$$\forall s \in \sigma(I) \qquad \|\,\vec{F}\,'(s)\,\| = 1$$

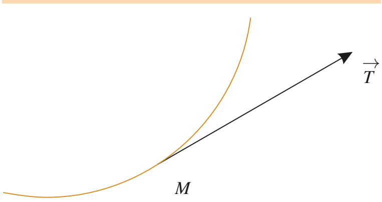
L'arc $(\sigma(I), \vec{F})$ réalise le parcours de la courbe $\mathcal{C}$ à vitesse numérique constante égale à 1 : on dit que l'abscisse curviligne est un **paramétrage normal** de $\mathcal{C}$.

1.3 • Repère de Frenet

Supposons le plan orienté. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne s. Désignons par $\vec{T}$ le vecteur unitaire $\vec{F}\,'(s)$, c'est-à-dire avec la notation de Leibniz :

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$$

On l'appelle vecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$ en M (*Doc.* 1).



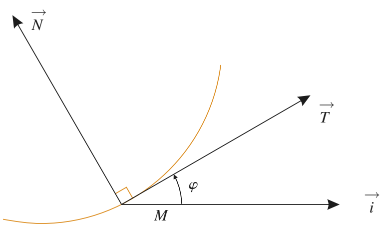
Doc. 1 Vecteur unitaire tangent.

On peut calculer le vecteur $\vec{T}$ à partir de tout paramétrage équivalent à σ par :

$$\vec{T} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\vec{f}\,'(t)}{\|\vec{f}\,'(t)\|}$$

Désignons par $\vec{N}$ l'image de $\vec{T}$ par la rotation vectorielle d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

$(M, \vec{T}, \vec{N})$ est un repère orthonormal direct, appelé **repère de Frenet** attaché au point M.



Doc. 2 Repère de Frenet.

Si le plan est rapporté au repère orthonormal direct fixe $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, désignons par φ l'angle $(\vec{\imath}, \vec{T})$ (*Doc.* 2).

$$\begin{cases} \vec{T} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{N} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

où $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$.

En fait, $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \varphi$ sont des fonctions de l'abscisse curviligne s, ou de tout paramètre équivalent t. On se permettra de noter de la même façon ces fonctions quel que soit le paramètre. Nous admettrons que si l'arc est de classe C^k, ces fonctions sont de classe C^{k-1}.

1.4 • Calcul en coordonnées cartésiennes

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(I, \vec{f})$ l'arc paramétré défini par :

$$\forall t \in I \quad \vec{f}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$$

que l'on suppose au moins de classe C^1.

$$\vec{f}\,'(t) = x'(t)\,\vec{\imath} + y'(t)\,\vec{\jmath} \quad ; \quad \|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

d'où :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\vec{f}\,'(t)}{\|\vec{f}\,'(t)\|} = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\,\vec{\imath} + \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\,\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{N} = -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\,\vec{\imath} + \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}\,\vec{\jmath}$$

1.5 • Calcul en coordonnées polaires

Si l'arc est représenté par l'équation polaire : $\theta \mapsto \rho(\theta)$ (*Doc.* 3), on a dans le repère polaire :

$$\vec{f}(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)$$

d'où :

$$\vec{f}\,'(\theta) = \rho'(\theta)\,\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\,\vec{v}(\theta) \quad ; \quad \|\vec{f}\,'(\theta)\| = \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}$$

$$\overrightarrow{T} = \frac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}}\,\vec{u}(\theta) + \frac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}}\,\vec{v}(\theta)$$

$$\overrightarrow{N} = -\frac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}}\,\vec{u}(\theta) + \frac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}}\,\vec{v}(\theta)$$

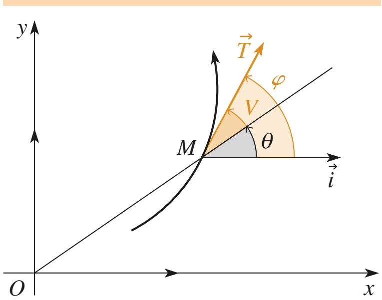
Ici :

$$\begin{cases} \overrightarrow{T} = \cos V\ \vec{u}(\theta) + \sin V\ \vec{v}(\theta) \\ \overrightarrow{N} = -\sin V\ \vec{u}(\theta) + \cos V\ \vec{v}(\theta) \end{cases}$$

où V est l'angle $(\vec{u}(\theta), \overrightarrow{T})$. Il vérifie $\tan V = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.

L'angle φ se calcule facilement par :

$$\varphi = (\vec{\imath}, \overrightarrow{T}) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{T}) = \theta + V$$



Doc. 3 Vecteur unitaire tangent en coordonnées polaires.

2 Longueur d'un arc de courbe

2.1 • Définition

Soit $(I, \vec{f})$ un arc paramétré régulier de classe C^1 et t_0, t_1 deux éléments de I tels que $t_0 < t_1$. L'abscisse curviligne σ représentant un paramétrage normal, la **longueur** de l'arc $([t_0, t_1], \vec{f})$ est donnée par :

$$L(t_0, t_1) = \sigma(t_1) - \sigma(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{f}\,'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

2.2 • Calcul de la longueur en coordonnées cartésiennes

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si la courbe paramétrée est définie par les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, la longueur de l'arc $(M(t_0)M(t_1))$ est :

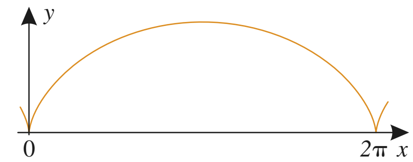
$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'\,(t)^2 + y'\,(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

Exemple : Longueur d'une arche de la cycloïde (*Doc.* 4) définie par :

$$x(t) = t - \sin t \qquad y(t) = 1 - \cos t$$

$$x'\,(t)^2 + y'\,(t)^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 4 \sin^2 \frac{t}{2}$$

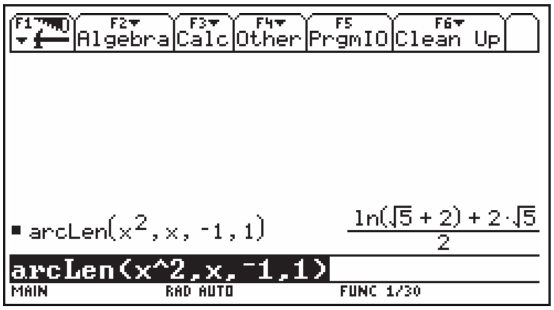
D'où : $\quad L(0, 2\pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t = 8$



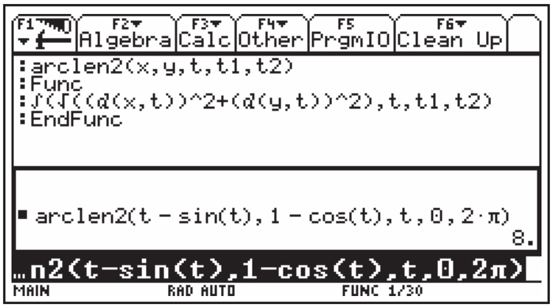
Doc. 4 Cycloïde.

Pour s'entraîner : ex. 2, 3

La calculatrice TI-92+/Voyage 200 propose une fonction `arcLen` qui calcule la longueur d'un arc donné par l'équation cartésienne $y = f(x)$:



Améliorons ce programme pour calculer la longueur d'un arc paramétré quelconque défini par les fonctions $(x(t), y(t))$:



2.3 • Calcul de la longueur en coordonnées polaires

Si la courbe est définie par l'équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$, la longueur de l'arc $(M(\theta_0)M(\theta_1))$ est :

$$L(\theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'\,(\theta)^2}\, \mathrm{d}\theta$$

Exemple : Longueur de la cardioïde (*Doc.* 5) définie par :

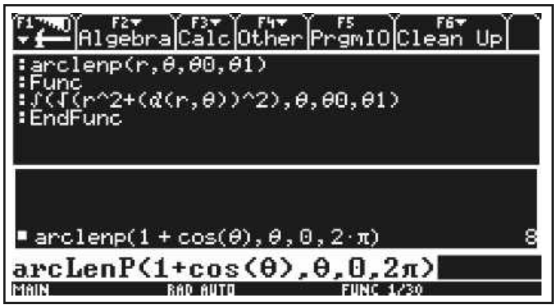
$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$$

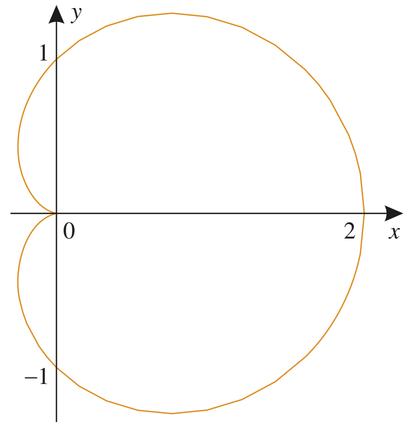
$$\rho(\theta)^2 + \rho'\,(\theta)^2 = (1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 4\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

D'où : $\quad L(-\pi, \pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2 \cos \frac{\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta = 8$

Pour s'entraîner : ex. 4, 5

Adaptons notre programme pour calculer la longueur d'un arc défini par une équation polaire :





Doc. 5 Cardioïde.

3 Courbure d'un arc de classe $\mathcal{C}^2$

3.1 • Définition

Le plan est supposé orienté. Soit $(I, \vec{f})$ un arc au moins de classe $\mathcal{C}^2$, et $s = \sigma(t)$ l'abscisse curviligne. Les fonctions $s \mapsto \varphi(s)$ et $s \mapsto \vec{T}(s)$ sont encore dérivables et :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = -\dfrac{d\varphi}{ds}\sin\varphi\,\vec{i} + \dfrac{d\varphi}{ds}\cos\varphi\,\vec{j} \\[2ex] \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\dfrac{d\varphi}{ds}\cos\varphi\,\vec{i} - \dfrac{d\varphi}{ds}\sin\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

La fonction numérique $\gamma = \dfrac{d\varphi}{ds}$ est appelée **courbure**.

On a donc :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\,\vec{N} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\,\vec{T}$$

La courbure $\gamma(s)$ en un point caractérise la vitesse de variation de la direction de la tangente. Elle est positive ou négative suivant que la tangente tourne dans le sens direct ou rétrograde.

On dit que le point $M(s)$ est **birégulier** si les vecteurs $\vec{T}$ et $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si $\gamma(s) \neq 0$. On pose alors $R(s) = \dfrac{1}{\gamma(s)}$, appelé **rayon de courbure**. Le rayon de courbure est du même signe que la courbure.

Remarque *: La courbe est assimilable au voisinage du point $M(s)$ à un arc de cercle de rayon $|R(s)|$.*

3.2 • Expression de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet

En interprétant un arc de classe C^2 comme le mouvement d'un point mobile $M(t)$, le vecteur vitesse est $\overrightarrow{V} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, la vitesse numérique : $v = \|\overrightarrow{V}\|$, le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$. On a donc :

$$\overrightarrow{V} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = v\overrightarrow{T}$$

et, en dérivant cette expression :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + v\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + v^2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}\\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + v^2\gamma\overrightarrow{N}\end{aligned}$$

En un point birégulier, $\gamma = \dfrac{1}{R}$:

$$\overrightarrow{\Gamma} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}$$

Le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T}$ est appelé **accélération tangentielle** ; il traduit les variations de la vitesse numérique sur la trajectoire. Le vecteur $\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{N}$ est appelé **accélération normale** ; il traduit les variations de la direction de la vitesse.

En particulier, le mouvement est uniforme si et seulement si l'accélération tangentielle est nulle, c'est-à-dire si les vecteurs vitesse et accélération sont orthogonaux.

3.3 • Calcul de la courbure en coordonnées cartésiennes

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si $\vec{f}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$, l'abscisse curviligne vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2}}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$ sont :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\varphi$$

D'où :

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'}$$

Dans certains cas, cette relation permet de calculer φ explicitement en fonction de t et d'en déduire $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, puis $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$.

Dans le cas général, en dérivant par rapport à t, on obtient :

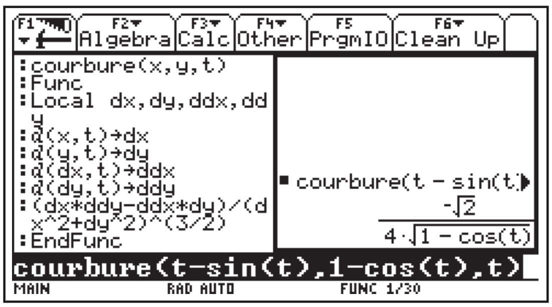
$$(1+\tan^2\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{x'y''-x''y'}{x'^2} \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2}$$

D'où l'expression de la courbure :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{Det}(\overrightarrow{f'},\overrightarrow{f''})}{\|\overrightarrow{f'}\|^3}$$

Écrivons un programme pour calculer la courbure :



Exemple : Calculons la courbure en un point régulier de la cycloïde définie par : $x(t)=t-\sin t$ et $y(t)=1-\cos t$.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

$$\tan\varphi = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \cot\frac{t}{2}$$

d'où :

$$\varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}+k\pi \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{4\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$$

Pour s'entraîner : ex. 7, 8

3.4 • Calcul de la courbure en coordonnées polaires

Soit une courbe définie par l'équation polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$.

Ici, $\varphi = \theta + V$.

D'où $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = 1 + \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}$.

De $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$, on tire :

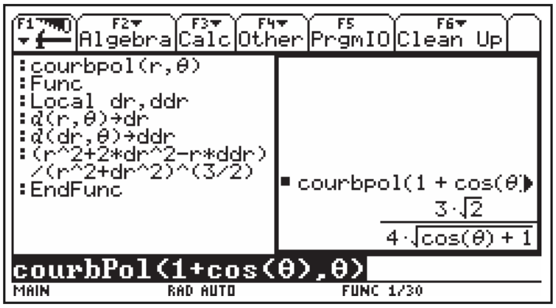
$$\left(1+\frac{\rho^2}{\rho'^2}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho'^2}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{\rho^2+\rho'^2}$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$$

$$\gamma = \frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ici encore, on peut aller plus vite si l'on peut exprimer V explicitement en fonction de θ.



Programme donnant la courbure d'un arc défini par une équation polaire.

Exemple : Calculons la courbure en un point régulier de la cardioïde définie par $\rho = 1 + \cos\theta$.

$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 + \cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}$$

d'où :

$$V = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{3}{2}\ ;$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

D'où :

$$\gamma = \frac{3}{4\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}$$

Pour s'entraîner : ex. 6

APPLICATION 1

Caractériser les courbes planes à courbure constante

Soit C un arc plan de classe C^2 de courbure constante K.

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = K \quad \Longrightarrow \quad \varphi = Ks + \varphi_0$$

Quitte à effectuer une rotation du repère, on peut choisir $\varphi_0 = 0$. On a alors :

$$\vec{T} = \vec{f}'(s) = \cos(Ks)\,\vec{\imath} + \sin(Ks)\,\vec{\jmath}$$

En intégrant encore une fois, on obtient :

- si $K \neq 0$,

$$\vec{f}(s) = \left(\frac{1}{K}\sin(Ks) + x_0\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{1}{K}\cos(Ks) + y_0\right)\vec{\jmath}$$

On reconnaît un cercle de centre (x_0, y_0) de rayon $\frac{1}{K}$.

- si $K = 0$, $\vec{f}(s) = (s + x_0)\,\vec{\imath} + y_0\,\vec{\jmath}$. C est la droite passant par le point (x_0, y_0) et dirigée par le vecteur $\vec{\imath}$ (compte tenu de la rotation du repère, on peut en fait obtenir n'importe quelle droite).

C est donc un cercle ou une droite. Réciproquement, il est clair que tout cercle ou toute droite a bien une courbure constante. On peut donc conclure que les courbes planes à courbure constante sont les cercles et les droites (il n'en est pas de même dans l'espace...)

Pour s'entraîner : ex. 9

3.5 • Cas d'un arc birégulier

Un arc de classe C^2 est dit birégulier si tous ses points sont biréguliers, c'est-à-dire si sa courbure ne s'annule pas. Montrons que dans ce cas, la fonction $s \mapsto \varphi(s)$ est un paramétrage admissible de classe C^1.

En effet, φ est de classe C^1; sa dérivée est la courbure γ, qui est continue et qui ne s'annule pas et qui par conséquent garde un signe constant. φ est donc continue et strictement monotone, donc bijective. Sa bijection réciproque est dérivable et :

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\gamma \circ \varphi^{-1}}$$

Cette dérivée est continue, donc φ^{-1} est de classe C^1.

On a, relativement à ce paramétrage :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\gamma\overrightarrow{N}}{\gamma} = \overrightarrow{N}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{-\gamma\overrightarrow{T}}{\gamma} = -\overrightarrow{T}$$

D'où :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\varphi} = \overrightarrow{N} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\varphi} = -\overrightarrow{T}$$

MÉTHODE

Pour calculer la longueur d'un arc de courbe paramétrée de classe C^1 :

- en coordonnées cartésiennes, on calcule :

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(cf. exercices 2 et 3)}$$

- en coordonnées polaires, on calcule :

$$L(\theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \textit{(cf. exercices 4 et 5)}$$

Pour calculer la courbure d'une courbe paramétrée de classe C^2 :

- en coordonnées cartésiennes, on calcule $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'}$ et on dérive par rapport à t ;

  on en déduit $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ en divisant $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ par $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ *(cf. exercices 7 et 8)* ;
- en coordonnées polaires, on calcule $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$ et on dérive par rapport à θ ;

  on en déduit $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = 1 + \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}$, puis $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ en divisant $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}$ par $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$,
  c'est-à-dire $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ *(cf. exercice 6)*.

Exercice résolu

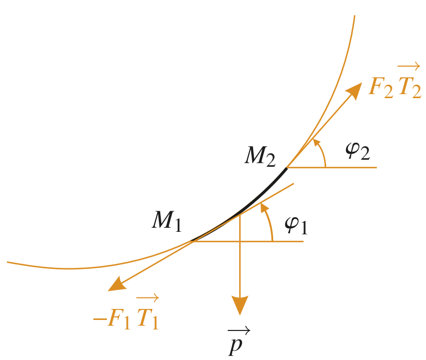
LA CHAÎNETTE

Quelle est la forme d'un fil pesant suspendu entre deux points (par exemple : corde à linge, câble électrique, etc.) ? Galilée avait supposé à tort qu'il s'agissait d'une parabole. C'est Huyghens qui rectifia cette erreur et démontra qu'il s'agissait d'une « chaînette », courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique.

On suppose le fil homogène, de masse linéique μ, et on considère qu'il est le support d'un arc régulier de classe C^2 paramétré par son abscisse curviligne s. On note φ l'angle entre l'axe horizontal et la tangente, $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent, et F la tension du fil au point M.

1. *En écrivant l'équilibre des forces s'exerçant sur un tronçon $[M_1M_2]$, démontrer que $F\cos\varphi = C^{te}$.*
2. *Montrer que le poids du tronçon de fil $[M_1M_2]$ est proportionnel à $\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1$.*
3. *En déduire l'expression de la courbure du fil en fonction de φ.*
4. *Trouver une représentation paramétrique du fil, puis une équation cartésienne. Que reconnaît-on ?*

Conseils



Le poids d'un tronçon de longueur ds est $\mu g\, ds$.

Solution

1) Le tronçon $[M_1M_2]$ du fil est en équilibre sous l'action de son poids $\vec{P}$ et des tensions aux deux extrémités $-F_1\vec{T}_1$ et $F_2\vec{T}_2$. La résultante de ces forces est donc nulle :

$$\vec{P} - F_1\vec{T}_1 + F_2\vec{T}_2 = \vec{0} \qquad (1)$$

En projetant sur l'axe horizontal, on obtient :

$$-F_1\cos\varphi_1 + F_2\cos\varphi_2 = 0,$$

c'est-à-dire : $F\cos\varphi = C$, où C est une constante.

2) En projetant l'égalité (1) sur l'axe vertical, on obtient :

$$-F_1\sin\varphi_1 + F_2\sin\varphi_2 - P = 0$$

c'est-à-dire : $-\dfrac{C}{\cos\varphi_1}\sin\varphi_1 + \dfrac{C}{\cos\varphi_2}\sin\varphi_2 - P = 0$, soit :

$$P = C(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1)$$

3) On a donc $\dfrac{P}{\varphi_2 - \varphi_1} = C\dfrac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$.

En faisant tendre φ_1 et φ_2 vers φ : $\dfrac{\mu g\, ds}{d\varphi} = \dfrac{C}{\cos^2\varphi}$.

La courbure du fil en ce point est donc :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mu g}{C}\cos^2\varphi$$

4) Un choix convenable de l'unité de longueur permet de fixer $\dfrac{\mu g}{C} = 1$.

Ne pas s'encombrer de constantes d'intégration qui correspondent au choix du repère et de l'origine des abscisses curvilignes.

En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$, on obtient : $s = \tan\varphi$ (à une constante près que l'on peut annuler en choisissant l'origine de l'abscisse curviligne).

On a donc :

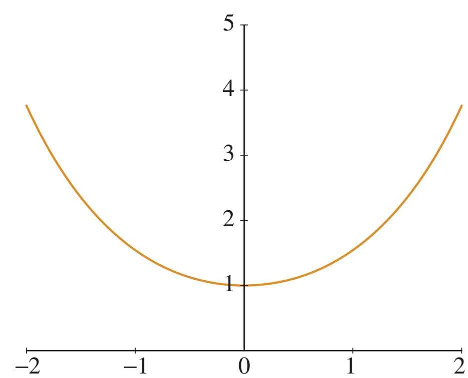
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\varphi = \dfrac{s}{\sqrt{1+s^2}} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x = \operatorname{Argsh} s \\ y = \sqrt{1+s^2} \end{cases}$$

(à des constantes près que l'on peut annuler en choisissant l'origine du repère).

On en déduit : $y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$. Il s'agit donc de la courbe représentative de la fonction ch , à une homothétie près (choix de l'origine et de l'unité de longueur).



1 Vrai ou faux ?

a) Deux arcs sont équivalents si et seulement si ils ont le même support.

b) Un paramétrage est dit normal si et seulement si la vitesse numérique est égale à 1.

c) Le repère de Frenet est orthonormal direct.

d) La courbure d'un arc plan en un point est un réel positif.

e) Le vecteur accélération est toujours orthogonal à la tangente.

f) Pour tout arc régulier de classe C^2, l'angle φ est un paramétrage admissible de classe C^1.

2 Calculer la longueur de la néphroïde représentée paramétriquement par :

$$x(t) = 3\cos t - \cos 3t \qquad y(t) = 3\sin t - \sin 3t$$

3 Calculer la longueur de l'arc d'une parabole de paramètre p, limité par la parallèle à la directrice passant par le foyer.

4 Calculer la longueur de la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \cos^2\theta$.

5 Démontrer, sans les calculer, que les longueurs des deux courbes suivantes sont égales :

1) ellipse d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 4a^2$;

2) trèfle à quatre feuilles d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = a\cos 2\theta.$$

6 Construire la courbe C d'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \cos^3\theta.$$

Calculer la courbure de C au point O.

7 Calculer la courbure en tout point de l'arc défini par :

$$x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \qquad y(t) = \sin t\cos t$$

8 On considère l'astroïde Γ définie par :

$$x(t) = \cos^3 t \qquad y(t) = \sin^3 t$$

1) Calculer la longueur de Γ.

2) Calculer le rayon de courbure $R(t)$ de Γ au point $M(t)$.

3) Déterminer les coordonnées du point :

$$I(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N(t)}$$

(appelé centre de courbure de Γ au point $M(t)$).

4) Étudier la courbe Γ' décrite par le point $I(t)$.

5) Par quelle transformation géométrique simple la courbe Γ' se déduit-elle de Γ ?

9 Déterminer les courbes planes telles qu'en tout point le rayon de courbure R et l'abscisse curviligne s sont liés par la relation $R = 1 + s^2$.

Exercices posés aux oraux des concours

10 (Centrale-Supelec 2007)

Calculer en tout point le centre de courbure d'une ellipse.
(la définition de ce point se trouve dans l'exercice 8)
Reconnaître la courbe ensemble de ces centres de courbure, appelée développée de l'ellipse.

11 (Centrale-Supelec 2007)

On considère une parabole P et un point M de P. Montrer que le rayon de courbure en M est égal au double de la longueur du segment de la normale en M à P compris entre M et la directrice de P.

12 (CCP 2007)

Calculer la longueur de la boucle de la courbe définie par la paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^2 - 1 \\ y(t) &= 3t^3 - t \end{cases}$$

13 (Mines - 2007)

Calculer la longueur de la développée de la courbe d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) &= a\,(1 + \cos^2 t)\sin t \\ y(t) &= a\,\sin^2 t\cos t \end{cases}$$

Solutions

Chapitre 1

1 **a)** Faux, ils peuvent être non réels et conjugués. **b)** Faux, $|z|^2 = z\overline{z}$. **c)** Faux, ex : $(a, b) = (i, -1)$. **d)** Vrai. **e)** Faux, $z = i(2k+1)\pi$. **f)** Faux, elle n'est pas injective. **g)** Vrai. **h)** Vrai. **i)** Vrai. **j)** Vrai.

2 **1)** Vérification immédiate. **2)** $u = \dfrac{2\text{Re}\,(z+z')}{|1+zz'|^2}$.

3 La formule se démontre par récurrence. On en déduit, en appelant $S(n)$ la somme précédente :

$$S_1 = \text{Re}\,(S(2p+1)) = (p+1)(-1)^p\ ;$$

$$S_2 = \text{Im}\,(S(2p)) = \frac{1-(2p+1)(-1)^p}{2}.$$

4 Soit A le point d'affixe 1. Le point M d'affixe z doit appartenir au cercle de centre O et à la médiatrice de $[OA]$. D'où $z \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

5 **1)** On sait que $|a+b| \leqslant |a| + |b|$; poser $a = u+v$, $b = u-v$...

2) $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + u\overline{v} + v\overline{u}$. Écrire de même $|u-v|^2$ et ajouter.

6 Soit n une somme de deux carrés. $n = a^2 + b^2 = |z|^2$ où $z = a+ib$. Si $(n_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ est une famille finie de sommes de deux carrés, $\prod_{j=1}^{p} n_j = \prod_{j=1}^{p} |z_j|^2 = \cdots$

7

$$\begin{aligned}|z| = 1 &\iff (|a|^2-1)(|b|^2-1) = 0 \quad \text{et} \quad a \neq b\\ |z| < 1 &\iff (|a| < 1 \quad \text{et} \quad |b| < 1)\\ &\qquad \text{ou} \quad (|a| > 1 \quad \text{et} \quad |b| > 1)\end{aligned}$$

8 Pour le calcul de S_1 et S_2, voir le paragraphe 4.

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$S_1 = \cos\frac{nx}{2}\,\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$S_2 = \sin\frac{nx}{2}\,\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

et si $x \in 2\pi\mathbb{Z}\cdots$

Par linéarisation, pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}S_3(x) &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\,S_1(2x)\\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\cos nx\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_4(x) &= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\,S_1(2x)\\ &= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\cos nx\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\end{aligned}$$

et si $x \in \pi\mathbb{Z}\cdots$

$S_5 + iS_6$ est la somme des termes d'une suite géométrique. En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

Si $x \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$

$$S_5 = \frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x \sin x}$$

$$S_6 = \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\cos^n x \sin x}$$

et si $x \in \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}\cdots$ $\quad S_7 + iS_8 = (1+e^{ix})^n$

d'où :

$$S_7 = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2} \quad \text{et} \quad S_8 = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$$

9 $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

d'où $z^{20} = 2^{10}e^{i\frac{35\pi}{3}} = 2^9(1-i\sqrt{3})$.

10 **1)** $\alpha \in]-\pi+4k\pi, \pi+4k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$: $|z| = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\arg z = \dfrac{\alpha}{2}\ [2\pi]$

Ne pas oublier d'envisager aussi $\alpha \in]\pi+4k\pi, 3\pi+4k\pi[$ et $\alpha = (2k+1)\pi$

2) $|z'| = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\arg z' = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\ [2\pi]$

11 **1)** Première méthode : développer et résoudre l'équation bicarrée. On obtient 4 solutions :

$$z = \pm i\sqrt{\frac{5\pm 2\sqrt{5}}{5}}$$

2) Deuxième méthode : poser $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$ ($z = 1$ est-il solution ?) et résoudre $Z^5 = 1$ ($Z \neq 1$). On obtient 4 solutions :

$$z = -i\cot\frac{k\pi}{5} \qquad k \in [\![1,4]\!]$$

3) En appariant les solutions, on obtient des valeurs de $\cot\dfrac{k\pi}{5}$.

12 Posons $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\begin{aligned}
z^3 - 1 &= (z-1)(z-j)(z-\bar{j}) \\
&= (z-1)(z^2+z+1) \\
z^3 + 1 &= (z+1)(z+j)(z+\bar{j}) \\
&= (z+1)(z^2-z+1) \\
z^4+z^2+1 &= (z-j)(z-\bar{j})(z+j)(z+\bar{j}) \\
&= (z^2+z+1)(z^2-z+1) \\
z^4-z^2+1 &= (z-ij)(z-i\bar{j})(z+ij)(z+i\bar{j}) \\
&= (z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1) \\
z^6-1 &= (z-1)(z+\bar{j})(z-j)(z+1)(z-\bar{j})(z+j) \\
&= (z-1)(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1) \\
z^6+1 &= (z+ij)(z-i)(z+i\bar{j})(z-ij)(z+i)(z-i\bar{j}) \\
&= (z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)
\end{aligned}$$

13 C'est la somme des racines 5-ièmes de l'unité : elle est nulle. D'où, comme $u^4 = \bar{u}$ et $u^3 = \overline{u^2}$:

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

Le réel $\cos\frac{2\pi}{5}$ est donc la solution positive de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$, soit $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
Le théorème de Pythagore permet de construire facilement un segment de longueur $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 1 et $\frac{1}{2}$). La construction classique du pentagone régulier est la suivante : le cercle de centre B d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point I d'affixe i coupe le demi-axe (Ox) au point C d'affixe $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (justifiez...). La médiatrice de $[OC]$ coupe donc le cercle trigonométrique aux points d'arguments $\pm\frac{2\pi}{5}$.

14 **1)** Vérifiez que $S = \overline{T}$ et :

$$\operatorname{Im} S = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sin\frac{8\pi}{7} > 0$$

2) $S + T = -1$ et $ST = 2$, donc S et T sont les solutions de l'équation du second degré...

15 **1)** $S = \{1, -1+2i\}$. **2)** $S = \{i, -1-i\}$. **3)** $\{2^\theta e^{i\theta}, 2^\theta e^{-i\theta}\}$. **4)** $S = \left\{\frac{2+3i\cos\theta}{\sin\theta}, \frac{2-3i\cos\theta}{\sin\theta}\right\}$. **5)** $S = \left\{\frac{e^{i\theta}}{2\sin\theta}, \frac{e^{-i\theta}}{2\sin\theta}\right\}$. **6)** $S = \{e^{i\theta}+1, e^{i\theta}-1\}$ $= \left\{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}, 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}\right\}$. **7)** $S = \{i, 1+i, 1-i\}$.
8) Une racine réelle doit vérifier :

$$\begin{cases} 2z^2 - 5z + 3 = 0 \\ 4z^3 + 6z^2 - 4z - 21 = 0 \end{cases}$$

d'où $\quad S = \left\{\frac{3}{2}, -2+\frac{3}{2}i, -1-i\right\}$.

9) S'il y a une racine imaginaire $z = iy$, elle doit vérifier :

$$\begin{cases} 5y^2 + 11y + 2 = 0 \\ -y^3 - 3y^2 + 6y + 16 = 0 \end{cases}$$

d'où $S = \{-2i, 2+i, 3-2i\}$.

16 $S = \{2e^{i\frac{\pi}{12}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{17\pi}{12}}\}$

17 Écrire $16(1-i) = (2\sqrt{2})^3 e^{-i\frac{\pi}{4}}$, d'où ses racines cubiques...
C est le cercle de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
Les solutions de cette équation sont de la forme z_λ, leurs images appartiennent donc au cercle C.

18 $(z^2+1)^n = (z+i)^n(z-i)^n$

$z = i$ ou si $n \geqslant 2$ $\; z = i\dfrac{e^{2ik\pi/n}+1}{e^{2ik\pi/n}-1} = \cot\dfrac{k\pi}{n}$

avec $k \in [\![1, n-1]\!]$

19 Montrer successivement :

$$z'\overline{z'} = 1; \quad \frac{z'-1}{z-1} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right);$$

$$\frac{z'+1}{z-1} = 2i\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

M' est alors à l'intersection de la droite (MA) et du cercle de centre O de rayon 1.

20 Le point M d'affixe $z = x+iy$ est tel que $x^2 - x + y^2 - y = 0$, donc M décrit le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. M' est l'image de M par la rotation de centre O d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

21 Soit A, I, M les points d'affixes respectives $1, i, z$. La condition équivaut à $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AM}$ et $M \neq I$, M décrit donc le cercle de diamètre $[AI]$ privé de I.

22 (ABC) est équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j$ ou $e^{i\frac{\pi}{3}} = -\bar{j}$, ce qui équivaut à $(aj^2+bj+c = 0$ ou $a\bar{j}^2 + b\bar{j} + c = 0)$, ou encore à $(aj^2+bj+c)(a\bar{j}^2+b\bar{j}+c=0)$, soit, en développant...

23 $c - b = \pm i(a-b)$ et $d - a = \pm i(b-a)$. Si a et b appartiennent à l'ensemble des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, il en est de même de c et d.
Au contraire, si (ABC) est un triangle équilatéral, $b-a = -j(c-a)$ ou $b-a = -\bar{j}(c-a)$ ce qui interdit aux trois complexes a, b et c d'avoir simultanément des parties réelles et imaginaires entières (à moins d'avoir $a = b = c$), car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Chapitre 2

1 **a)** Faux : il faut que $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. **b)** Vrai. **c)** Vrai (dériver sur $]-1,1[$ et prolonger en -1 et 1. **d)** Faux : elle n'est pas dérivable en -1 et 1. **e)** Vrai. **f)** Vrai. **g)** Vrai. **h)** Faux : la restriction de ch à $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty[$. **i)** Vrai.

2 **a)** $\{1,4\}$ **b)** $\{0, \log_2 3\}$

c) $\left\{a, \frac{1}{a}\right\}$ **d)** $\left\{2^{\frac{1}{\log_3 2 - 1}}\right\}$

e) $\{\log_{\frac{2}{3}} \frac{3^{n+1}-1}{2(2^{n+1}-1)}\}$.

(Reconnaître des sommes géométriques)

3 $\log_{10} 2 = \frac{p}{q} \iff 2 = 10^{\frac{p}{q}} \iff 2^q = 10^p$.

Comme $p \neq 0$, 10^p est divisible par 5, alors que que 2^q ne l'est pas.

4 On calcule $\sum_{k=0}^{n} e^{a+kb}$ (s'inspirer du §4.4 du chapitre *Nombres Complexes*).

On en déduit :

$$\text{si} \quad b \neq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb) = e^a \operatorname{ch}\frac{nb}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)b}{2}}{\operatorname{sh}\frac{b}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb) = e^a \operatorname{sh}\frac{nb}{2} \frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)b}{2}}{\operatorname{sh}\frac{b}{2}}$$

Ne pas oublier de traiter le cas $b = 0$...

5 $\forall x \in [1,+\infty[\ \operatorname{ch}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) = x$

et $\operatorname{sh}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) = \sqrt{x^2-1}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) = \sqrt{x^2+1}$$

et $\operatorname{sh}(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) = x$

6 **a)** $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^4 x}$

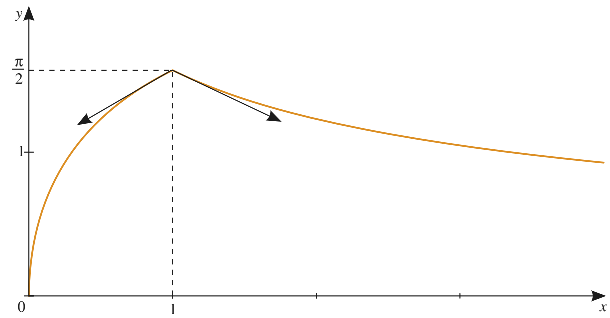
b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}$

c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$

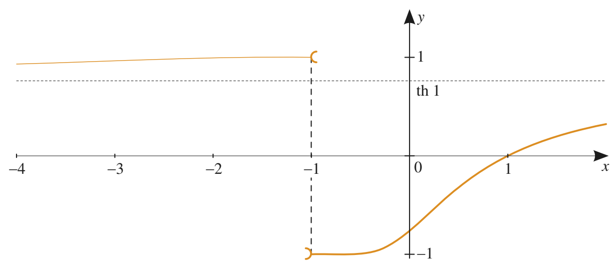
7 Signalons seulement les points délicats :

a) $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$: demi-tangente verticale à l'origine.

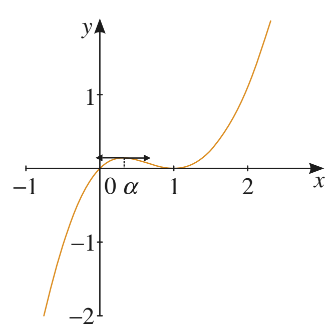


$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to 1+} f'(x) = -\frac{1}{2}$: point anguleux en $(1, \frac{\pi}{2})$

b) $\lim_{x\to -1-} f(x) = 1$; $\lim_{x\to -1+} f(x) = -1$: discontinuité en -1.

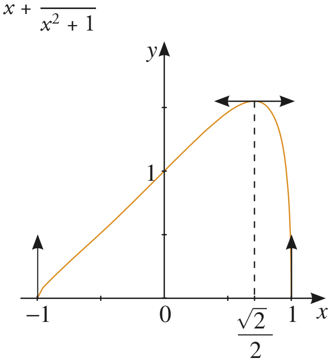


$\lim_{x\to -1-} f'(x) = 0$; $\lim_{x\to -1+} f'(x) = 0$: demi-tangentes horizontales.



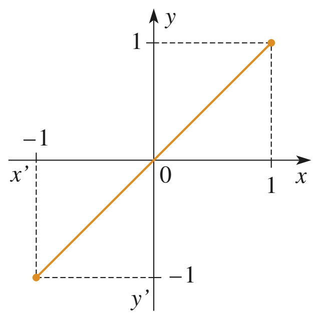
c) Pour trouver le signe de f', on étudie les variations de la fonction g :

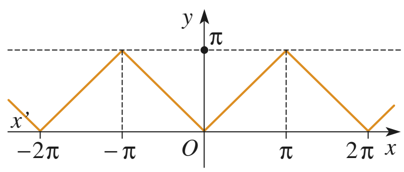
$x \mapsto 2\operatorname{Arctan} x + \frac{x-1}{x^2+1}$



d) f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ mais pas en -1 et 1.

8 f est définie sur $[-1,1]$ et : $\forall x \in [-1,1] \quad f(x) = x$
g est 2π-périodique, paire et $\forall x \in [0,\pi] \quad g(x) = x$
D'où les courbes :





9 Supposons que $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \neq \pm\frac{\pi}{2}$
On vérifie que :

$$\tan(\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y) = \frac{x+y}{1-xy}$$

D'où :

$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Comme $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \in]-\pi,\pi[$, l'entier k peut prendre les valeurs -1, 0 ou 1.

- si $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[, \quad k=-1$.
  Dans ce cas, $\frac{x+y}{1-xy} > 0$ et $x+y<0$,
  d'où $1-xy<0$
- si $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \in]-\frac{\pi}{2}, 0[, \quad k=0$.
  Dans ce cas, $\frac{x+y}{1-xy} < 0$ et $x+y<0$,
  d'où $1-xy>0$
- si $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \in [0, \frac{\pi}{2}[, \quad k=0$.
  Dans ce cas, $\frac{x+y}{1-xy} \geqslant 0$ et $x+y \geqslant 0$,
  d'où $1-xy>0$
- si $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, \quad k=1$.
  Dans ce cas, $\frac{x+y}{1-xy} < 0$ et $x+y>0$,
  d'où $1-xy<0$

D'autre part, $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = +\frac{\pi}{2}$ équivaut à

$$1-xy=0 \text{ et } x+y>0$$

$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = -\frac{\pi}{2}$ équivaut à

$$1-xy=0 \text{ et } x+y<0$$

En définitive :

- Si $1-xy>0$,
$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy}$$
- Si $1-xy=0$ et $x+y>0$,
$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = +\frac{\pi}{2}$$
- Si $1-xy=0$ et $x+y<0$,
$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = -\frac{\pi}{2}$$
- Si $1-xy<0$ et $x+y<0$,
$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy} - \pi$$
- Si $1-xy<0$ et $x+y>0$,
$$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y = \text{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy} + \pi$$

10 Ne pas oublier de chercher les ensembles de définition...

$$\cos(\text{Arctan}\, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ ;$$

$$\sin(\text{Arctan}\, x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;$$

$$\tan(2\text{Arctan}\, x) = \frac{2x}{1-x^2}\ ;$$

$$\cos(4\text{Arctan}\, x) = \frac{x^4-6x^2+1}{(x^2+1)^2}\ ;$$

$$\tan(\text{Arcsin}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

$$\tan(\text{Arccos}\, x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ;$$

$$\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} 2\text{Arctan}\, x & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ \pi - 2\text{Arctan}\, x & \text{si } x \geqslant 1 \\ -\pi - 2\text{Arctan}\, x & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}.$$

11 Montrer que les deux réels $\frac{\pi}{4} + \text{Arctan}\,\frac{1}{239}$ et $4\text{Arctan}\,\frac{1}{5}$ ont la même tangente et appartiennent à $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

12 **a)** $D_f = \mathbb{R}_-$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}$

$\lim_{x \to 0-} f'(x) = +\infty$: f n'est pas dérivable en 0.

b) $\forall x \in]-\sin 1, \sin 1[$

$$f'(x) = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - \text{Arcsin } x)^{-\frac{1}{2}}(1 + \text{Arcsin } x)^{-\frac{3}{2}}$$

f est-elle dérivable en sin 1 ?

c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{-2x}{1 + (1+x^2)^2}$

d) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad f'(x) = -\dfrac{\cos x}{2|\cos x|}$

f est-elle dérivable en $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$?

13 **1)** Vérifier que

$$\text{Arctan } (p+1) - \text{Arctan } (p) \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

et que

$$\tan[\text{Arctan } (p+1) - \text{Arctan } (p)] = \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

2)

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \text{Arctan } (p+1) - \sum_{p=0}^{n} \text{Arctan } (p) = \text{Arctan } (n+1).$$

Donc (S_n) converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

14 On sait que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$\cos(\text{Arccos } x) = x$, $\quad \sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$,

$\sin(\text{Arcsin } x) = x$, $\quad \sin(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1-x^2}$

D'où : $\quad \forall x \in [-1, 1] \quad f(x) = 2x\sqrt{1-x^2} - 1 + 2x^2$

Chapitre 3

1 **a)** Vrai. **b)** Vrai. **c)** Faux. **d)** Vrai. **e)** Faux, elle donne une solution approchée. **f)** Faux, les solutions réelles sont des combinaisons linéaires de $e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $e^{\alpha x} \sin \beta x$ où $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont les racines complexes de l'équation caractéristique. **g)** Faux, la condition initiale doit comporter également la valeur $y'(0)$.

2 **a)** $y = \sin x + \lambda e^{-x}$; **b)** $y = \text{ch}\, x + \lambda e^{x^2}$; **c)** $y = 2(\cos x + 1) + \lambda e^{\cos x}$

3 **a)** Sur $I_k =]\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$, $y = x + \lambda_k \cos x$.

Au point critique $c_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, il y a recollement si et seulement si $\lambda_{k-1} = \lambda_k$.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_0 \neq c_k$, une solution unique sur $\mathbb{R}$. Si $x_0 = c_k$, il y a une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ pour $y_0 = x_0$ et aucune dans le cas contraire.

b) Soit $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$. Sur I_k, les solutions sont

$$y = e^x + \lambda_k e^{-\frac{1}{x}}$$

Le recollement n'est possible que pour $\lambda_1 = 0$ (λ_2 est quelconque).

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_0 < 0$, il existe une solution unique sur I_1, qui se prolonge en une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ dans le cas où $y_0 = e^{x_0}$, et en aucune dans le cas contraire. Si $x_0 > 0$, il y a toujours une solution unique sur $\mathbb{R}$. Si $x_0 = 0$, il y a une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ pour $y_0 = 1$ et aucune dans le cas contraire.

c) Soit $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$. Sur I_k, les solutions sont

$$y = x^3 + \lambda_k x^2$$

On peut recoller une solution quelconque sur I_1 avec une solution quelconque sur I_2.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_0 \neq 0$, il y a une solution unique sur l'intervalle I_k contenant x_0, qui se prolonge d'une infinité de façons sur l'autre intervalle. Si $x_0 = 0$, il y a une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$ pour $y_0 = 0$ et aucune dans le cas contraire.

d) Soit $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$. Sur I_k, les solutions sont

$$y = \text{Arctan } x - \frac{1}{2x} \ln(x^2 + 1) + \frac{\lambda_k}{x}$$

Le seul recollement possible est obtenu pour

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_0 \neq 0$, il y a une solution unique sur l'intervalle I_k contenant x_0, qui se prolonge en une solution unique sur $\mathbb{R}$ dans le cas où $y_0 = \text{Arctan } x_0 - \dfrac{1}{2x_0} \ln(x_0^2 + 1)$, et en aucune dans le cas contraire. Si $x_0 = 0$, il y a une solution unique sur $\mathbb{R}$ pour $y_0 = 0$ et aucune dans le cas contraire.

e) Sur $I_k =]\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$, $y = e^{\tan x}(\tan x + \lambda_k)$.

Aucun recollement n'est possible.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, il y a une solution unique sur l'intervalle I_k contenant x_0. Si $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, il y a une infinité de solutions sur $]\dfrac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi]$ pour $y_0 = 0$ et aucune dans le cas contraire.

4 On résout sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont : $y = x - 2 + \lambda(x+1)e^{-x}$. La solution vérifiant la condition initiale est obtenue pour $\lambda = e$.

5 L'ensemble des solutions est :

$$y = e^{\frac{1}{x}} \left(\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\, dt + C \right)$$

On remarque que :

$$\forall x > 0 \quad \left| \int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\, dt \right| \leqslant x e^{-\frac{1}{x}},$$

d'où

$$\lim_{x \to 0_+} e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\, dt = 0.$$

Comme $\lim_{x \to 0_+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, les solutions telles que $C \neq 0$ admettent une limite infinie en $0+$. Seule la solution correspondant à $C = 0$ se prolonge par continuité en 0_+.

6 On se place sur l'un des trois intervalles :

$$I_1 =]-\infty, 0[\,; \quad I_2 =]0, 1[\,; \quad I_3 =]1, +\infty[$$

– Résolution de l'équation sans second membre,

$$y' = \frac{3x-1}{x(x-1)}y$$

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

D'où :

$$y = C\,x(x-1)^2 \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

– Solution particulière :

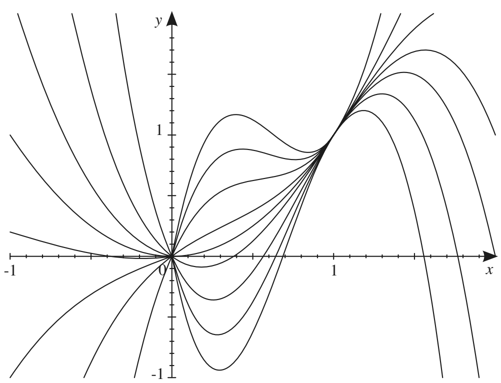
$$y = x^2.$$

– Solution générale sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3 :

$$y = x^2 + C\,x(x-1)^2$$

où $C = C_1$ sur I_1, $C = C_2$ sur I_2, $C = C_3$ sur I_3.
Étudions les raccordements possibles de solutions en 0 et 1 :

- En 0, toutes les solutions sur I_1 ou I_2 vérifient $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. On peut donc les prolonger par continuité en 0, on obtient des fonctions continues sur $]-\infty, 1[$. Pour que ces prolongements soient encore solutions de l'équation différentielle, il faut qu'ils soient dérivables en 0. Comme les solutions obtenues vérifient $\lim\limits_{x\to 0-} y'(x) = C_1$ et $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = C_2$, on a bien la dérivabilité en 0 à condition de choisir $C_1 = C_2$. Toute solution sur I_1 se prolonge donc de façon unique sur I_2 et vice versa.



- En 1, toutes les solutions sur I_2 ou I_3 vérifient $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = 1$. On peut donc les prolonger par continuité en 1. De plus, $\lim\limits_{x\to 1} y'(x) = 2$: ces prolongements continus sont dérivables en 1. On obtient des fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, et ceci quelles que soient les constantes C_2 et C_3. On peut raccorder n'importe quelle solution sur $]-\infty, 1[$ avec n'importe quelle solution sur $[1, +\infty[$...

7 **a)** $y = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{7}{81} - \dfrac{7}{81}\cos 3x$

b) $y = -\left(\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}\right)e^x + \dfrac{2}{e}e^{2x}$

c) $y = \left(\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{2} + 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$

d) $y = \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)e^x \cos x$

8 Les fonctions cherchées sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, donc de la forme $y = \lambda \sin x + \mu \cos x$. Réciproquement, une telle fonction convient si et seulement si $\lambda = \mu$. L'ensemble cherché est donc l'ensemble des fonctions de la forme $f(x) = \lambda(\sin x + \cos x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

9 **1)** Si $a^2 > 1$,

$$y = \frac{e^x}{2(1-a)} + e^{ax}\left(\lambda e^{\sqrt{a^2-1}x} + \mu e^{-\sqrt{a^2-1}x}\right).$$

2) Si $a^2 < 1$,

$$y = \frac{e^x}{2(1-a)} + e^{ax}\left(\lambda\cos(\sqrt{1-a^2}x) + \mu\sin(\sqrt{1-a^2}x)\right).$$

3) Si $a = -1$,

$$y = \frac{1}{4}e^x + (\lambda x + \mu)e^{-x}.$$

4) Si $a = 1$,

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)e^x.$$

10 Ce déterminant vaut :

$$D = -\frac{1}{2}(y + y' + y'')\left((y-y')^2 + (y'-y'')^2 + (y''-y)^2\right).$$

L'équation est équivalente à :

$$y + y' + y'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = y' = y''$$

Les solutions de $y + y' + y'' = 0$ sont :

$$y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\ ;$$

les solutions de $y = y' = y''$ sont : $y(x) = C\,e^x$.

Supposons qu'il existe deux intervalles $]a, b[$ et $]b, c[$ tels que $y = y' = y''$ sur l'un et $y + y' + y'' = 0$ sur l'autre. Alors, par continuité : $y(b) = y'(b) = y''(b) = 0$. Il s'agit d'une condition initiale telle que la seule solution soit la fonction nulle sur $]a, c[$ tout entier, et cette solution fait partie des deux familles trouvées. Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

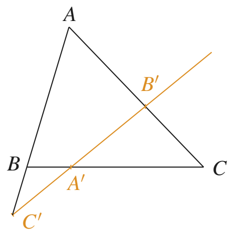
$$y(x) = C\,e^x \quad \text{ou} \quad y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Chapitre 4

1 **a)** Vrai. **b)** Faux : on peut avoir aussi $r = -OM$. **c)** Faux : c'est un cercle. **d)** Vrai. **e)** Vrai. **f)** Faux, si la droite est parallèle à l'axe Oy. **g)** Vrai.

2 **1)** Utilisons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Posons :

$$\alpha = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \qquad \beta = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \qquad \gamma = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}},$$



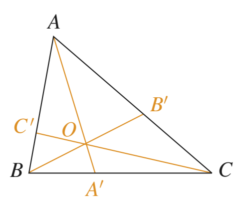
c'est-à-dire que A' est le barycentre de $(B, 1), (C, -\alpha)$, B' est le barycentre de $(C, 1), (A, -\beta)$ et C' est le barycentre de $(A, 1), (B, -\gamma)$. On peut en déduire les coordonnées de A', B', C', ainsi que celles des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$. On calcule alors le déterminant de ces deux vecteurs dans la base $b = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; on obtient :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1 - \alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

Les points A', B' et C' sont donc alignés si et seulement si $\alpha\beta\gamma = 1$.

2) On peut utiliser la même méthode, ou bien se ramener au résultat précédent :

– Supposons que les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en un point O.



Appliquons le théorème de Ménélaüs dans le triangle (ABA') coupé par la droite (CC'), puis dans le triangle $(AA'C)$ coupé par la droite (BB') :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = 1 \qquad \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = 1$$

En divisant membre à membre ces deux relations, on obtient :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \qquad (1)$$

– Pour la réciproque, on peut procéder par « fausse position » : on suppose que A', B' et C' vérifient la relation (1) et on désigne par C'' le point de (AB) tel que la droite (CC'') concoure avec (AA') et (BB').

Les points A', B' et C'' vérifient aussi la relation (1).

On en déduit que :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$$

D'où $C' = C''$, par unicité du barycentre.

3 Utiliser le barycentre G du système $(A, 1), (B, 1), (C, -1)$. L'ensemble cherché est le cercle de centre G passant par A et B.

4 Remplacer $\overrightarrow{MB}$ par $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC}$ par $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$. On obtient une équation de la forme $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{V} = C^{te}$, où le vecteur $\overrightarrow{V}$ est non nul (expliquer pourquoi) ; il s'agit donc d'une droite.

Le point O, centre du cercle circonscrit à ABC, vérifie :

$OA = OB = OC = R$, d'où l'égalité.

Pour le point G, isobarycentre de A, B, C, calculer les distances GA, GB et GC en utilisant le théorème de la médiane (rappel : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$), puis vérifier l'égalité.

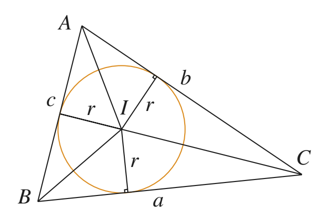
E est la droite (OG), qui contient aussi l'orthocentre H du triangle ABC, qui est l'image de O par l'homothétie de centre G de rapport -2.

5 **1)** De $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, on tire :

$$\beta \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\right) + \gamma \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC}\right) = 0$$

Or, l'aire du triangle GAB est $\dfrac{1}{2}\left|\operatorname{Det}(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})\right|$; on en déduit que les aires des triangles GAB et GCA sont proportionnelles à γ et β. On généralise par permutation circulaire.

2) Soit I le centre du cercle inscrit et r le rayon de ce cercle.



Les aires des triangles IBC, ICA et IAB sont :

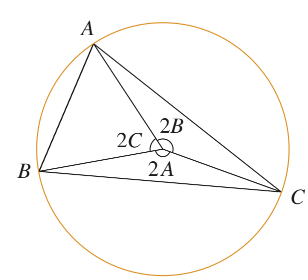
$$\frac{1}{2}ra, \frac{1}{2}rb, \frac{1}{2}rc.$$

I est donc le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$. Comme

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

on peut aussi donner : $(A, \sin A), (B, \sin B), (C, \sin C)$.

3) Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC et R le rayon de ce cercle.



Les aires des triangles OBC, OCA et OAB sont $\dfrac{1}{2}R^2 \sin 2A$, $\dfrac{1}{2}R^2 \sin 2B$, $\dfrac{1}{2}R^2 \sin 2C$. O est donc le barycentre de $(A, \sin 2A)$, $(B, \sin 2B)$, $(C, \sin 2C)$.

6 On peut obtenir une équation de la hauteur issue du point d'intersection des deux premiers côtés en effectuant une combinaison linéaire des équations de ces côtés :

$$\lambda_1(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1) + \lambda_2(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2) = 0$$

Déterminons un couple (λ_1, λ_2) tel que cette droite soit orthogonale au troisième côté :

$$(\lambda_1\cos\alpha_1 + \lambda_2\cos\alpha_2)\cos\alpha_3 + (\lambda_1\sin\alpha_1 + \lambda_2\sin\alpha_2)\sin\alpha_3 = 0$$

On peut choisir :

$$\lambda_1 = \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \quad \text{et} \quad \lambda_1 = -\cos(\alpha_1 - \alpha_3).$$

On obtient ainsi des équations des trois hauteurs. Effectuer la somme des trois équations trouvées...

7 C'est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$|x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1| = |x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2|$$

Or $|A| = |B| \iff A = \pm B$. On obtient deux équations, qui représentent en général deux droites ; montrer qu'elles sont orthogonales (ce sont les bissectrices de D_1 et D_2). Examiner le cas où les droites D_1 et D_2 sont parallèles, c'est-à-dire $\alpha_1 = \alpha_2 + k\pi$.

8 Les équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 1 \end{cases}$$

1) En retranchant membre à membre on obtient $2y - 2x = -1$, qui est l'équation de la droite (AB).
2) Une combinaison linéaire des deux équations, de la forme :

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2x) + \mu(x^2 + y^2 - 2y - 1) = 0$$

avec $\lambda + \mu \neq 0$, est l'équation d'un cercle passant par A et B. On peut choisir λ et μ pour que ce cercle passe par un point donné quelconque, non aligné avec A et B ; on peut obtenir ainsi n'importe quel cercle passant par A et B.
3) Le cercle circonscrit à $AB\Omega'$ est obtenu pour $\lambda - 2\mu = 0$; on peut choisir par exemple $\lambda = 2$ et $\mu = 1$, ce qui donne : $3x^2 + 3y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$.

9 **1)** H et H' appartiennent au cercle de diamètre $[BC]$.
2) En comparant les angles $\widehat{H'HB}$ et $\widehat{H'CB}$ d'une part, $\widehat{HH'C}$ et $\widehat{HBC}$ d'autre part, montrer que $\widehat{AHH'} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{AH'H} = \widehat{ACB}$.

10 On obtient :

$$x_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}\left((a^2 - b^2)x_0 - 2aby_0 + 2ab^2\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(-2abx_0 - (a^2 - b^2)y_0 + 2a^2b\right)$$

La condition d'alignement des points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_0, -y_0)$, $M_3(-x_0, y_0)$ donne :

$$x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - by_0 = 0$$

Γ est le cercle circonscrit au triangle OAB, où A et B sont les points d'intersection de Δ avec les axes.

Chapitre 5

1 **a)** Faux, elle peut avoir des points stationnaires. **b)** Vrai. **c)** Faux, elle peut avoir une tangente, il faut étudier si le quotient $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ admet une limite quand t tend vers t_0. **d)** Faux, $\rho(\theta)$ peut être négatif. **e)** Vrai. **f)** Faux ; ex : $\rho = \cos\theta$.

2 M est un point double si et seulement si :

$$\exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad t_1 \neq t_2 \quad x(t_1) = x(t_2) \quad \text{et} \quad y(t_1) = y(t_2).$$

On obtient :

$$t_1 + t_2 = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad t_1 t_2 = -\frac{1}{3}$$

d'où :

$$\{t_1, t_2\} = \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}.$$

On vérifie que :

$$M(-1) = M\left(\frac{1}{3}\right) = (-1, 2).$$

Les deux tangentes correspondantes sont dirigées par les vecteurs :

$$\frac{1}{4}\vec{f}'(-1) = (1, -1) \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}\vec{f}'\left(\frac{1}{3}\right) = (1, 3).$$

3 On cherche t_1 et t_2 distincts tels que :
- $\operatorname{Det}(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{f}'(t_1)) = 0 \iff t_1^2 + t_1t_2 - 2t_2^2 = 0.$
- $(\vec{f}'(t_1) \,|\, \vec{f}'(t_2)) = 0 \iff 1 + t_1t_2 = 0.$

D'où :

$$(t_1, t_2) = \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad (t_1, t_2) = \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4 Les points $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) \\ y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui équivaut à :

$$(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\left(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2t_3 + 1\right) = 0.$$

La condition d'alignement de trois points de paramètres distincts est donc :

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2t_3 + 1 = 0.$$

Cette relation va nous permettre de rechercher un point double : si $M(t_1) = M(t_2)$, cette condition doit être vérifiée quel que soit t_3 :

$$\forall t_3 \in \mathbb{R}$$

$$t_3(t_1 + t_2 + t_1t_2) + t_1t_2 + 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + t_1t_2 = 0 \\ t_1t_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

D'où :

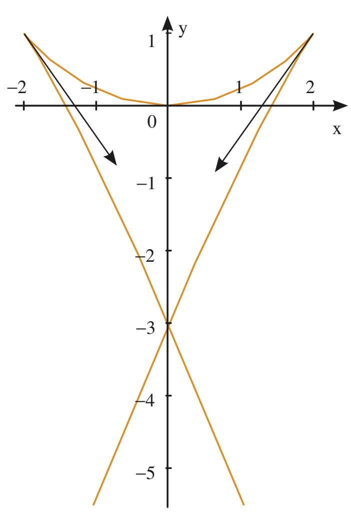
$$\{t_1, t_2\} = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

On vérifie bien que :

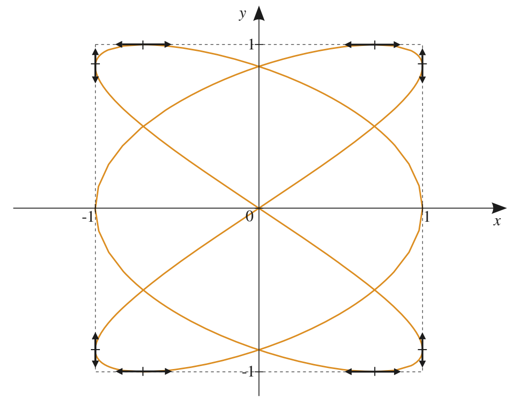
$$M\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = M\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = (1, 2).$$

Un point d'inflexion est le cas limite de trois points alignés qui viennent se confondre en un seul. Si, dans la condition d'alignement, on fait tendre t_1, t_2 et t_3 vers t_0, on obtient : $t_0^3 + 3t_0^2 + 1 = 0$. En étudiant les variations de la fonction $t \mapsto t^3 + 3t^2 + 1$, vous montrerez qu'elle s'annule pour une unique valeur t_0, qui appartient à $[-3, 2 , -3]$.

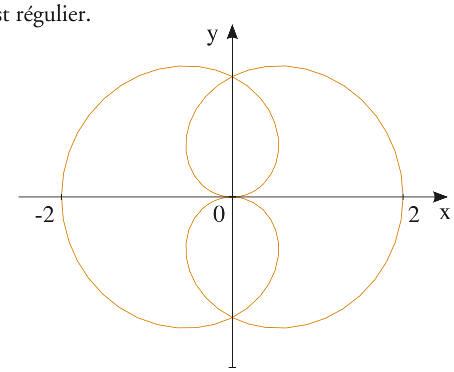
5 **a)** $D_f = \mathbb{R}$; symétrie $/Oy$; étude sur $\mathbb{R}_+$. Point stationnaire en $t = 1$: rebroussement de première espèce, la tangente est dirigée par $\vec{f}''(1) = (-6, -8)$.
Au voisinage de $+\infty$, branche parabolique de direction Oy.



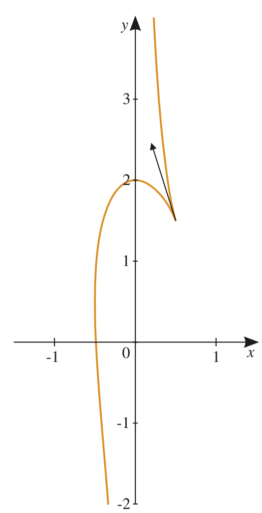
b) (Courbe de Lissajous) $D_f = \mathbb{R}$; $T = 2\pi$; symétries $/Ox$ et $/O$; étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. L'arc est régulier.



c) $D_f = \mathbb{R}$; $T = 2\pi$; symétries $/Ox$ et $/Oy$; étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. L'arc est régulier.



d) $D_f = \mathbb{R}$; pas de symétrie. Point stationnaire en $t = 1$: rebroussement de première espèce, la tangente est dirigée par $2\vec{f}''(1) = (-1, 3)$. Au voisinage de $\pm\infty$, asymptote $x = 0$.

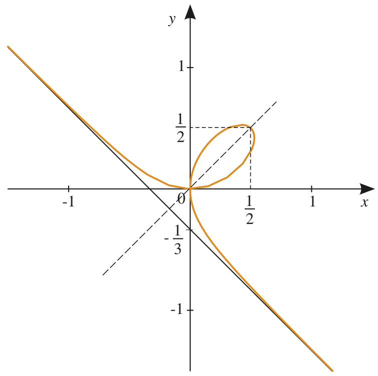


e) (Folium de Descartes) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; pas de symétrie ? Si, mais elle est bien cachée :

$$\forall t \in D_f\backslash\{0\} \quad \frac{1}{t} \in D_f \quad x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t)$$

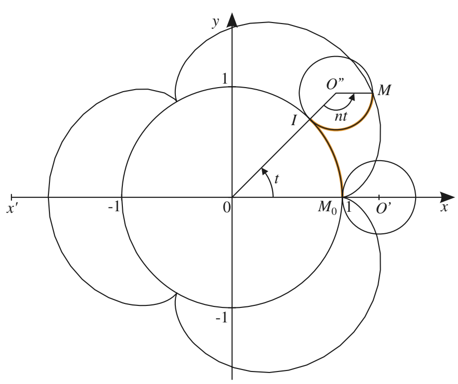
et $y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$

La courbe, privée du point O, est symétrique par rapport à la première bissectrice. Il suffit de faire l'étude sur l'intervalle $]-1, 1]$.
Au voisinage de -1, asymptote oblique d'équation $y = -x - \dfrac{1}{3}$.
La courbe est au-dessus de l'asymptote.



f) (Courbe du bicorne) $D_f = \mathbb{R}$; $T = 2\pi$; symétrie $/Oy$; étude sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Point stationnaire en $t = 0$: rebroussement de première espèce, la tangente est dirigée par le vecteur $(-1, 1)$.

6 La condition de roulement sans glissement se traduit par l'égalité des longueurs des arcs $\widehat{IM_0}$ du cercle fixe et $\widehat{IM}$ du cercle mobile. D'où $(\overrightarrow{O''I}, \overrightarrow{O''M}) = nt$.



Les coordonnées de M sont donc :

$$\begin{cases} x(t) = \left(R + \dfrac{R}{n}\right)\cos t + \dfrac{R}{n}\cos(t + \pi + nt) \\ \quad\;\; = \dfrac{R}{n}\big((n+1)\cos t - \cos(n+1)t\big) \\ y(t) = \left(R + \dfrac{R}{n}\right)\sin t + \dfrac{R}{n}\sin(t + \pi + nt) \\ \quad\;\; = \dfrac{R}{n}\big((n+1)\sin t - \sin(n+1)t\big) \end{cases}$$

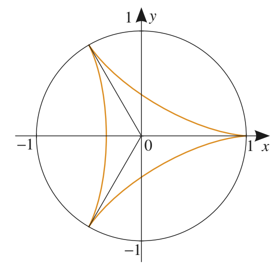
$n = 1$; $T = 2\pi$; symétrie $/Ox$; étude sur $[0, \pi]$. Point stationnaire pour $t = 0$: rebroussement de première espèce à tangente horizontale.

$n = 2$; $T = 2\pi$; symétries $/Ox$ et $/Oy$; étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Point stationnaire pour $t = 0$: rebroussement de première espèce à tangente horizontale.

7 La même étude conduit à :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{R}{n}\big((n-1)\cos t + \cos(n-1)t\big) \\ y(t) = \dfrac{R}{n}\big((n-1)\sin t - \sin(n-1)t\big) \end{cases}$$

$n = 2$; c'est le segment $[-R, R]$ sur l'axe Ox.
$n = 3$; $T = 2\pi$; symétrie $/Ox$; étude sur $[0, \pi]$. Points stationnaires pour $t = 0$ et $t = \dfrac{2\pi}{3}$: rebroussements de première espèce, la tangente passe par l'origine.



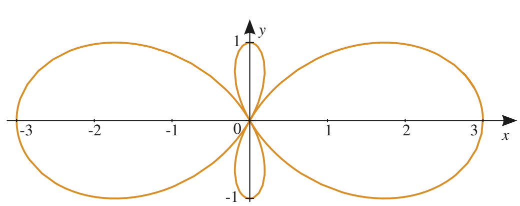
8 **a)** Période π pour la fonction ρ : symétrie par rapport à l'origine. La courbe paramétrée est entièrement décrite sur un intervalle d'amplitude 2π.
$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$: symétrie par rapport à Ox ; étude sur :

$$\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	‖ 3	+	0	−	−1

Au voisinage de 0, prolongement par continuité :

$$\rho(0) = 3$$

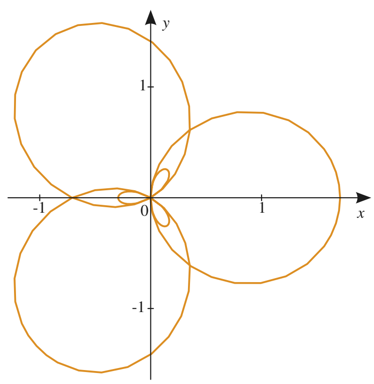


b) Période $\dfrac{4\pi}{3}$ pour la fonction ρ : la courbe est invariante par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ (la période de la courbe paramétrée est 4π).

$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$: symétrie par rapport à Ox ; étude sur :

$$\left[0, \frac{2\pi}{3}\right].$$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
ρ	$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$	$+$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+$	0	$-$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

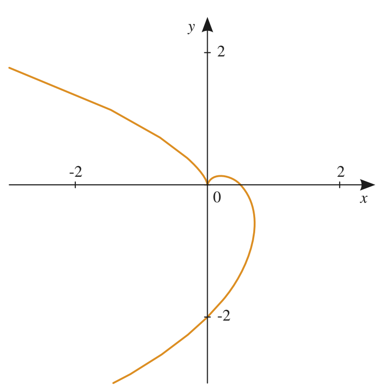


c) $\rho(\theta) = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

Il s'agit du cercle de centre $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $D = \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

période 2π pour ρ comme pour la courbe ; étude sur $]-\pi, \pi[$. La fonction ρ est partout positive, et s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.



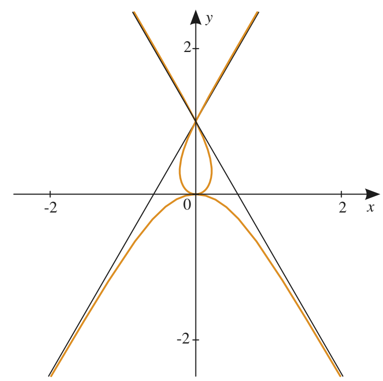
Quand θ tend vers π, $\rho(\theta)\sin(\theta - \pi)$ tend vers l'infini : branche parabolique de direction $\vec{u}(\pi)$.

e) $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; période 2π pour ρ comme pour la courbe ;

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: symétrie par rapport à Oy ; étude sur

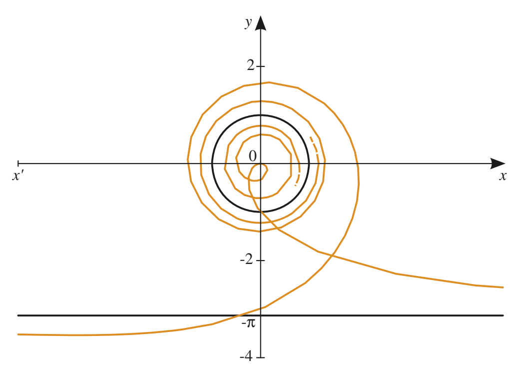
$$[0, \pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π
ρ	0	$-$	$\Vert$	$+$	0



f) $D = \mathbb{R}\backslash\{\pi\}$; pas de période ni de symétrie.

θ	$-\infty$		0		π		$+\infty$
ρ		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	



Quand θ tend vers $\pm\infty$, ρ tend vers 1 : il y a un cercle asymptote de centre O de rayon 1.

Quand θ tend vers π, $\rho(\theta)\sin(\theta - \pi)$ tend vers π : il y a une asymptote d'équation $Y = \pi$ dans le repère $\left(\vec{u}(\pi), \vec{v}(\pi)\right)$, c'est-à-dire $y = -\pi$ dans le repère initial.

9

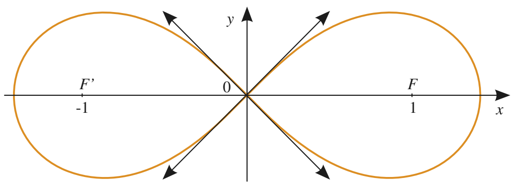
$$\begin{aligned} & MF \times MF' = 1 \\ \iff & \left((x-1)^2 + y^2\right)\left((x+1)^2 + y^2\right) = 1 \\ \iff & (\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1)(\rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1) = 1 \\ \iff & \rho^2(\rho^2 - 2\cos 2\theta) = 0. \end{aligned}$$

La courbe est entièrement décrite par l'équation polaire :

$$\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}.$$

Elle est invariante par symétrie par rapport aux deux axes. Étude sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

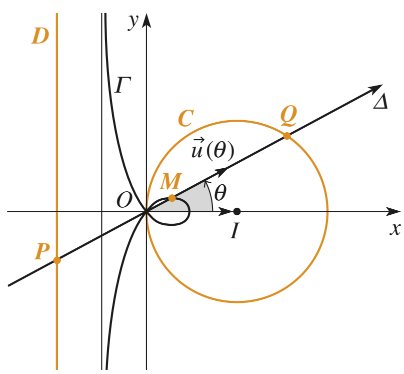
θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	$\sqrt{2}$	$+$	0



10 En orientant la droite Δ dans le sens du vecteur $\vec{u}(\theta)$:

$$\overline{OQ} = 2\cos\theta \text{ et } \overline{OP} = -\frac{1}{\cos\theta}.$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta}.$$



$D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$; $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$: période π.
$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$: symétrie par rapport à Ox ; étude sur :

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$\|$

Quand θ tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ tend vers $\frac{1}{2}$: asymptote d'équation $Y = \frac{1}{2}$ dans le repère $\left(\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right), \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, c'est-à-dire $x = -\frac{1}{2}$ dans le repère initial.

11 **1)** Si le point M a pour coordonnées $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

Pour $M \in C\setminus\{B\}$, t est la pente de la droite (BM).
Le point B n'est pas atteint, mais c'est le point-limite lorsque t tend vers $+\infty$.

2) Soit $M_0\left(\frac{1-t_0^2}{1+t_0^2}, \frac{2t_0}{1+t_0^2}\right)$ et $E(x_1, 0)$ un point de (Ox). Déterminons x_1 pour que $\overrightarrow{M_0E}$ et $\overrightarrow{OM_0}$ soient orthogonaux :

$$\left(x_1 - \frac{1-t_0^2}{1+t_0^2}\right)\frac{1-t_0^2}{1+t_0^2} - \frac{4t_0^2}{(1+t_0^2)^2} = 0$$

On obtient $x_1 = \frac{1+t_0^2}{1-t_0^2}$.

Soit $M_1\left(\frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}, \frac{2t_1}{1+t_1^2}\right)$. Déterminons t_1 pour que $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AE}$ soient colinéaires :

$$\begin{vmatrix} \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2} & \frac{1+t_0^2}{1-t_0^2} \\ \frac{2t_1}{1+t_1^2} - 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

On obtient (en éliminant $t_1 = 1$) : $t_1 = t_0^2$.
La suite de points (M_n) de paramètres (t_n) vérifie : $t_{n+1} = t_n^2$.

- si $t_0 \in]-1, 1[$, la suite (t_n) est à partir du rang 1 décroissante et minorée par 0 : elle converge. L'unique point fixe possible est 0 : la suite (t_n) converge vers 0, la suite (M_n) converge vers B'.
- si $t_0 \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, la suite (t_n) est croissante et ne peut converger (aucun point fixe accessible) ; elle tend vers $+\infty$. La suite (M_n) converge vers B.

12 L'arc est défini pour $\theta \neq \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, et 2π-périodique.
Pour tout $\theta \in D_\rho$, $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$: la courbe est symétrique par rapport à Oy. Il suffit de faire l'étude sur $[0, \pi]\setminus\{\frac{\pi}{6}\}$.

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		π
ρ	0	$-$	$\|$	$+$	0

Il y a une branche infinie pour $\theta \to \frac{\pi}{6}$:

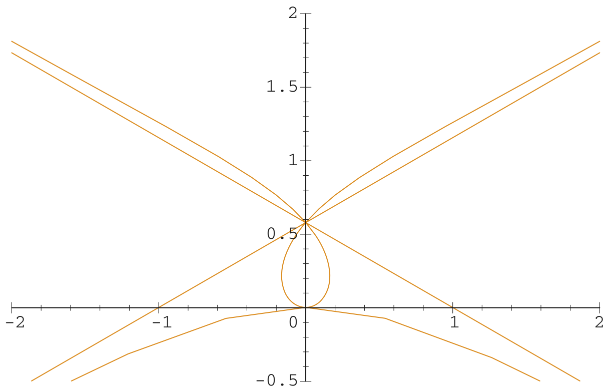
$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}} \rho(\theta)\sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{6} + h)}{\sqrt{3} - 2\cos(\frac{\pi}{6} + h)}\sin h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h + \sqrt{3}\sin h}{2\sqrt{3}(1 - \cos h) + 2\sin h}\sin h = \frac{1}{2}$$

La courbe possède donc une asymptote oblique d'équation $Y = \frac{1}{2}$ dans le repère $(O, \vec{u}(\frac{\pi}{6}), \vec{v}(\frac{\pi}{6}))$.
En poussant le développement limité, on obtient :

$$\rho(\frac{\pi}{6} + h)\sin(h) = \frac{1 + \sqrt{3}h + o(h)}{2 + \sqrt{3}h + o(h)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}h + o(h)$$

Ainsi, la courbe est en dessous de son asymptote pour $h \leqslant 0$, c'est-à-dire $\theta \leqslant \frac{\pi}{6}$, et au dessus pour $h \geqslant 0$, c'est-à-dire $\theta \geqslant \frac{\pi}{6}$.



Chapitre 6

1 **a)** Vrai. **b)** Faux, si $b > a$ c'est b le demi-grand axe ! **c)** Vrai. **d)** Vrai. **e)** Faux, ce peut être une droite, deux droites, un singleton ou l'ensemble vide.

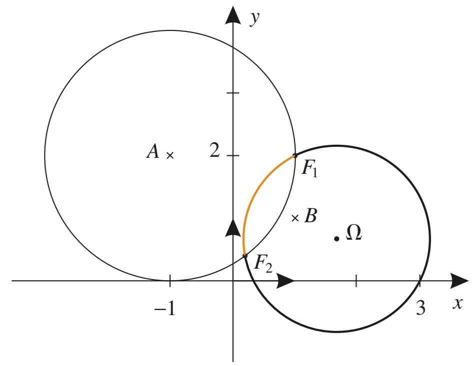
2 À la surface de la Lune, le terminateur est un méridien, c'est-à-dire un grand cercle passant par les pôles lunaires. Depuis la Terre, nous observons ce cercle par projection : nous voyons donc une ellipse (voir §3.3).
L'angle entre le plan du terminateur et le plan de projection (perpendiculaire à l'axe de visée) est $\alpha = t\dfrac{2\pi}{T}$. Le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse projetée sont donc respectivement : $a = R$ et $b = R\cos\alpha$, où R est le rayon apparent de la Lune. L'aire de cette ellipse est donc : $\pi R^2 \cos\alpha$. L'aire de la partie éclairée est :

$$\frac{\pi R^2 - \pi R^2 \cos\alpha}{2}.$$

La fraction du disque qui est éclairée est donc : $\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$, c'est-à-dire $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, ou encore : $f(t) = \sin^2\dfrac{\pi t}{T}$.

3 Montrer que pour tout $M \in C \cap C'$, $\dfrac{MF}{MF'} = \dfrac{e}{e'}$, et revoir l'application 7 du chapitre « *Géométrie élémentaire du plan* ».

4 **1)** On doit avoir $\dfrac{AF}{2} = \dfrac{BF}{1} = e$, d'où $\dfrac{AF}{BF} = 2$. On sait que l'ensemble des points F correspondants est un cercle, dont on détermine une équation : $3x^2 + 3y^2 - 10x - 4y + 3 = 0$. (Il faut exclure les points d'intersection de ce cercle avec l'axe (Ox) : $(3, 0)$ et $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$, le foyer d'une conique ne pouvant être sur la directrice.)



2) La conique cherchée sera une parabole si $AF = 2$, ce qui donne deux points : $F_1 = (1, 2)$ et $F_2 = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$. Ce sera une ellipse si $AF < 2$, c'est-à-dire si F est sur le petit arc $]F_1F_2[$, et une hyperbole si $AF > 2$, c'est-à-dire si F est sur le grand arc $]F_1F_2[$ privé des points d'intersection avec (Ox).

5 **1)** La directrice D doit être une tangente commune au cercle de centre F de rayon p et du cercle de centre A passant par F.
2) La directrice D doit être une tangente commune aux cercles de centres A et B passant par F.
3) Le foyer F doit être un point d'intersection des cercles de centres A et B tangents à D.

6 On choisit un repère orthonormé d'origine I, dans lequel les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. L'ensemble cherché a pour équation :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

ce qui équivaut à $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2}$. Il s'agit d'une hyperbole équilatère de sommets $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

7 L'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes a pour équation $y = \dfrac{1}{x}$. Soit $A\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$ et $C\left(c, \dfrac{1}{c}\right)$ trois points distincts de l'hyperbole. La hauteur issue de A du triangle ABC a pour équation :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff (x-a)(c-b) + \left(y - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) = 0$$

L'orthocentre H du triangle ABC vérifie donc le système :

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{bc}y = a - \dfrac{1}{abc} \\[2ex] x - \dfrac{1}{ca}y = b - \dfrac{1}{abc} \\[2ex] x - \dfrac{1}{ab}y = c - \dfrac{1}{abc} \end{cases}$$

ce qui donne : $H = \left(-\dfrac{1}{abc}, -abc\right)$, qui appartient bien à l'hyperbole.

8 **a)** En posant $X = x + \dfrac{1}{2}$ et $Y = y + \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$-4X^2 + 8Y^2 = 1$$

C'est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ de sommets $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ et $\left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$; les asymptotes ont pour pentes $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) En posant $X = x - 2$ et $Y = y - 2$, on obtient :

$$Y^2 + 3X = 0$$

C'est une parabole de sommet $S(2, 2)$, d'axe horizontal (orienté vers la gauche), et de paramètre $\dfrac{3}{2}$.

c) Effectuons une rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X - \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}X + \dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

En reportant dans l'équation de la conique, on obtient : $\dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}Y^2 = 1$. On reconnaît une ellipse de centre O, de demi-grand axe $\sqrt{2}$ (sur (OY)), et de demi-petit axe $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (sur (OX)).

d) $\Delta = 3$: c'est une hyperbole ; on effectue une rotation d'angle θ tel que $\tan 2\theta = \dfrac{b}{a-c} = \sqrt{3}$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{\pi}{6}$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}X - \dfrac{1}{2}Y \\ y = \dfrac{1}{2}X + \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$$

L'équation devient :

$$\frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y = 2$$

soit :

$$\frac{3}{4}\left(X + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

On reconnaît bien une hyperbole de centre

$$(X, Y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

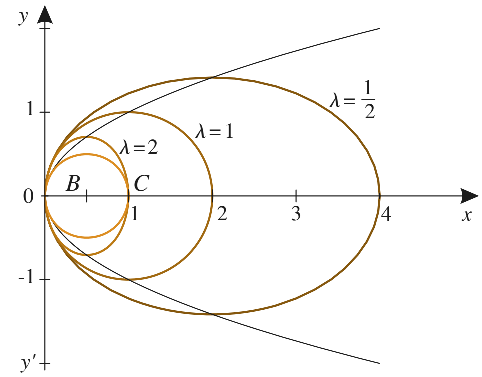
c'est-à-dire

$$(x, y) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \quad a = \frac{2\sqrt{3}}{3}, b = 2$$

9 L'équation réduite de l'ellipse est :

$$\lambda^2\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \lambda y^2 = 1$$

Le centre est $\Omega\left(\dfrac{1}{\lambda}, 0\right)$. Les sommets de l'axe horizontal sont le point O et le point $A\left(\dfrac{2}{\lambda}, 0\right)$, qui décrit la demi-droite $[Ox[$.



Les sommets de l'axe vertical sont les points :

$$B\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{et} \quad B'\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

qui décrivent la parabole d'équation $x = y^2$.
Pour $\lambda > 1$, les foyers sont :

$$F\left(\frac{1}{\lambda}, \sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}}\right) \quad \text{et} \quad F'\left(\frac{1}{\lambda}, -\sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}}\right)$$

qui décrivent le cercle d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.
Pour $\lambda < 1$, les foyers décrivent la demi-droite $[Cx[$ où $C = (1, 0)$.

10 $BH^2 = BM^2 - HM^2$, d'où :

$$\begin{aligned} BH^2 - AB^2 + AF^2 &= BM^2 - HM^2 - AB^2 + AF^2 \\ &= AM^2 - HM^2 + AF^2 = FM^2 - HM^2 \end{aligned}$$

Donc l'égalité $BH^2 = AB^2 - AF^2$ équivaut à $FM = HM$, c'est-à-dire $M \in P$.
L'intersection $\Delta \cap P$ est non vide si et seulement si $AB \geqslant AF$. Elle est réduite à un point si $AB = AF$ (ce qui équivaut à $H = B$) ; elle est constituée de deux points si $AB > AF$ (deux positions possibles de H, symétriques par rapport à B).

11 Choisissons dans un repère orthonormé du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$, soit $\Delta = (x'x)$ et $D = (y'y)$.
(faites un dessin).
$M = (x_1, y_1)$ et $N = (x_2, y_2)$, d'où $I = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ et

$J = (\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$.
$K = (x_K, 0)$ tel que $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{MN} = 0$, c'est-à-dire :

$$(x_K - \frac{x_1 + x_2}{2})(x_2 - x_1) - \frac{y_1 + y_2}{2}(y_2 - y_1) = 0.$$

Soit : $x_K = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{2(x_2 - x_1)}$ et :

$$\overrightarrow{JK} = p\vec{j}$$

12 L'équation de la tangente en M_0 à P est : $y_0 y - p(x + x_0) = 0$, celle de la normale est donc : $y_0(x - x_0) + p(y - y_0) = 0$.
Soit $M_1,\ M_2$ et M_3 trois points de la parabole dont les normales sont concourantes ; ceci signifie que le système :

$$y_i x + py + y_i(x + p) = 0 \quad i \in [\![1, 3]\!]$$

possède une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui équivaut à :

$$\begin{vmatrix} y_1 & p & y_1(x_1 + p) \\ y_2 & p & y_2(x_2 + p) \\ y_3 & p & y_3(x_3 + p) \end{vmatrix} = 0.$$

Soit :

$$y_1 y_3(x_3 - x_1) + y_2 y_1(x_1 - x_2) + y_3 y_2(x_2 - x_3) = 0$$

ou, en utilisant $x_i = \frac{y_i^2}{2p}$:

$$y_1^3(y_2 - y_3) + y_2^3(y_3 - y_1) + y_3^3(y_1 - y_2) = 0 \quad (1)$$

ou : $y_3^3(y_1 - y_2) - y_3(y_1^3 - y_2^3) + y_1^3 y_2 - y_2^3 y_1 = 0$, ce qui en simplifiant par $y_1 - y_2$ équivaut à :

$$y_3^3 - y_3(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^3) + y_1^2 y_2 + y_2^2 y_1 = 0$$

Par $M_1,\ M_2$ et M_3 passe un unique cercle d'équation : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ Le point O appartient à ce cercle si et seulement si $c = 0$; les quatre poins $M_1,\ M_2,\ M_3$ et O sont donc cocycliques si et seulement si le système :

$$x_i^2 + y_i^2 + ax_i + by_i = 0 \quad i \in [\![1, 3]\!]$$

possède une solution $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ce qui équivaut à :

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Soit, en utilisant $x_i = \frac{y_i^2}{2p}$: $\frac{y_1 y_2 y_3}{8p^2}\begin{vmatrix} y_1^3 & y_1 & 1 \\ y_2^3 & y_2 & 1 \\ y_3^3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ qui est la condition (1). La propriété est donc établie.

Chapitre 7

1 **a)** Faux : *cf.* §1.2. **b)** Faux, il est changé en son opposé si on inverse l'orientation. **c)** Vrai. **d)** Faux, il est changé en son opposé si on échange deux vecteurs. **e)** Faux, une telle équation, avec $(a, b, c) \neq 0$ représente toujours un plan. **f)** Vrai. **g)** Vrai.

2 D'une part $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = R^2 \cos\alpha$, où α est une mesure de l'angle $\widehat{AOA'}$. D'autre part, en désignant par H et H' les projetés orthogonaux de A et A' sur le plan équatorial :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{H'A'})$$
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OH'} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{H'A'}$$

La distance entre A et A' à la surface de la Terre (il n'est pas question de creuser un tunnel !) est la longueur de l'arc $\widehat{AA'}$ du cercle de centre O passant par A et A', c'est-à-dire : $L = R\alpha$. On en déduira :

$$L = R\,\mathrm{Arccos}\ \left(\cos\lambda\cos\lambda'\cos(\varphi - \varphi') + \sin\lambda\sin\lambda'\right)$$

Pour Paris-Rio (penser à convertir les angles en radians), on obtient $L = 9180$ km.

3 Utiliser la formule du double produit vectoriel.

4 **1)**
$$(\vec{a}\wedge\vec{b}) \cdot (\vec{c}\wedge\vec{d}) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\wedge\vec{d}\right] = \left[\vec{c}\wedge\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}\right] = \left((\vec{c}\wedge\vec{d})\wedge a\right) \cdot \vec{b}$$

Utiliser la formule du double produit vectoriel pour conclure.

2)
$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = \left(\vec{a} \cdot (\vec{c}\wedge\vec{d})\right)\,\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot (\vec{c}\wedge\vec{d})\right)\,\vec{a} = \left[\vec{c}, \vec{d}, \vec{a}\right]\,\vec{b} - \left[\vec{c}, \vec{d}, \vec{b}\right]\,\vec{a}$$

On peut refaire le même calcul en partant de $-(\vec{c}\wedge\vec{d})\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})$.

5 **1)** En réutilisant les résultats de l'exercice précédent, on obtient :

$$[x_1 \wedge x_2\ ,\ x_2 \wedge x_3\ ,\ x_3 \wedge x_1\ ] = \left((x_1\wedge x_2)\wedge(x_2\wedge x_3)\right) \cdot (x_3\wedge x_1) = \left([x_1, x_2, x_3]\,x_2\right) \cdot (x_3\wedge x_1)$$

2) a) $x_i' \cdot x_j = \delta_{ij}$ (1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$)
b) Réutiliser le résultat de la question 1.

6 On peut résoudre l'exercice analytiquement, ou en utilisant des transformations : soit G l'isobarycentre de A, B, C. Le triangle $(A'B'C')$ est l'image du triangle (ABC) par la composée de l'homothétie de centre G de rapport $-\frac{1}{2}$ et de l'homothétie de centre O de rapport 2. Quelle est la nature de cette composée ? Conclure.

7 Utilisons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{u})$. Les trois plans considérés ont pour équations respectives :

$$\begin{array}{ll} (A'BC) & \alpha x + \alpha y + z - \alpha = 0 \\ (B'AC) & \beta x - z = 0 \\ (C'AB) & \gamma y - z = 0 \end{array}$$

Ces trois plans sont parallèles à une même droite si et seulement si leurs vecteurs normaux sont coplanaires, ce qui équivaut à :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \beta & 0 & -1 \\ 0 & \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0.$$

8 Les vecteurs normaux des trois plans doivent être coplanaires :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a \in \{1, -2\}$$

– Si $a = 1$, les trois plans sont parallèles, ce qui est exclu.
– Si $a = -2$, montrer qu'il existe un point appartenant aux trois plans si et seulement si $b = 1$. L'intersection des trois plans est alors une droite que l'on peut représenter par :

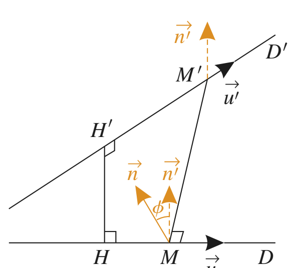
$$x = \lambda \qquad y = \lambda - 1 \qquad z = \lambda$$

9 D est la droite passant par $B(1, -2, 3)$ dirigée par $\vec{u}(2, 3, 1)$; P est le plan passant par $A(0, -1, 4)$ dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$.
Une équation du plan P est :

$$2x - 3y + 5z - 23 = 0$$

10 Soit $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ des vecteurs directeurs de D et D'. On peut prendre pour vecteurs normaux aux plans (D, M') et (D', M) les vecteurs :

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{MM'} \quad \text{et} \quad \vec{n'} = \vec{u'} \wedge \overrightarrow{MM'}$$



En s'aidant de l'exercice 4, on obtient :

$$\vec{n} \cdot \vec{n'} = \vec{u} \cdot \vec{u'} \; MM'^2$$

et

$$\vec{n} \wedge \vec{n'} = \left[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{MM'}\right] \overrightarrow{MM'}$$

On en déduit :

$$MM' \tan \Phi = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{MM'}\right]\right|}{\vec{u} \cdot \vec{u'}}$$

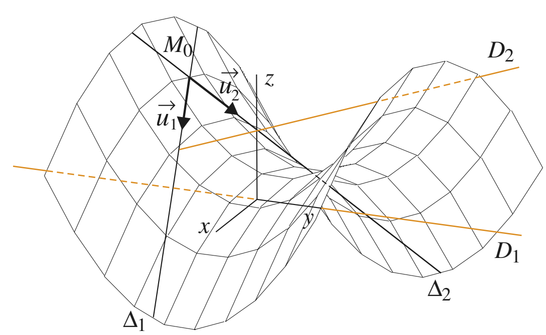
Utilisons la perpendiculaire commune à D et D', qui coupe D en H et D' en H'.

$$\begin{aligned} \left[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{MM'}\right] &= \left[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'}\right] \\ &= \left[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{HH'}\right] = \mathrm{C^{te}} \end{aligned}$$

Donc $MM' \tan \Phi$ est également constant.

11 E est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$x^2 - y^2 + 2z = 1$$



L'intersection de E avec le plan $z = 0$ est l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$. L'intersection de E avec le plan $y = 0$ est la parabole $x^2 + 2\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$. L'intersection de E avec le plan $x = 0$ est la parabole $y^2 - 2\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de E. Il faut trouver un vecteur $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ tel que pour tout réel λ, $M_0 + \lambda\vec{u} \in E$, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (x_0 + \lambda\alpha)^2 - (y_0 + \lambda\beta)^2 + 2(z_0 + \lambda\gamma) = 1$$

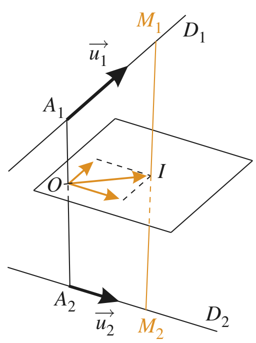
En développant et en annulant tous les coefficients de ce polynôme en λ, on obtient deux solutions (à un facteur près) :

$$\vec{u}_1 = (z_0, z_0, y_0 - x_0) \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = (-z_0, z_0, x_0 + y_0)$$

12 **1)** La droite D_1 est définie par un point A_1 et un vecteur directeur $\vec{u}_1$; D_2 est définie par un point A_2 et un vecteur directeur $\vec{u}_2$.

Soit O le milieu de $[A_1A_2]$.
Soit $M_1 \in D_1$:

$$\overrightarrow{A_1M_1} = x_1\vec{u}_1 \quad \text{et} \quad M_2 \in D_2 \ : \ \overrightarrow{A_2M_2} = x_2\vec{u}_2.$$



Soit I le milieu de $[M_1M_2]$:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1M_1} + \overrightarrow{A_2M_2})$$

$$= \frac{1}{2}(x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2)$$

Lorsque (x_1, x_2) décrit $\mathbb{R}^2$, le point I décrit le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

2) Le point A doit appartenir à trois plans, respectivement parallèles à (D_1, D_2), (D_2, D_3) et (D_3, D_1). Ces trois plans n'ont aucune direction de droite en commun, leur intersection est donc un singleton.

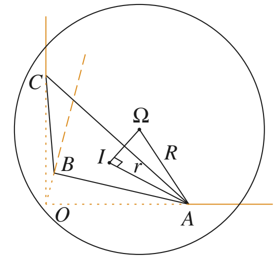
13 Pour tout $t \in]-\pi, \pi]$, le point $M(t)$ appartient au plan P d'équation $x+y+z = 3$ et à la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2 = 9$, de centre O et de rayon $R = 3$. $M(t)$ appartient donc au cercle $C = P \cap S$, dont le centre est le projeté orthogonal de O sur P, c'est-à-dire $H = (1, 1, 1)$, et le rayon $r = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{6}$. Comme $M(\pi) = M(-\pi)$ et que le vecteur vitesse du point $M(t)$ ne s'annule jamais, le cercle est décrit en entier.

14 La sphère circonscrite à $OABC$ a pour centre $\Omega\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ et pour rayon $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Le rayon du cercle circonscrit à ABC est donc :

$$r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, P)^2},$$

où P est le plan (ABC), d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
On obtient :

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$



Chapitre 8

1 **a)** Vrai ; puisque $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \varnothing$. **b)** Vrai ; une proposition fausse implique n'importe quoi... **c)** Faux ; ces deux implications sont équivalentes. **d)** Vrai. **e)** Faux. **f)** Vrai. **g)** Faux ; exemple : on peut prendre pour g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $n \mapsto 2n$ et pour f, l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $n \mapsto E(\frac{n}{2})$ (où $E(x)$ désigne la partie entière de x). **h)** Faux ; le matin vous mettez vos chaussettes avant vos chaussures ; le soir, dans quel ordre procédez-vous pour les enlever ? **i)** Faux ; $f(x)$ peut avoir un antécédent dans A, autre que x. **j)** Vrai. **k)** Faux ; elle n'est pas antisymétrique.

2

$$P_1 \iff (\forall n \in \mathbb{Z} \ \exists p \in \mathbb{Z} \ \ n < p) : \quad \text{vrai} \quad (p = n+1).$$

$$P_2 \iff (\exists n \in \mathbb{Z} \ \forall p \in \mathbb{Z} \ \exists q \in \mathbb{Z} \ \ n = pq) : \quad \text{vrai} \quad (n = 0).$$

$$P_3 \iff (\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ x = y^2) : \quad \text{faux} \quad (\text{si } x < 0).$$

$$P_4 \iff (\exists x \in \mathbb{R} \ \forall p \in \mathbb{Z} \ \forall q \in \mathbb{Z}^* \ \ qx \neq p) : \quad \text{vrai} \quad (x = \sqrt{2}).$$

$$P_5 \iff (\exists x \in \mathbb{R} \ \ x > x^2) : \quad \text{vrai} \quad (x = \frac{1}{2}).$$

$$P_6 \iff (\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \ \exists (i,j) \in \{1,2,3\}^2 \ \ i \neq j \text{ et } x_ix_j \geqslant 0) :$$

vrai (il n'y a que deux signes possibles...).

3

$$\exists x \in \mathbb{R}^* \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \quad \forall z \in \mathbb{R}^* \quad z = xy \ : \ \text{faux}.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^* \quad \exists x \in \mathbb{R}^* \quad \forall z \in \mathbb{R}^* \quad z = xy \ : \ \text{faux}.$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^* \quad \exists x \in \mathbb{R}^* \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \quad z = xy \ : \ \text{faux}.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^* \quad \forall z \in \mathbb{R}^* \quad \exists x \in \mathbb{R}^* \quad z = xy \ : \ \text{vrai} \quad (x = \frac{z}{y}).$$

4 **1)** $A \backslash B = A \cap \complement_E B = \complement_E B \backslash \complement_E A$.

2) $A \backslash (B \cap C) = A \cap \complement_E (B \cap C) = A \cap \left(\complement_E B \cup \complement_E C\right)$
$= \left(A \cap \complement_E B\right) \cup \left(A \cap \complement_E C\right) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

3) $A \backslash (B \cup C) = A \cap \complement_E (B \cup C) = A \cap \complement_E B \cap \complement_E C$
$= (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

5 On suppose $(A \cap B \subset A \cap C)$ et $(A \cup B \subset A \cup C)$.
Soit $x \in B$. En distinguant suivant que $x \in A$ ou $x \notin A$, montrer que dans les deux cas $x \in C$.

6 On suppose $A \cap B = A \cap C$. Soit $x \in A \cap \complement_E B$; x appartient à A. Peut-il appartenir à C ? En déduire que $A \cap \complement_E B \subset A \cap \complement_E C$, puis l'inclusion dans l'autre sens. L'implication réciproque s'obtient en remplaçant B et C par leurs complémentaires.

7 On suppose $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C$; soit $x \in B$. En distinguant suivant que $x \in A$ ou $x \notin A$, montrer que dans les deux cas $x \in C$; d'où $B \subset C$. B et C jouent le même rôle, donc $C \subset B$.

8 On suppose qu'il existe une surjection f de E sur $\mathcal{P}(E)$. La partie $A = \{x \in E \ , \ x \notin f(x)\}$ aurait un antécédent a par f, c'est-à-dire un élément $a \in E$ tel que $f(a) = A$. Démontrer que $a \in A \iff a \notin A$... (comparer avec le paradoxe de Russel).

9 Montrer d'abord que g est bijective, puis exprimer f et h à l'aide de g^{-1}.

10 **1)** Montrer que g est bijective et exprimer f à l'aide de g^{-1}.
2) Montrer que f est bijective et exprimer g à l'aide de f^{-1}.

11 **1)** On suppose f injective. Soit $(g, h) \in (F^E)^2$ tel que $f \circ g = f \circ h$; pour tout $x \in E$, $f \circ g\ (x) = f \circ h\ (x)$, d'où ...
Réciproquement, on suppose que :

$$\forall (g, h) \in (F^E)^2 \quad f \circ g = f \circ h \ \Rightarrow \ g = h,$$

et on veut montrer que f est injective. Soit y et y' deux éléments de F tels que $f(y) = f(y')$. Considérer les applications constantes de E dans F : $x \mapsto y$ et $x \mapsto y'$; leur appliquer l'hypothèse et démontrer que $y = y'$.
2) On suppose f surjective. Soit $(j, k) \in (H^G)^2$ tel que $j \circ f = k \circ f$, on veut montrer que pour tout $z \in G$, $j(z) = k(z)$. Utiliser pour cela un antécédent de z par f.
Réciproquement, on suppose que :

$$\forall (j, k) \in (H^G)^2 \quad j \circ f = k \circ f \ \Rightarrow \ j = k,$$

et on veut montrer que f est surjective. Soit $z \in G$. Construire deux applications j et k de G dans H qui coïncident pour tout élément, sauf z à qui elles attribuent deux images différentes (c'est possible grâce au fait que H a au moins deux éléments). Montrer que si z n'avait pas d'antécédent par f, on aurait $j \circ f = k \circ f$, et conclure.

12 Tout est très facile, si on se souvient que :

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B\,.$$

13 Contrairement aux apparences, cet exercice est moins facile que le précédent.
1) Supposer que $A \subset A'$ et considérer un élément $y \in f(A)$...
2) Utiliser les inclusions $A \cap A' \subset A$ et $A \cap A' \subset A'$ pour montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. L'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie.
Exemple :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. , A = [0, 1], A' = [-1, 0].$$

3) De même, utiliser les inclusions

$$A \subset A \cup A' \quad \text{et} \quad A' \subset A \cup A'$$

pour montrer que

$$f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A').$$

Réciproquement, soit $y \in f(A \cup A')$; montrer que

$$y \in f(A) \cup f(A').$$

4) Il n'y a aucune inclusion *a priori* entre $f(\complement_E A)$ et $\complement_F f(A)$.
Exemple : le même que ci-dessus.

14 La réflexivité est évidente. Antisymétrie : montrer que $OO' \leqslant R' - R$ et $OO' \leqslant R - R'$ implique $O = O'$ et $R = R'$. Pour la transitivité, utiliser l'inégalité triangulaire : $OO'' \leqslant OO' + O'O''$.

15 **1)** On montre sans difficulté la réflexivité et la transitivité. Antisymétrie : soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$; on suppose qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $p^n = q$ et $q^m = p$. On en déduit que $p^{mn} = p$. Montrer que $p = 1$ ou $mn = 1$ et que, dans les deux cas, $p = q$. Il s'agit bien d'une relation d'ordre. L'ordre est partiel : aucune des relations $2\mathcal{R}3$ ou $3\mathcal{R}2$ n'est vraie.
2) Montrer qu'un majorant de $\{2, 3\}$ devrait être à la fois pair et impair.

16 **1)** On suppose f croissante et injective. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x < y$. On sait que $f(x) \leqslant f(y)$. Peut-on avoir $f(x) = f(y)$?
2) On suppose f strictement croissante. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Si l'ordre de E est total, on a nécessairement $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$. Montrer que deux de ces cas aboutissent à une contradiction.

Contre-exemple : $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ X & \mapsto & \text{Card}\, X \end{array} \right.$

où E est un ensemble fini, et $\mathcal{P}(E)$ ordonné par inclusion.

Chapitre 9

1 **a)** Faux, il faut supposer que $P(0)$ est vraie. **b)** Vrai. **c)** Faux. **d)** Faux ; c'est vrai si l'ensemble est fini. **e)** Faux ; il faut que les deux ensembles soient disjoints. **f)** Vrai. **g)** Vrai. **h)** Faux. **i)** Vrai. **j)** Vrai ; formule du binôme avec $a = 1$, $b = -2$.

2 Récurrence immédiate ; ne pas oublier de vérifier la propriété pour $n = 1$.

3 Idem.

4 Récurrences.

1) Poser $3^{2n} - 2^n = 7k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
2) Poser $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3) Poser $2^{2^n} - 6 = 10k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
4) Écrire :

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + \cdots$$

5 **2)** C'est une récurrence sur deux niveaux : vérifier l'inégalité pour $n = 0$ et $n = 1$, puis montrer que les inégalités aux rangs n et $n+1$ entraînent l'inégalité au rang $n+2$.

6 Si Card $A =$ Card E, Card $\complement_E A = 0$, donc

$$\complement_E A = \varnothing.$$

Le résultat est faux pour un ensemble infini ; il existe, par exemple, des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$; en construire une.

7
$$\begin{aligned}\text{Card}\,(E \cup F \cup G) &= \text{Card}\,E + \text{Card}\,F + \text{Card}\,G\\ &-\text{Card}\,(E \cap F) - \text{Card}\,(F \cap G)\\ &-\text{Card}\,(G \cap E) + \text{Card}\,(E \cap F \cap G)\end{aligned}$$

8 Il faut que $\binom{n}{3} \leqslant 26^2$, soit $n \leqslant 16$.

9 MATHS : $5!$; MOTO (2 O) : $\dfrac{4!}{2!} = 12$;
DODO (2 D, 2 O) : $\dfrac{4!}{2!^2} = 6$;
ANAGRAMME (2 M, 3 A) : $\dfrac{9!}{2!3!} = 30\,240$.

10 (Pour simplifier, on suppose que personne n'est né un 29 février.)
On cherche les applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 365]\!]$ qui ne sont pas injectives :

$$p = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

Cette probabilité est supérieure à $\dfrac{1}{2}$ à partir de 23 personnes, et supérieure à $\dfrac{9}{10}$ à partir de 41 personnes. Qu'en est-il dans votre classe ?

11 Deux méthodes (*cf. Application* 5) :
1) Spécifier un résultat précis :
• choix d'un trinôme : $\binom{30}{3} = \dfrac{30!}{27!3!}$;
• choix successifs de dix trinômes dans un certain ordre :

$$\frac{30!}{27!3!} \times \frac{27!}{24!3!} \times \cdots \times \frac{6!}{3!3!}$$

• on divise par $10!$ pour supprimer l'ordre des trinômes. Simplifier le résultat.

2) Compter plusieurs fois chaque résultat, et corriger :
On peut constituer les trinômes à partir d'une liste des élèves dans un ordre quelconque, en groupant les trois premiers, les trois suivants, etc. Il y a $30!$ listes possibles.
Combien de listes distinctes donneront les mêmes trinômes ?
On obtient finalement :

$$\frac{30!}{(3!)^{10}\,10!} = 1\,208\,883\,745\,669\,600\,000$$

façons de constituer des trinômes. Admirez votre Z qui a su trouver la meilleure solution parmi plus d'un milliard de milliards de possibilités...
Généralisation : $\dfrac{(np)!}{(p!)^n\,n!}$.

12 On peut, par exemple :
1) Montrer, à l'aide de la formule du binôme, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ et interpréter.
2) Montrer par récurrence que le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$ est 2^{n-1}.
3) Construire une bijection entre l'ensemble des parties de cardinal pair et l'ensemble des parties de cardinal impair ; par exemple : si la partie A contient l'élément a, on lui associe $A \setminus \{a\}$; si elle ne contient pas a ,...

13 **1)** Choix de Y à p éléments : $\binom{n}{p}$. Choix d'une partie X de Y : 2^p

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p = 3^n$$

2) Même raisonnement en remplaçant Y par $\complement_E Y$: 3^n.
3) Choix de Z à p éléments : $\binom{n}{p}$. Choix d'un couple (X, Y) de parties de Z tel que $X \subset Y$: 3^p

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}3^p = 4^n$$

14 **1)** Ces récurrences ne présentent pas de difficultés particulières.

2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\end{aligned}$$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = 3!\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3} = 6\binom{n+3}{4}$
(Utiliser la formule de l'*Application* 6.)

15 **1)** Écrire $p\binom{n}{p}$ à l'aide de factorielles et simplifier.

2) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}p\binom{n}{p} = n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1} = n\,2^{n-1}$

3) $f(x) = (1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p$. Calculer de deux façons $f'(1)$.

4) Calculer de deux façons $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

16 **1)** Écrire les expressions à l'aide de factorielles et simplifier.
2) Dénombrer de deux façons les couples (X, Y) de parties d'un ensemble E de cardinal n telles que : $X \subset Y$, Card $X = k$, Card $Y = p$.
3) Développer $((a+b)+c)^n$ et $(a+(b+c))^n$, et comparer les coefficients de $a^k b^{p-k} c^{n-p}$.

17 Trois méthodes possibles (*cf. Application* 6) :
– par récurrence ;
– en dénombrant de deux façons les parties à k éléments d'un ensemble de cardinal $(n+p)$;
– en identifiant les coefficients de x^k dans $(1+x)^{n+p}$ et $(1+x)^n(1+x)^p$.
Avec $n = p = k$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

18 $(1+i)^{4n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{4n}{2p}(-1)^p + i\sum_{p=0}^{2n-1} \binom{4n}{2p+1}(-1)^p$

Calculer directement $(1+i)^{4n}$ et identifier les parties réelles et les parties imaginaires.

$$\sum_{p=0}^{2n} \binom{4n}{2p}(-1)^p = (-4)^n \qquad \sum_{p=0}^{2n-1} \binom{4n}{2p+1}(-1)^p = 0$$

19 D'une part :

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2n} = \mathrm{e}^{2i(3k+1)\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'autre part,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k i^k$$

Identifier les parties imaginaires.

20 Soit p un entier inférieur ou égal à n ; désignons par $M_{n,p}$ le nombre de mots de p lettres que l'on peut former sans utiliser deux fois la même lettre. Pour spécifier un tel mot, il faut choisir p lettres parmi n, et les ordonner, d'où :

$$M_{n,p} = \binom{n}{p} p! = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On a alors : $M_n = \sum_{p=1}^{n} M_{n,p} = n!\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n-p)!} = n!\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!} - 1.$

Les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes ; elles convergent donc vers un même réel, qui d'après la formule de Taylor n'est autre que e. On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} < \mathrm{e} < \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$$

d'où : $M_n + 1 < \mathrm{e}\,n! < M_n + 2$. Or $M_n + 1$ est un entier ; c'est donc la partie entière de $\mathrm{e}\,n!$. En définitive, $M_n = [\mathrm{e}\,n!] - 1$.

Chapitre 10

1 **a)** Faux. **b)** Vrai. **c)** Faux ; si $au + bv = d$, d est un multiple de $a \wedge b$. **d)** Vrai. **e)** Faux ; exemple : 24 (6 et 8 ne sont pas premiers entre eux). **f)** Faux ; exemple : 6 divise 3×8.
g) Vrai. **h)** Vrai.
i) Faux ; exemple : $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 59 \times 509$.

2 $(a, b) = (3983, 48)$.

3 Écrire :

$$a = (a-b)q_1 + r_1, \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r_1 < a-b$$
$$b = (a-b)q_2 + r_2, \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r_2 < a-b$$

En déduire : $r_1 = r_2$ et $q_1 = q_2 + 1$.

4 $a - 1 = bq + r$, avec $0 \leqslant r < b$
$ab^n - 1 = b^{n+1}q + rb^n + b^n - 1$
Vérifier que $rb^n + b^n - 1 < b^{n+1}$ et conclure.

5 **1)** $5a - 2b = 19$, donc $a \wedge b \in \{1, 19\}$.
Si $a \wedge b = 19$, on peut écrire : $2n + 3 = 19k$ et $5n - 2 = 19k'$.
L'entier k doit être impair, donc $k = 2p+1$, d'où $n = 19p+8$. Réciproquement, on vérifie que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $n = 19p + 8 \Rightarrow a \wedge b = 19$. Pour toute autre valeur de n, $a \wedge b = 1$.
2) Par la même méthode, on trouve que, si $n = 17p+9$, $a \wedge b = 17$ et, sinon, $a \wedge b = 1$.

6 $a \wedge b$ divise A et B ; il divise donc $A \wedge B$. Résoudre le système en a et b pour montrer, de même, que $A \wedge B$ divise $a \wedge b$. On en conclut que $A \wedge B = a \wedge b$.

7 $221 \wedge 247 = 13$; l'équation $221x + 247y = 15$ n'a donc pas de solution. $198 \wedge 216 = 18$; l'équation équivaut à $11x + 12y = 2$, dont les solutions sont :

$$(x, y) = (-2 + 12k, 2 - 11k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$323 \wedge 391 = 17$; l'équation équivaut à $19x - 23y = 36$, dont les solutions sont :

$$(x, y) = (14 + 23k, 10 + 19k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

8 $a + b$ est premier avec a et b, donc avec ab.

9 Posons $d = a \wedge b$ et $a \wedge c = 1$.
d divise a et bc, donc il divise $a \wedge bc$.
Réciproquement, tout diviseur commun de a et bc est premier avec c, donc il divise b et, par conséquent, il divise d.

10 Démontrer que :

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \Rightarrow (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

En déduire que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ et conclure.
On peut aussi raisonner par récurrence.

11 **1)** Utiliser le corollaire 3 du théorème de Bézout.
2) Utiliser la caractérisation du P.G.C.D.

12 $p \wedge q = 1 \iff \exists(u,v) \in \mathbb{N}^2 \; pu - qv = 1.$
On en déduit $2^{pu-qv} = 2$, que l'on peut écrire :

$$2^{pu} - 1 - 2(2^{qv} - 1) = 1$$

Montrer que $2^{pu} - 1$ est divisible par $2^p - 1$, et que $2^{qv} - 1$ est divisible par $2^q - 1$.

13 Montrons la contraposée :
n non premier $\Rightarrow$ $2^n - 1$ non premier.
Supposons que $n = pq$, avec $1 < p < n$ et $1 < q < n$.

$$2^n - 1 = 2^{pq-1} = (2^p - 1)\sum_{k=0}^{q-1} 2^{kp}$$

Montrer qu'aucun des deux facteurs ci-dessus n'est égal à 1 : $2^n - 1$ est composé.
La réciproque est fausse : $2^{11} - 1 = 23 \times 89$.

14 Que penser des nombres $n! + 2,\; n! + 3,\; \cdots,\; n! + n$?
Zut, il n'y en a que $n - 1$...

15 **1)** On sait que $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$; p divise $k\binom{p}{k}$ et il est premier avec k, donc...
2) Utiliser la formule du binôme.
3) Pratiquer la récurrence.

16 **1)** D'une part, d'après le résultat précédent, $n^5 - n$ est divisible par 5.
D'autre part, $n^5 - n = (n^2 - n)(n^3 + n^2 + n + 1)$ et $n^2 - n$ est divisible par 2.
De même, $n^5 - n = (n^3 - n)(n^2 + 1)$ et $n^3 - n$ est divisible par 3.
En définitive, $n^5 - n$ est divisible par 5, 3 et 2, donc par 30.
Montrer de la même façon que $n^7 - n$ est divisible par 7, 3 et 2.

17 Il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 = b^3$. Tout nombre premier p a un exposant pair dans la décomposition en facteurs premiers de a^2, et multiple de 3 dans celle de b^3 : cet exposant est donc un multiple de 6. Il existe par conséquent un entier c tel que $n = c^6$.

18 Les instants d'émission du flash du phare A sont les $t = 42p$, $p \in \mathbb{N}$, ceux d'émission du flash du phare B sont les $t = 18 + 66q$, $q \in \mathbb{N}$.

Il y a donc simultanéité si et seulement s'il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $42p - 66q = 18 \quad (*)$.
42 et 66 ont pour PGCD 6, qui divise 18, $(*)$ possède des solutions, elle équivaut à l'équation : $7p - 11q = 3$.
Une solution particulière est $(p_0, q_0) = (2, 1)$, alors :

$$7p - 11q = 3 \iff 7(p - p_0) = 11(q - q_0) \qquad (**)$$

7 divise $11(q - q_0)$ et est premier avec 11, 7 divise donc $q - q_0$: $\exists k \in \mathbb{N} \quad q = q_0 + 7k = 1 + 7k$, et en reportant dans $(**)$: $p = p_0 + 11k = 2 + 11k$.
D'où la solution : les éclats sont simultanés aux instants :

$$t = 84 + 462k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Le même raisonnement conduit dans le deuxième cas à résoudre l'équation $42p - 66q = 10$, dont l'ensemble des solutions est vide puisque 6, qui divise toute combinaison de 42 et 66 à coefficients entiers, ne divise pas 10. Les éclats des deux phares ne sont jamais simultanés.

19 Soit $p \in \mathbb{N}$,

- ou bien $p = 2q$, $\quad q \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4q^2$, p^2 est congru à 0 modulo 4 ;
- ou bien $p = 2q + 1$, $\quad q \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4q^2 + 4q + 1$, p^2 est congru à 1 modulo 4.

Donc $n = p_1^2 + p_2^2$ peut être congru à 0, 1 ou 2, modulo 4, mais pas à 3.

De même,

- ou bien $p = 2q$, $\quad q \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4q^2$, p^2 est congru à 0 ou à 4 modulo 8 ;
- ou bien $p = 2q + 1$, $\quad q \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4q^2 + 4q + 1$, où q et q^2 sont de même parité : p est congru à 1 modulo 8.

Donc $n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ peut être congru à $k \in [\![0, 6]\!]$ modulo 8, mais pas à 7.

20 Examinons les congruences modulo 3. Le seul nombre premier congru à 0 modulo 3 est $p = 3$, mais $8p + 1 = 25$ n'est pas premier. Si p est congru à 1 modulo 3, alors $8p + 1$ est congru à 0 et il est différent de 3, donc il n'est pas premier. Si p est congru à 2 modulo 3, alors $8p - 1$ est congru à 0 et il est différent de 3, donc il n'est pas premier.

21 On factorise : $P(n) = (n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$.
Chacun des facteurs $n - 1$, $n + 1$, $n^2 + 1$ et $n^4 + 1$ est divisible par 2, ce qui permet d'affirmer que $P(n)$ est divisible par $2^7 = 128$.
Mais l'un au moins des facteurs $n - 1$ ou $n + 1$ est divisible par 4, donc $P(n)$ est divisible par $2^9 = 512$.

Chapitre 11

1 **a)** Faux ; il n'est pas neutre à gauche. **b)** Faux ; exemple : 2 dans $\mathbb{N}$. **c)** Vrai. **d)** Faux ; il ne contient pas les opposés de ses éléments. **e)** Faux en général, sauf lorsque ce morphisme est injectif. **f)** Vrai. **g)** Faux ; un diviseur de zéro n'est pas régulier pour la multiplication. **h)** Faux ; il n'est pas stable par addition. **i)** Vrai. **j)** Vrai.

2 $\cap$ est une l.c.i. dans $\mathcal{P}(E)$, commutative, associative. E est élément neutre ; aucun élément autre que E n'a de symétrique.

- $\cup$ est une l.c.i. dans $\mathcal{P}(E)$, commutative, associative. $\varnothing$ est élément neutre ; aucun élément autre que $\varnothing$ n'a de symétrique.
- Δ est une l.c.i. dans $\mathcal{P}(E)$, commutative, associative. $\varnothing$ est élément neutre ; tout élément A de $\mathcal{P}(E)$ est son propre symétrique.

3 **1)** Choisir $(x, y, u, v) = (e, f, f, e)$.
2) Choisir $(x, y, u, v) = (x, e, e, z)$.
3) Choisir $(x, y, u, v) = (x, y, e, z)$,
puis $(x, y, u, v) = (e, y, z, e)$.

4 **1)** Vérifier que $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
2) Montrer d'abord que $x*y$ majore x et y, c'est-à-dire : $x\mathcal{R}(x*y)$ et $y\mathcal{R}(x*y)$. Montrer ensuite que tout majorant de $\{x, y\}$ majore $x * y$, c'est-à-dire que :

$$(x\mathcal{R}z \text{ et } y\mathcal{R}z) \quad \Rightarrow \quad (x * y)\mathcal{R}z$$

3) La vérification est facile. *Exemples* : dans $\mathcal{P}(E)$, on peut associer la l.c.i. $\cup$ et la relation d'ordre $\subset$; dans $\mathbb{N}^*$, la l.c.i. P.G.C.D. et la relation d'ordre « est un multiple de »...

5 Ceci permet de transférer certaines structures d'un ensemble F à l'ensemble des applications d'un ensemble quelconque dans F.
Exemple : L'ensemble des suites numériques et l'ensemble des fonctions numériques sont, comme $\mathbb{R}$, des anneaux commutatifs.
Attention : La structure de corps ne se transmet pas, car il peut y avoir d'autres éléments que l'élément nul qui n'ont pas d'inverse.

6 **1)** Il s'agit bien d'une loi interne dans $\mathbb{R}$; elle est commutative, associative. 0 est élément neutre, mais 1 n'a pas de symétrique : $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe.
2) Avant de conclure trop rapidement, vérifier soigneusement que $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ est stable par $*$; la l.c.i. induite est encore associative, d'élément neutre 0, et tout élément a de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ possède un inverse $\dfrac{a}{a-1}$ qui appartient aussi à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
$(\mathbb{R}\backslash\{1\}, *)$ est un groupe abélien.

7 Il s'agit bien d'une loi interne dans $\mathbb{R}^2$. Vérifier soigneusement l'associativité. $(0, 0)$ est élément neutre. Tout couple (x, y) admet pour symétrique le couple $(-x, -y)$. $(\mathbb{R}^2, *)$ est bien un groupe ; il n'est pas abélien (essayer).

8 Il faut montrer que E possède un élément neutre et que tout élément de E possède un symétrique. Soit a un élément de E.

L'application $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a*x \end{array}\right.$ est injective, et comme E est fini, elle est surjective. En particulier, a possède un antécédent : $\exists e \in E \quad a * e = a$. On a alors, pour tout x élément de E : $a * e * x = a * x$, et comme a est régulier, $e * x = x$; e est donc élément neutre à gauche. On a aussi $x * e * x = x * x$, et comme x est régulier, $x * e = x$: e est aussi élément neutre à droite, donc élément neutre.
Par la même application, e possède un antécédent :
$\exists b \in E \quad a * b = e.$ b est donc le symétrique à droite de a.
On a aussi $b * a * b = b$, et comme b est régulier, $b * a = e$:
b est aussi le symétrique à gauche de a.
E est, par conséquent, un groupe.
Contre-exemple, lorsque E est infini : $(\mathbb{N}, +)$.

9 Utiliser le théorème de caractérisation d'un sous-groupe.

10 Réutiliser le théorème de caractérisation d'un sous-groupe.

11 Réutiliser le théorème de caractérisation d'un sous-groupe.
(**Attention :** Ce théorème fait partie de ceux qu'on utilise le plus souvent dans les concours.)

12 Construire la table de (G, o) :

$\nearrow o$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_6	f_5	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1	f_6	f_5
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_1	f_2	f_4	f_3

G est non vide, stable par composition des applications et il contient les inverses de ses éléments : c'est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ dans lui-même.
Sous-groupes de G à un élément : $\{f_1\}$; à deux éléments : $\{f_1, f_2\}$, $\{f_1, f_4\}$, $\{f_1, f_5\}$; à trois éléments : $\{f_1, f_3, f_6\}$. Tout sous-groupe de G contenant au moins quatre éléments est G tout entier.
Le sous-groupe engendré par f_2 est $\{f_1, f_2\}$; celui qui est engendré par f_3 est $\{f_1, f_3, f_6\}$, et le sous-groupe engendré par $\{f_2, f_3\}$ est G.

13 Démonstration complète pour l'image directe :
Soit H un sous-groupe de G, et $H' = f(H)$.
1) $e' = f(e)$ et $e \in H$, donc $e' \in H'$. H' n'est, par conséquent, pas vide.
2) Soit $(y, z) \in H'$; il existe $(x, t) \in H$ tel que $y = f(x)$ et $z = f(t)$. $yz = f(xt)$ et $xt \in H$, donc $yz \in H'$. H' est, par conséquent, stable par la l.c.i. de G'.
3) Soit $y \in H'$. Il existe $x \in H$ tel que $y = f(x)$. On sait que $y^{-1} = f(x^{-1})$ et que $x^{-1} \in H$; on en déduit que $y \in H'$. H' contient donc les inverses de ses éléments.

H' est bien un sous-groupe de G'.
Même méthode pour l'image réciproque d'un sous-groupe de G'.
• **Attention :** surtout ne pas parler d'une application f^{-1} ! On n'a pas supposé f bijective.
On retrouve les résultats du cours pour $\operatorname{Im} f = f(G)$ et $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{e'\})$.

14 L'application $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, *)$.

15 **1)** Montrer d'abord que f est un morphisme de G dans G, puis qu'il est bijectif (chercher les antécédents d'un élément donné).
2) Il s'agit de montrer que :

$$\forall (a, a') \in G^2 \quad f_a \circ f_{a'} = f_{aa'}.$$

Comparer pour tout x de G, $f_a \circ f_{a'}(x)$ et $f_{aa'}(x)$.
Ker φ est l'ensemble des éléments a de G tels que $f_a = Id_G$. Montrer que c'est le centre du groupe G (*cf. exercice* 7).
Im φ est l'ensemble des automorphismes de G de la forme f_a : par définition, c'est Int G.
3) Int G est l'image d'un morphisme ; c'est donc un sous-groupe de Aut G.

16 La différence symétrique est une loi de composition interne dans $\mathcal{P}(E)$, commutative, associative ; elle admet pour élément neutre $\varnothing$, et tout élément A de $\mathcal{P}(E)$ est son propre symétrique. L'intersection est une loi de composition interne dans $\mathcal{P}(E)$, commutative, associative et distributive par rapport à Δ (le vérifier) ; elle admet pour élément neutre E.
$(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est donc bien un anneau commutatif. Cet anneau n'est pas intègre : on peut avoir $A \cap B = \varnothing$, sans que $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$. Le seul élément inversible pour l'intersection est E.
Tables des l.c.i. Δ et $\cap$ (pour simplifier, $\complement_E(X)$ est noté X') :

Δ	$\varnothing$	X	X'	E
$\varnothing$	$\varnothing$	X	X'	E
X	X	$\varnothing$	E	X'
X'	X'	E	$\varnothing$	X
E	E	X'	X	$\varnothing$

$\cap$	$\varnothing$	X	X'	E
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
X	$\varnothing$	X	$\varnothing$	X
X'	$\varnothing$	$\varnothing$	X'	X'
E	$\varnothing$	X	X'	E

La partie $\{\varnothing, X, X', E\}$ contient l'élément unité E et elle est stable par les deux l.c.i. (ici, la soustraction est confondue avec l'addition) : c'est un sous-anneau de A.

17 **1)** $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ contient 1 ; il est stable par soustraction et multiplication : c'est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2) Montrer que φ est un morphisme pour l'addition et la multiplication et que $\varphi(1) = 1$. Par ailleurs, φ est bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$.
3) On remarque que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$:

$$N(n + p\sqrt{2}) = n^2 - 2p^2 \in \mathbb{Z}$$

De plus : $\quad \forall (x, y) \in (\mathbb{Z}[\sqrt{2}])^2$:

$$N(xy) = xy\varphi(xy) = x\varphi(x) \cdot y\varphi(y) = N(x)N(y)$$

N est donc un morphisme de $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \times)$ dans $(\mathbb{Z}, \times)$.

4) Si x est un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$,
$N(xx^{-1}) = N(x)N(x^{-1}) = 1$, donc $N(x)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $N(x) = \pm 1$.
Réciproquement, si $N(n + p\sqrt{2}) = \pm 1$,
$(n + p\sqrt{2})(n - p\sqrt{2}) = n^2 - 2p^2 = \pm 1$.
Donc $(n + p\sqrt{2})$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Exemples : $1, -1, 3 \pm 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

18 Comme dans l'exercice précédent, on montre que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $(a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow a^2 - 2b^2 \neq 0$; l'élément $a + b\sqrt{2}$ admet alors pour inverse $\dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$, qui appartient à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

19 Soit A un anneau intègre fini et a un élément non nul de A. Montrer que l'application $\left|\begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array}\right.$ est injective, donc surjective. Que représente l'antécédent de 1_A ? La réciproque est fausse : il existe des corps infinis.

20 **1)** En supposant que $(xy)^n = 0$, multiplier à droite par x et à gauche par y.
2) Si $x^n = 0$, $y^p = 0$ et $xy = yx$, alors $(xy)^n = x^n y^n = 0$.

$$(x + y)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n}{k} x^k y^{n+p-k}$$

Montrer que tous les termes de cette somme sont nuls (distinguer suivant que $k < n$ ou $k \geqslant n$).
3) Soit x un élément tel que $x^n = 0$. Calculer $(1 - x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

21 **1)** $\forall x \in A \quad (x + x)^2 = x + x$. Développer et simplifier pour aboutir à $x + x = 0$.
2) $\forall x \in A \quad (x + y)^2 = x + y$. Développer et simplifier pour aboutir à $xy + yx = 0$. En déduire que $xy = yx$.

22 Soit $(x, y) \in G^2$. $(xy)^n = xy(xy)^{n-1} = xyx^{n-1}y^{n-1} = x^n y^n$.
En simplifiant à gauche par x et à droite par y^{n-1} : $yx^{n-1} = x^{n-1}y$.
De même, $yx^n = x^n y$. D'où : $yx^n = (yx^{n-1})x = x^{n-1}yx = x^n y$.
En simplifiant à gauche par x^{n-1} : $yx = xy$. G est abélien.

Chapitre 12

1 **a)** Faux, mais $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. **b)** Vrai. **c)** Vrai. **d)** Faux : *cf.* ex. 7 **e)** Vrai. **f)** Faux : ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. **g)** Vrai. **h)** Vrai. **i)** Faux ; ex : $\mathrm{Id}_E + (-\mathrm{Id}_E) = 0$. **j)** Vrai.

2 **a)** Non, l'addition n'est pas associative et n'a pas d'élément neutre.
b) Non, les propriétés EV3 et EV4 ne sont pas vérifiées.
c) Non, la propriété EV1 n'est pas vérifiée.

d) Non, la propriété EV4 n'est pas vérifiée.
e) Non, tous les éléments n'ont pas un symétrique pour l'addition. Les propriétés EV1 et EV2 ne sont pas vérifiées.
f) Non, l'addition n'a pas d'élément neutre et la propriété EV1 n'est pas vérifiée.

3 Vérifier soigneusement les propriétés EV1, EV2, EV3 et EV4.

4 **a)** Oui, c'est $\text{Vect}\{(1,-1)\}$. **b)** Non, il ne contient pas $(0,0)$. **c)** Non, il n'est pas stable par addition. **d)** Oui, c'est $\text{Vect}\{(0,1)\}$. **e)** Non, il n'est pas stable par multiplication par les réels. **f)** Oui, c'est $\text{Vect}\{(-3,2)\}$.

5 **a)** Il n'est pas stable par multiplication par les réels.
b) Il n'est pas stable par addition.
c) C'est un sous-espace vectoriel.
d) C'est un sous-espace vectoriel.
e) C'est un sous-espace vectoriel.
f) C'est un sous-espace vectoriel.
g) Il n'est pas stable par addition.
h) C'est un sous-espace vectoriel.

6 **a)** Il n'est pas stable par multiplication par les réels.
b) C'est un sous-espace vectoriel.
c) C'est un sous-espace vectoriel.
d) C'est un sous-espace vectoriel.
e) Il n'est pas stable par addition (considérer, par exemple, les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin \pi x$). En revanche, l'ensemble des fonctions T-périodiques (pour T fixé) est un sous-espace vectoriel de R^R.
f) C'est un sous-espace vectoriel.
g) C'est un sous-espace vectoriel.
h) C'est un sous-espace vectoriel.

7 Soit F et G deux s.e.v. de E tels que $F \cup G$ soit un s.e.v. de E. Supposer qu'il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$ et $y \in G$ tel que $y \notin F$, et essayer d'aboutir à une contradiction. La réciproque est évidente.

8 **a)** On peut montrer que :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H),$$

mais l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie (chercher des exemples dans $\mathbb{R}^2$).
b) On peut montrer que :

$$F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H),$$

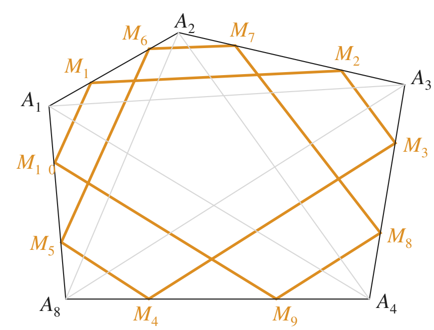
mais l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie (idem).
c) Montrer la double inclusion.

9 **1)** Soit A un point de F et B un point de G. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ appartient à $\overrightarrow{E}$; on peut donc le décomposer en somme d'un élément de $\overrightarrow{F}$ et d'un élément de $\overrightarrow{G}$. En déduire l'existence d'un point C appartenant à $F \cap G$.

2) $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \overrightarrow{F \cap G} = \{\vec{0}\}$, donc $F \cap G$ est un singleton.

3) Soit H et H' deux hyperplans disjoints. Supposons que $\overrightarrow{H} \neq \overrightarrow{H'}$; alors $\overrightarrow{H'}$ contient au moins une droite supplémentaire de $\overrightarrow{H}$, donc $\overrightarrow{H} + \overrightarrow{H'} = \overrightarrow{E}$. Le résultat de la question **1** conduit à une contradiction avec l'hypothèse. Donc $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H'}$: H et H' sont parallèles.

10 Si M_1 est le barycentre de $(A_1, a), (A_2, b)$, alors M_2 est le barycentre de $(A_2, b), (A_3, a)$ (conservation du barycentre par une projection). En poursuivant le même raisonnement, on trouve que M_6 est le barycentre de $(A_1, b), (A_2, a)$. Si $a = b$, c'est-à-dire si M_1 est le milieu de $[A_1A_2]$, $M_6 = M_1$ et la suite (M_n) est 5-périodique. Sinon, on refait un tour : $M_{11} = M_1$ et la suite est 10-périodique *(cf. Doc.)*.



11 **1)** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-\alpha + \beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AG_1}$, d'où $G \in (AG_1)$.
De même, $G \in (AG_2)$ et $G \in (AG_3)$.

2) $\overrightarrow{AG_2} = \dfrac{-\alpha - \beta + \gamma}{\alpha - \beta + \gamma}\overrightarrow{AG_3}$, d'où $A \in (G_2G_3)$.
De même $B \in (G_3G_1)$ et $C \in (G_1G_2)$.

12 **a)** Oui. **b)** Non. **c)** Oui. **d)** Oui. **e)** Oui.

13 **1)** $(x, y) = x\,e_1 + y\,e_2$.

2) D'après **1)**, il existe $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(e_1) = a\,e_1 + c\,e_2$, et $(b, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(e_2) = b\,e_1 + d\,e_2$. En déduire $f(x, y)$.

3) Vérification facile.

14 $(x, y, z) = (x - y)(1, 0, 0) + (y - z)\ (1, 1, 0) + z(1, 1, 1)$, donc si f existe, on doit avoir :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x - y)(0, 1) + (y - z)(1, 0) + z(1, 1) \\ &= (y, x - y + z) \end{aligned}$$

Réciproquement, l'application f :

$$(x, y, z) \mapsto (y, x - y + z) \text{ convient.}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad y = 0\ ;\ x + z = 0\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1, 0, -1).\} \end{aligned}$$

$(x', y') \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si le système

$$\begin{cases} y = x' \\ x - y + z = y' \end{cases}$$

a au moins une solution ; donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

15 Déterminer α et β tels que $(x, y) = \alpha(1, 2) + \beta(2, 1)$ et procéder comme dans l'exercice précédent. On obtient :

$$\operatorname{Ker} f = \{0\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x - y + z = 0\}$$

16 **1.a)** On suppose : $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$. L'inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ est évidente.
Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; décomposer x sur $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ et conclure.
b) On suppose $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$. Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f^2$. Il existe donc $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$; montrer que $x - f(t) \in \operatorname{Ker} f$ et conclure.
2.a) On suppose $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
L'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ est évidente.
Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$.
Montrer que $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ et conclure.
b) On suppose $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$. Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; montrer que $x \in \operatorname{Ker} f^2$ et conclure.

17 **1)** Montrer que $(\mathrm{Id}_E - p)^2 = \mathrm{Id}_E - p$.
2) $\operatorname{Im}\ (\mathrm{Id}_E - p) = \operatorname{Ker} p \qquad \operatorname{Ker}\ (\mathrm{Id}_E - p) = \operatorname{Im} p$.

18 Si l'on suppose que $u \circ p = p \circ u$, on montre facilement que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u.
Réciproquement, on suppose que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par u. Tout élément x de E se décompose de façon unique en $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} p$. On en déduit $u(x) = u(x_1) + u(x_2)$ avec toujours $u(x_1) \in \operatorname{Im} p$ et $u(x_2) \in \operatorname{Ker} p$. Comparer $u \circ p\ (x)$ et $p \circ u\ (x)$.

19 Il est clair que $pq = p \Rightarrow \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$. Réciproquement, on suppose que $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$. Tout élément x de E se décompose de façon unique en $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} q$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} q$. Comparer $pq(x)$ et $p(x)$.
Même démarche pour la seconde équivalence.

20 **1)** $\quad (p + q)^2 = p + q \quad \Longleftrightarrow \quad pq + qp = 0 \quad (1)$.
Si $pq = qp = 0$, on en déduit que $p + q$ est un projecteur.
Réciproquement, comparer les égalités obtenues en composant (1) par p à droite ou à gauche ; en déduire $pq = qp = 0$.
2) Montrer d'abord que $\operatorname{Im}\ p \cap \operatorname{Im}\ q = \{0\}$. L'inclusion $\operatorname{Im}\ (p + q) \subset \operatorname{Im}\ p + \operatorname{Im}\ q$ est évidente. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im}\ p + \operatorname{Im}\ q$. Il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x = p(x_1) + q(x_2)$. En composant cette égalité par p ou par q, montrer que $x = (p + q)(x)$.
De même, l'inclusion $\operatorname{Ker}\ p \cap \operatorname{Ker}\ q \subset \operatorname{Ker}\ (p + q)$ est évidente. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}\ (p + q)$:

$$p(x) + q(x) = 0\ ; \text{ composer par } p \text{ ou par } q.$$

21 **1)** Voir *Application* 4.
2) Développer :

$$(f - \alpha\mathrm{Id}_E)(f - \beta\mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad (f - \beta\mathrm{Id}_E)(f - \alpha\mathrm{Id}_E).$$

3) Pour tout $x \in E$, montrer que x est combinaison linéaire de $(f - \alpha\mathrm{Id}_E)(x)$ et $(f - \beta\mathrm{Id}_E)(x)$. En déduire que $E = \operatorname{Ker}\ (f - \alpha\mathrm{Id}_E) + \operatorname{Ker}\ (f - \beta\mathrm{Id}_E)$ et montrer que la somme est directe.
4) Décomposer x sur les s.e.v. supplémentaires trouvés : $x = p(x) + q(x)$, puis appliquer f.
5) Récurrence.
6) $f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta\mathrm{Id}_E = 0$, d'où :

$$f\big(f - (\alpha + \beta)\mathrm{Id}_E\big) = -\alpha\beta\mathrm{Id}_E$$

et

$$\big(f - (\alpha + \beta)\mathrm{Id}_E\big)f = -\alpha\beta\mathrm{Id}_E\ .$$

Comme $\alpha\beta \neq 0$, f est inversible à droite et à gauche, et $f^{-1} = f - (\alpha + \beta)\mathrm{Id}_E = \dfrac{1}{\alpha}p + \dfrac{1}{\beta}q$.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}\ f^{-n} = \alpha^{-n}p + \beta^{-n}q$. Donc, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f^m = \alpha^m p + \beta^m q$.

22 **1)** Il est clair que $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in E$. On cherche s'il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. On aurait alors $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = ix_1 - ix_2$. En déduire les expressions nécessaires de x_1 et x_2 et vérifier qu'on a bien $x_1 \in F$, $x_2 \in G$ et $x = x_1 + x_2$.
2) Soit p la projection sur F parallèlement à G, et q la projection sur G parallèlement à F. Vérifier que : $f = ip - iq$.

23 f est bien une symétrie puisque :
$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f \circ f(P) = P(1 - (1 - X)) = P(X)$.
Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$,

$$\begin{aligned} f(P)(X) &= a_2(1 - X)^2 + a_1(1 - X) + a_0 \\ &= a_2X^2 - (2a_2 + a_1)X + (a_2 + a_1 + a_0) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(P) = P &\Longleftrightarrow -(2a_2 + a_1) = a_1 \text{ et } a_2 + a_1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow a_2 + a_1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow P = a_2(X^2 - X) + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(P) = P &\iff a_2 = 0,\ (2a_2 + a_1) = a_1 \text{ et } a_2 + a_1 + a_0 = -a_0 \\ &\iff a_2 = 0 \text{ et } a_1 = -2a_0 \\ &\iff P = a_0(-2X + 1) \end{aligned}$$

$\text{Ker } (f - \text{Id}) = \text{Vect}(X^2 - X, 1)$ et $\text{Ker } (f + \text{Id}) = \text{Vect}(1 - 2X)$

24 **1)** Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda P + \mu Q &= (\lambda P + \mu Q)(X + 1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X + 1) + \mu Q(X + 1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q) \end{aligned}$$

Ce qui établit la linéarité de l'application Δ.
$\text{Ker } \Delta = \{P\ P(X + 1) = P(X)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes périodiques de période 1.
En particulier, si $P \in \text{Ker } \Delta$, le polynôme $Q = P - P(0)$ s'annule pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et donc est le polynôme nul : $P = P(0)$.
La réciproque est immédiate : $\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]$, ensemble des polynômes constants.
2) Remarquons tout d'abord que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ, Δ induit donc un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté $\widetilde{\Delta}$.
Cet endomorphisme a pour noyau $\text{Ker } \Delta \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$, il n'est donc pas injectif.
D'autre part, $P(X + 1)$ et $P(X)$ ont même terme dominant, ce qui prouve que $\deg(\Delta(P)) < \deg(P)$ et donc $\text{Im } (\widetilde{\Delta}) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\widetilde{\Delta}$ n'est pas surjectif (au chapitre 25, le théorème du rang vous permettra de conclure plus rapidement).
3) Soit P, de degré $n > 3$ tel que $\Delta(P) = X^3$. Remarquons que $\Delta(X^p) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k$ est de degré $p - 1$, nous cherchons donc P de degré 4 et, par exemple, de terme constant nul : $P = \sum_{p=1}^{4} a_p X^p$.

Alors :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= a_4(4X^3 + 6X^2 + 4X + 1) + a_3(3X^2 + 3X + 1) \\ &\quad + a_2(2X + 1) + a_1 \\ &= 4a_4X^3 + (6a_4 + 3a_3)X^2 + (4a_4 + 3a_3 + 2a_2)X \\ &\quad + (a_4 + a_3 + a_2 + a_1). \end{aligned}$$

$\Delta(P) = X^3$ donne alors successivement $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$ et $a_1 = 0$: $\quad P(X) = \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2$
Nous pouvons en déduire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} P(k + 1) - P(k) \\ &= P(n + 1) - P(1) \\ &= \frac{1}{4}(n + 1)^4 - \frac{1}{2}(n + 1)^3 + \frac{1}{4}(n + 1)^2 \\ &= \frac{n^2(n + 1)^2}{4}. \end{aligned}$$

4) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X + k)(-1)^{n-k}.$$

- la propriété est vraie pour $n = 1$:

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} P(X + k)(-1)^{n-k}.$$

- soit $n \geqslant 1$ tel que : $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X + k)(-1)^{n-k}$, alors :

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(P) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X + k + 1)(-1)^{n-k} \\ &\qquad - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X + k)(-1)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} P(X + k)(-1)^{n+1-k} \\ &\qquad - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X + k)(-1)^{n-k} \\ &= P(X + n + 1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) P(X + k)(-1)^{n+1-k} \\ &\qquad + (-1)^n P(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P(X + k)(-1)^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Ce qui établit la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

25 **1)** Soit $u \in A_k$ inversible, alors $u(u - k\text{Id}_E) = 0 \Rightarrow u^{-1}u(u - k\text{Id}_E) = 0$, c'est-à-dire $u = k\text{Id}_E$. Réciproquement, $u = k\text{Id}_E$ est inversible si et seulement si $k \neq 0$.
Donc $u \in A_k$ est inversible si si et seulement si $u = k\text{Id}_E$, $k \neq 0$; son inverse est alors $u^{-1} = \frac{1}{k}\text{Id}_E$.
2) Soit $x \in \text{Im } u$: $\exists t \in E \quad x = u(t)$, d'où :

$$u(x) = u^2(t) = ku(t) = kx.$$

Réciproquement, si $u(x) = kx$, $k \neq 0$, alors $x = \frac{1}{k}u(x)$, ce qui prouve que $x \in \text{Im } u$.
Soit $x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$: $u(x) = 0$ et $u(x) = kx$, d'où immédiatement $x = 0$ puisque $k \neq 0$; ce qui prouve que Ker u et Im u sont en somme directe.
De plus, pour tout $x \in E$:

$$x = \frac{1}{k}(kx - u(x)) + \frac{1}{k}u(x) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{k}(kx - u(x)) \in \text{Ker } u$$

et

$$\frac{1}{k}u(x) \in \text{Im } u.$$

Ce qui prouve que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.
Si $k = 0$, $u^2 = 0$, ce qui équivaut à $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.
3) à vous : c'est l'occasion de reprendre les raisonnements mis en oeuvre dans l'exercice 20.

Chapitre 13

1 **a)** Faux ; exemple :

$$(X^2 + X + 1) + (-X^2 + X + 1) = 2X + 1.$$

b) Vrai.
c) Faux ; exemple : aucun des polynômes $X^2 + X$ et $X^2 - X$ ne divise l'autre, mais ils ne sont pas premiers entre eux. **d)** Faux ; D est un **multiple** de $A \wedge B$. **e)** Faux ; exemple : $X^3 - X$ est divisible par $X^2 + X$ et par $X^2 - X$, mais pas par $(X^2 + X)(X^2 - X)$.

f) Vrai. **g)** Faux ; exemple : X^4+1 n'a pas de racines réelles, mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$: $X^4+1=(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$ **h)** Faux ; X^n a une seule racine (mais elle est d'ordre n). **i)** Vrai.

2 On peut le démontrer par récurrence ou voir directement que :

$$(X^3+X^2+X+1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kX^k$$
$$=\sum_{k=3}^{2n+3}(-1)^{k-3}X^k+\sum_{k=2}^{2n+2}(-1)^{k-2}X^k$$
$$+\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}X^k+\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kX^k$$

ce qui se simplifie par effet « téléscopique ».

3 **1)** Chaque polynôme est entièrement déterminé par les deux précédents.
2) $P_{10}=512X^{10}-1280X^8+1120X^6-400X^4+50X^2-1$
3) Récurrence à deux niveaux : montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos 0x=P_0(\cos x)$, $\cos 1x=P_1(\cos x)$, et que :
$(\cos nx=P_n(\cos x)$ et $\cos(n+1)x=P_{n+1}(\cos x))$
$\Longrightarrow\quad \cos(n+2)x=P_{n+2}(\cos x)$
4) Chercher d'abord les racines de P_n appartenant au segment $[-1,1]$ sous la forme $x=\cos t$. Montrer ensuite qu'il n'y a pas d'autre racine (raisonner sur le degré de P_n).

4 $P=0$ est solution. Si P est non nul de degré n, $P(X^2)$ est de degré $2n$ et $(X^2+1)P(X)$ de degré $n+2$, d'où $n=2$. Chercher P sous la forme aX^2+bX+c. Solutions : $a(X^2-1)$, $a\in\mathbb{R}$.

5 **1)** $A=B(2X^2+3X+11)+5(5X-1)$.
2) $A=B(2X^4-6X^3+13X^2-39X+109)-327$.
3) $A=B(X^2+(1-2i)X-2-3i)-5-i$.
4) $A=B\left(\dfrac{-1+i}{2}X^2-\dfrac{1}{2}X+\dfrac{1+3i}{4}\right)+\left(\dfrac{5+9i}{4}X+\dfrac{3-2i}{2}\right)$.

6 **1)** $P(X)=(X-a)Q(X)+P(a)$.
$(X-a)$ divise P si et seulement si $P(a)=0$.
2) $P(X)=(X-a)^2Q(X)+(X-a)P'(a)+P(a)$
$(X-a)^2$ divise P si et seulement si $P(a)=P'(a)=0$.
3) $P(X)=(X-a)(X-b)Q(X)+\alpha X+\beta$ où $\alpha=\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ et $\beta=\dfrac{aP(b)-bP(a)}{a-b}$.
$(X-a)(X-b)$ divise P si et seulement si $P(a)=P(b)=0$.

7 $X^4+aX^2+bX+c=$
$(X^2+X+1)(X^2-X+a)+\big((-a+b+1)X-a+c\big)$.
B divise A si et seulement si $a=c=b+1$.

8 Montrer que $A_n(1)=A_n'(1)=0$ (*cf. ex.* 6). Vérifier que :

$$A_n(X)=(X-1)^2\big(nX^{n-1}+(n-1)X^{n-2}+\cdots+2X+1\big)$$

9 Remarquer que dans $\mathbb{C}[X]$,
$X^2-2X\cos\theta+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ et utiliser le résultat de la question **3.** de l'*exercice* 6. Vérifier que :

$$A_n(X)=(X^2-2X\cos\theta+1)\sum_{k=0}^{n-2}\sin(n-1-k)\theta\,X^k$$

10 **1)** Posons : $n=mq+r$ avec $0\leqslant r<m$. On en déduit :

$$\begin{aligned}X^n-1&=(X^m)^q\cdot X^r-1\\&=\Big((X^m)^q-1\Big)X^r+(X^r-1)\\&=(X^m-1)\Big(\sum_{k=0}^{q-1}X^{mk}\Big)X^r+\big(X^r-1\big)\end{aligned}$$

Comme $\deg(X^r-1)<\deg(X^m-1)$, il s'agit bien de la division euclidienne de X^n-1 par X^m-1.
2) En effectuant l'algorithme d'Euclide en parallèle sur les entiers et les polynômes, on obtient : $(X^n-1)\wedge(X^m-1)=X^{n\wedge m}-1$.
3) Remarquer que : $A(X)(X-1)=X^{48}-1$ et $B(X)(X-1)=X^{15}-1$, et utiliser la question précédente pour montrer que : $A\wedge B=X^2+X+1$.

11 L'algorithme d'Euclide donne la solution particulière :

$$(X^7-X-1)(X^4-X^2+X)+(X^5+1)(-X^6+X^4-X^3+X+1)=1$$

La solution générale est : $U=X^4-X^2+X+(X^5+1)P$,

$$V=-X^6+X^4-X^3+X+1-(X^7-X-1)P$$

où $P\in\mathbb{K}[X]$.

12 Soit $D=A\wedge B$. Il existe des polynômes A' et B' tels que $A=DA'$, $B=DB'$ et $A'\wedge B'=1$.
1) Si A et B ne sont pas premiers entre eux, $\deg(D)>0$, donc $\deg(A')<\deg(A)$ et $\deg(B')<\deg(B)$. Les polynômes $U=B'$ et $V=-A'$ conviennent.
2) Réciproquement, si $AU+BV=0$, $A'U+B'V=0$.
D'après le théorème de Gauss, A' divise V, donc

$$\deg(A')\leqslant\deg(V)<\deg(A),$$

d'où $\deg(D)>0$.

13 De $P+1=(X^2+1)U$ et $P-1=(X^3+1)V$, on tire :

$$(X^2+1)U-(X^3+1)V=2$$

On en déduit U et V, puis :

$$P=-X^4-X^3-X+(X^2+1)(X^3+1)Q$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

14 **1)** $(X-a)^{2n}$ et $(X-b)^{2n}$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe U et V tels que $(X-a)^{2n}U+(X-b)^{2n}V=1$. La division euclidienne de U par $(X-b)^{2n}$ et de V par $(X-a)^{2n}$ donne deux polynômes vérifiant la même relation avec la condition de degré imposée. Vérifier l'unicité.
2) En changeant X en $a+b-X$, on obtient :

$$(X-b)^{2n}P(a+b-X)+(X-a)^{2n}Q(a+b-X)=1$$

$P_1=P(a+b-X)$ et $Q_1=Q(a+b-X)$ sont des polynômes de degré strictement inférieur à $2n$. Du fait de l'unicité de la solution de la question **1)**, $P_1=Q$ et $Q_1=P$.

15 a, b, c sont trois racines distinctes du polynôme $P-1$, dont le degré est inférieur ou égal à 3. En faisant $X=0$, on obtient : $\lambda=\dfrac{1}{abc}$.

16 **1)** Penser au théorème de Rolle.
2) Une racine double du polynôme P^2+1 doit être racine de son polynôme dérivé $2PP'$. Or les racines de P et de P' sont toutes réelles, tandis que celles de P^2+1 ne sont pas réelles. Ainsi, P^2+1 n'a que des racines simples.
Le polynôme $P=X^2-i$ a 2 racines distinctes, alors que $P^2+1=X^4-2iX^2$ admet 0 pour racine double.

17 Chercher le P.G.C.D. de P et P'.

$$P=(X-5)(2X+1)^2$$

18 Chercher le P.G.C.D. de P et Q.
$P=(X-2)(X-3)(X-4) \quad Q=(X+1)(X-3)(X-5)$

19
$$\begin{aligned}P&=(X^2-X+1)^2-i^2\\&=(X^2-X+1-i)(X^2-X+1+i)\\&=(X+i)(X-1-i)(X-i)(X-1+i)\end{aligned}$$
En regroupant les facteurs conjugués :

$$P=(X^2+1)(X^2-2X+2)$$

20
$$\begin{aligned}A&=B(X^2+3X+1)-6=B(B+1)-6\\&=B^2+B-6=(B+3)(B-2)\end{aligned}$$
dans $\mathbb{Q}[X]$:
$A=(X^2+3X+3)(X^2+3X-2)$
dans $\mathbb{R}[X]$:
$A=(X^2+3X+3)(X+\dfrac{3-\sqrt{17}}{2})(X+\dfrac{3+\sqrt{17}}{2})$
dans $\mathbb{C}[X]$:
$A=(X+\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2})(X+\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2})(X+\dfrac{3-\sqrt{17}}{2})(X+\dfrac{3+\sqrt{17}}{2})$

21 $P=(X^2+3aX+a^2)^2$.
On en déduit $Q=P-9a^4=(X^2+3aX-2a^2)(X^2+3aX+4a^2)$
dans $\mathbb{R}[X]$:
$Q=\left(X+\dfrac{a}{2}(3+\sqrt{17})\right)\left(X+\dfrac{a}{2}(3-\sqrt{17})\right)(X^2+3aX+4a^2)$
dans $\mathbb{C}[X]$: $Q=\left(X+\dfrac{a}{2}(3+\sqrt{17})\right)\left(X+\dfrac{a}{2}(3-\sqrt{17})\right)\left(X+\dfrac{a}{2}(3+i\sqrt{7})\right)\left(X+\dfrac{a}{2}(3-i\sqrt{7})\right)$

22 Toute racine double de P est racine de $P-P'$.

23 Soit $(a_1, m_1), \cdots, (a_k, m_k)$ les racines complexes du polynôme P', affectées de leur ordre de multiplicité.

$$\deg(P')=\sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Si P' divise P, toute racine de P' est racine de P : a_i est alors racine d'ordre m_i+1 du polynôme P. On en déduit $\deg(P) \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(m_i+1)$.
D'où $\deg(P)-\deg(P') \geqslant k$, c'est-à-dire $k \leqslant 1$. P' a donc au plus une racine, qui est aussi racine de P : $P=\lambda(X-a)^p$. Réciproquement, cette condition est suffisante pour que P' divise P.

24 **1)** Soit α une racine de P. On montre facilement que $(\alpha+1)^2$ et $(\alpha-1)^2$ sont racines de P. Or $(\alpha+1)^2-(\alpha-1)^2=4\alpha$, d'où $|(\alpha+1)^2|+|(\alpha-1)^2| \geqslant 4|\alpha|$.
L'une au moins des deux racines $(\alpha+1)^2$ ou $(\alpha-1)^2$ a donc un module strictement supérieur à $|\alpha|$.
2) Dès que P possède une racine, il en possède une infinité. C'est donc un polynôme constant (soit il n'a aucune racine, soit il en a une infinité). Les seules constantes vérifiant la condition donnée sont 0 et 1.

25 a, b, c vérifient :

$$\begin{cases} a+b+c=-p\\ ab+bc+ca=q\\ abc=-r\end{cases}$$

1) On en déduit :

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2=p^2-2q\\&a^3+b^3+c^3=-p^3+3pq-3r\\&a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr\\&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-\frac{q}{r}\\&\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}\end{aligned}$$

2) $Q(X) = X^3 - (a^2+b^2+c^2)X^2 + (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)X - a^2b^2c^2$

$$= X^3 - (p^2-2q)X^2 + (q^2-2pr)X - r^2$$

26 Les racines de ce polynôme sont $a-r, a, a+r$. Utiliser la somme des racines pour trouver a, et le produit des racines pour trouver r.
$P = (2X-3)(2X-1)(2X+1)$.
Vérifier que les racines sont bien en progression arithmétique.

27 Utiliser la somme des trois racines pour trouver la troisième racine, puis factoriser. On obtient $\lambda = -3$.

28 Les racines de ce polynôme sont $a, 2a, b$ avec : $3a+b=0$ et $2a^2+3ab=-7$.
On obtient ($a=1$ et $\lambda=6$) ou ($a=-1$ et $\lambda=-6$).

29 $X^2+X+1 = (X-j)(X-\bar{j})$;
$P(X) = (X+1)^n + X^n + 1$ est divisible donc par X^2+X+1 si et seulement si j et $\bar{j}$ sont racines de $P(X)$, c'est-à-dire si et seulement si $P(j)=0$ puisque $P \in \mathbb{R}[X]$. Or :

$$P(j) = (j+1)^n + j^n + 1 = (-j^2)^n + j^n + 1$$

- pour $n = 3p$, $\quad p \in \mathbb{Z}$, $\quad P(j) = (-1)^n + 2 \neq 0$;
- pour $n = 3p+1$, $\quad p \in \mathbb{Z}$, $\quad P(j) = (-1)^n j^2 + j + 1$, donc $P(j) = 0$ si et seulement si n est pair, soit $n = 6q+2$;
- pour $n = 3p+2$, $\quad p \in \mathbb{Z}$, $\quad P(j) = (-1)^n j + j^2 + 1$, donc $P(j) = 0$ si et seulement si n est pair, soit $n = 6q+4$.

L'ensemble solution est donc $\{6q+2, \quad 6q+4, \quad q \in \mathbb{Z}\}$.

30 Écrivons la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2(X-2)$:

$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad X^n = (X-1)^2(X-2)Q(X) + R(X)$$

avec $\deg(R) < 3$
Notons alors $R(X) = aX^2+bX+c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^n = (x-1)^2(x-2)Q(x) + ax^2+bx+c \quad (*)$$

En particulier, pour $x=1$ et $x=2$:

$$1 = a+b+c \quad \text{et} \quad 2^n = 4a+2b+c$$

Dérivons alors $(*)$ pour utiliser le fait que 1 est racine double de $(X-1)^2(X-2)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad nx^{n-1} = (x-1)[2(x-2)Q(x) + (x-1)Q(x) + (x-1)(x-2)Q'(x)] + 2ax + b$$

En particulier pour $x=1$: $n = 2a+b$.
Nous avons alors :

$$\begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 4a+2b+c &= 2^n \\ 2a+b &= n \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -1-n+2^n \\ b &= 2+3n-2^{n+1} \\ c &= -2n+2^n \end{cases}$$

D'où :

$$R(X) = (-1-n+2^n)X^2 + (2+3n-2^{n+1})X - 2n + 2^n$$

31

$$\begin{aligned}(\cos 7\theta + i\sin 7\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^7 \\ &= (\cos^7\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta \\ &\quad +35\cos^3\theta\sin^4\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta) \\ &\quad +i(7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta \\ &\quad +21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta)\end{aligned}$$

D'où, pour $\theta \notin \left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{14},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\tan(7\theta) = \frac{7\tan\theta - 35\tan^3\theta + 21\tan^5\theta - \tan^7\theta}{1 - 21\tan^2\theta + 35\tan^4\theta - 7\tan^6\theta}$$

Notons $P(X) = 7 - 35X + 21X^2 - X^3$,
$\tan(7\theta) = 0$ et $\tan\theta \neq 0 \iff P(\tan^2\theta) = 0$; d'où les racines de P :

$$\tan^2\frac{\pi}{7}, \tan^2\frac{2\pi}{7}, \tan^2\frac{3\pi}{7}$$

et :

$$P(X) = \left(X - \tan^2\frac{\pi}{7}\right)\left(X - \tan^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(X - \tan^2\frac{3\pi}{7}\right)$$

32 La linéarité de l'intégrale permet de se ramener au cas d'un monôme $P = X^n$, pour établir la première égalité.
On a ensuite :

$$\sum_{j,k}\frac{a_j a_k}{j+k+1} = \int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^1 P(t)^2\mathrm{d}t = \left|\int_0^\pi P(e^{i\theta})^2 e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$\leqslant \int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

Comme P est à coefficients réels, $\left|P(e^{i\theta})\right|^2 = P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})$, d'où :

$$\int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_j a_k \int_{-\pi}^\pi e^{i(j-k)\theta}\mathrm{d}\theta$$

Si $j \neq k$, $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi e^{i(j-k)\theta}\mathrm{d}\theta = 0$; d'où :

$$\int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n 2\pi a_k^2$$

Chapitre 14

1 **a)** Vrai. **b)** Vrai. **c)** Vrai. **d)** Faux ; $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^k}$.
e) Vrai. **f)** Faux. **g)** Vrai. **h)** Vrai.

2 **a)** $\dfrac{X^5+1}{X^2-1} = \dfrac{X^4-X^3+X^2-X+1}{X-1}$

$$= X^3 + X + \frac{1}{X-1}$$

b) $\dfrac{X^4+X^2+1}{X^3-1} = \dfrac{X^2-X+1}{X-1} = X + \dfrac{1}{X-1}$

c) $\dfrac{X^4-X^3-X-1}{X^3-X^2+X-1}=\dfrac{X^2-X-1}{X-1}=X-\dfrac{1}{X-1}$

3 **a)** $-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{2(X-1)}+\dfrac{1}{2(X+1)}$
b) $1+\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{8}{X-2}+\dfrac{27}{2(X-3)}$
c) $1+\dfrac{3}{X-1}+\dfrac{3}{(X-1)^2}+\dfrac{2}{(X-1)^3}$
d) $-\dfrac{1}{4(X+2)}+\dfrac{1}{4X}+\dfrac{1}{2X^2}$
e) $\dfrac{2}{X+1}-\dfrac{2}{X}+\dfrac{2}{X^2}-\dfrac{1}{X^3}$

4 **a)** $\dfrac{-X}{2(X^2+1)}+\dfrac{1}{4(X+1)}+\dfrac{1}{4(X-1)}$
b) $-\dfrac{1}{X}+\dfrac{2}{3(X+1)}+\dfrac{X+1}{3(X^2-X+1)}$
c) $\dfrac{X-1}{X^2+X+1}+\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2}$

5 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ et en déduire que :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+1)}\end{aligned}$$

d'où : $S_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)}+\dfrac{1}{2(n+2)}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$

6 $F=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{X+k}$ avec :

$$c_k=\frac{n!}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)}=(-1)^k\binom{n}{k}$$

La somme proposée est $F(1)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n+1}$.

7 **1)** $\dfrac{P}{Q}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{X-k}$. Les pôles étant simples :

$c_k=\dfrac{P(k)}{Q'(k)}=\dfrac{P(k)}{(-1)^{n-k}k!(n-k)!}$

2) La somme demandée est

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^n c_k=(-1)^n\lim_{x\to\infty}\frac{x\,P(x)}{Q(x)}=(-1)^n$

3) En supposant que $\forall k\in[\![0,n]\!]\quad |P(k)|<\dfrac{n!}{2^n}$, on démontre que la valeur absolue de la somme précédente est strictement inférieure à 1, ce qui est absurde.

8 **1)** $\dfrac{1}{X\,P(X)}=\dfrac{1}{X\,P(0)}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k\,P'(x_k)}\cdot\frac{1}{X-x_k}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k\,P'(x_k)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{P(x)}-\frac{1}{P(0)}=-\frac{1}{P(0)}$,
car $\deg P=n\geqslant 1$.

9 $\dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{X-x_k}$ (*cf. Application* 1).

Dériver cette expression et constater que $P'^{\,2}-PP''$ est toujours strictement positif.

10 **1)** Posons $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$.

La somme des racines de P est : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

De même, la somme des racines de P' est :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i=-\frac{(n-1)a_{n-1}}{n\,a_n}$.

On en déduit :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i}{n-1}$$

ce qui signifie que les (A_i) et les (B_i) ont le même isobarycentre. Par récurrence, c'est l'isobarycentre des racines de n'importe quelle dérivée successive de P. C'est donc l'unique racine de $P^{(n-1)}$.

2) Les racines de P étant simples : $\dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-\alpha_i}$

3) $\forall i\in[\![1,n-1]\!]\quad \dfrac{P'}{P}(\beta_i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta_i-\alpha_j}=0$

4) En conjuguant cette égalité, on obtient :

$$\forall i\in[\![1,n-1]\!]\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\overline{\beta_i-\alpha_j}}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_i-\alpha_j}{|\beta_i-\alpha_j|^2}=0$$

ce qui signifie que B_i est barycentre du système $\left(A_j,\dfrac{1}{|\beta_i-\alpha_j|^2}\right)$.
Chaque point B_i est donc dans l'enveloppe convexe de $(A_1,\cdots,A_n)$.

Chapitre 15

1 **a)** Faux : $\varnothing$ est majoré. **b)** Faux : $\sup\{0\}=0$. **c)** Faux : $-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$. **d)** Vrai **e)** Faux : entre deux irrationnels distincts, il existe toujours un rationnel. **f)** Vrai. **g)** Vrai. **h)** Vrai.

2 Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+\quad x(1-x)\leqslant\dfrac{1}{4}$. Que peut-on en déduire pour le produit des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$?

3 On peut raisonner par récurrence ou directement écrire :

$$(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots\frac{1}{x_n}\right)=n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)$$

Or $\quad\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$; terminer le calcul...

4 **a)** $\sup E=1$; $\inf E=0$.

b) $\sup E = 1$; $\inf E = -1$
c) $\sup E = 1$; $\inf E = -1$

5 a est un minorant de l'intervalle $]b, +\infty[$, il est donc inférieur ou égal à sa borne inférieure.

6 **1)** $\sup B$ est un majorant de A, donc...
2) $A \cup B$ est non vide et majoré par $\max(\sup A, \sup B)$, donc il admet une borne supérieure et $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$. En utilisant 1., montrer que $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leqslant \sup(A \cup B)$. Conclure.
3) $A \cap B$ est majoré par $\min(\sup A, \sup B)$, mais il peut être vide : il n'a pas nécessairement de borne supérieure. S'il en a une, on peut seulement dire que :
$\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$, mais ce n'est pas nécessairement une égalité.

7 La partie A est majorée par tout élément b de B, donc elle admet une borne supérieure et $\forall b \in B \quad \sup A \leqslant b$. On en déduit que B est minoré par $\sup A$, etc. L'égalité n'est pas nécessaire (chercher des exemples).

8 La partie A possède une borne inférieure et une borne supérieure, et $\sup A - \inf A$ est un majorant de l'ensemble des distances entre deux éléments de A. On en déduit la première inégalité. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, $\inf A + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A et $\sup A - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, d'où l'existence de deux éléments x et y de A tels que...
Conclusion : $\sup A - \inf A$ est le plus petit majorant de l'ensemble des distances entre deux éléments de A : $d(A) = \sup A - \inf A$.

9 On remarque que :

$$x_n = (x_n - y_n) + y_n \leqslant |x_n - y_n| + y_n \leqslant \sup |x_n - y_n| + \sup y_n$$

Terminer tout seul...

10 $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$. Si $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ était rationnel, $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ le serait aussi, donc...

11 Si $\sqrt[n]{m} = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, $mq^n = p^n$: dans la décomposition en facteurs premiers de m, tous les exposants doivent être multiples de n.

12 Calculer a^3 et b^4...

13 Supposer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6} + r$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et élever au carré...

14 Montrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, \quad (1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

où a_n et b_n sont des entiers.

Montrer que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ et conclure en distinguant suivant la parité de n.

15 Tout intervalle I non vide et non réduit à un singleton contient un intervalle J **borné** non vide et non réduit à un singleton. J contient une infinité de rationnels, mais seulement un nombre fini de rationnels de dénominateur inférieur ou égal à 10^6. J contient donc une infinité de rationnels de dénominateur supérieur à 10^6.

L'ensemble des rationnels de dénominateur inférieur à 10^6 de l'intervalle $[x - 1, x]$ est fini ; il possède donc un plus grand élément r. Comme $x \notin \mathbb{Q}$, $r < x$. De même, l'ensemble des rationnels de dénominateur inférieur à 10^6 de l'intervalle $[x, x + 1]$ possède un plus petit élément $r' > x$. En choisissant $\varepsilon < \min(x - r, r' - x)$, on est sûr que les rationnels de l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ ont tous des dénominateurs supérieurs ou égaux à 10^6.

16 **1)** $\begin{cases} |2x| = |(x + y) + (x - y)| \leqslant |x + y| + |x - y| \\ |2y| = |(x + y) - (x - y)| \leqslant |x + y| + |x - y| \end{cases}$

Ajouter membre à membre...
2) Poser $x' = x - 1$ et $y' = y - 1$.

17 Distinguer 4 cas suivant la position de x par rapport à $E(x) + \dfrac{1}{2}$ et celle de y par rapport à $E(y) + \dfrac{1}{2}$.

18 **1)** En partant de $E(nx) \leqslant nx$, on obtient :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leqslant E(x).$$

En partant de $n\,E(x) \leqslant nx$, on obtient :

$$E(x) \leqslant E\left(\frac{E(nx)}{n}\right).$$

2) Poser $m = E(nx)$ et diviser m par n :

$$m = nq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < n.$$

Si $\quad r = 0 \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = nq = m = E(nx)$

Si $\quad r > 0 \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1-r} E(x + \frac{k}{n})$

$$+ \sum_{k=n-r}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = (n - r)q + r(q + 1) = nq + r = m = E(nx)$$

19 Montrer à l'aide de la formule du binôme que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.

20 Calculer $\dfrac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2}$ et montrer que :

$$\left|\frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right|$$

et que :

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2}\right) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right)$$

En partant de $\dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{2}$ et en réitérant le procédé, on aboutit à :

$$\frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} \quad \text{avec} \quad \left|\frac{99}{70} - \frac{239}{169}\right| \leqslant 8,5 \cdot 10^{-5}$$

Chapitre 16

1 **a)** Faux ; ex : $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$. **b)** Faux, sauf si $l = 0$, ex : $u_n = (-1)^n$. **c)** Vrai. **d)** Vrai. **e)** Faux. ; ex : $u_n = \dfrac{1}{n}$ $v_n = n$ **f)** Faux ; ex : $u_n = (-1)^n$ **g)** Faux. ; ex : $u_n = n$ $v_n = n+1$ **h)** Vrai. **i)** Faux ; ex : $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ or, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$ **j)** Vrai.

2 D'après l'Application 1, si la suite d'entiers convergeait, elle serait stationnaire, ce qui est contradictoire avec le fait qu'elle est strictement monotone. Donc cette suite diverge.

3 Considérer les suites extraites (x_{6n}) et (x_{6n+3}).

4 $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Minorer cette somme. (Combien a-t-elle de termes ? Quel est le plus petit ?)

5 Si (p_n) ne tendait pas vers l'infini, on pourrait en extraire une suite bornée, puis une suite convergente, donc stationnaire $(p_{\varphi(n)})$. La suite $(r_{\varphi(n)})$ serait également stationnaire, et x serait rationnel...
Même raisonnement si (q_n) ne tendait pas vers l'infini.

6 Si $\alpha = 2k\pi$, $u_n = 0$ et $v_n = 1$. Si $\alpha = (2k+1)\pi$, $u_n = 0$ et $v_n = (-1)^n$. Si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, supposons que (u_n) converge vers l. Utiliser $(u_n^2 + v_n^2)$, (u_{2n}) et (u_{n+1}) pour conclure à une contradiction.

7 Utiliser la formule du binôme.
D'où $\sin\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right) = -\sin\left((3-\sqrt{5})^n\pi\right)$ qui converge évidemment vers 0.

8 **a)** 1. **b)** 0. **c)** -1. **d)** 1. **e)** $\dfrac{x}{2}$. **f)** e. **g)** 1. **h)** 1. **i)** e^{-1}. **j)** 1.
k) Si cette suite d'entiers convergeait, elle serait stationnaire, et $\sqrt{2}$ serait rationnel. Cette suite est donc bornée et divergente.

9 **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **b)** $\dfrac{2}{n^2}$. **c)** $\dfrac{1}{n}$. **d)** $\dfrac{\ln n}{n}$. **e)** $\dfrac{1}{n}$.
f) $\sqrt{3}$. **g)** $\left(\sqrt{3}\right)^n e^{\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$. **h)** $\left(\sqrt{3}\right)^\pi$.

10 **a)** e^x. **b)** e^{-2}. **c)** e^x. **d)** e^8.

11 Démontrer l'inégalité indiquée par récurrence, puis essayer de l'utiliser pour $m = n$, $m = n-1$, $m = n-2$.
(Réponse : (x_n) converge vers 1.)

12 x_n est compris entre les racines d'un trinôme, donc la suite est bornée. Quelle est son sens de variation ?

13 **1)** Étudier les variations de la fonction $x \mapsto P_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) Utiliser $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + P_n(x)$.
3) Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique. Conclure en remarquant que $\forall n \geqslant 2 \quad \alpha_n \leqslant \alpha_2 < 1$
$\left(\text{Réponse : } (\alpha_n) \text{ converge vers } \dfrac{1}{2}.\right)$

14 Calculer $S_{n+1} - S_n$ et $S'_{n+1} - S'_n$.

15 Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[n, 2n]$. Conclusion : la limite commune des deux suites est $\ln 2$.

16 Calculer $S_{2n+2} - S_{2n}$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1}$.

17 N'est-ce pas qu'elles sont adjacentes ?

18 Montrer par récurrence que $u_n \leqslant v_n$, puis que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, qu'elles convergent et qu'elles ont la même limite.
Calculer u_1, v_1, u_2, v_2, etc. en fonction de b et α. Généraliser. On obtient :

$$v_n = b\cos\frac{\alpha}{2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n} = b\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

D'où : $$\lim_{n\to\infty} v_n = b\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

19 Montrer par récurrence que $u_n \leqslant v_n$, puis que (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, qu'elles convergent et qu'elles ont la même limite. Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n v_n = 2$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$.

20 $x_{n+1} + iy_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}(x_n + iy_n)$. La suite $(x_n + iy_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc elle converge vers 0, ainsi, par conséquent, que les suites réelles (x_n) et (y_n).

21 Si la suite (z_n) converge dans $\mathbb{C}$, sa limite l doit vérifier $l = \dfrac{i}{2}l + 1$. Montrer que cette équation admet une unique solution l_0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1} - l_0 = \dfrac{i}{2}(z_n - l_0)$.

Conclure.

22 Posons $1+\dfrac{z}{n}=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)+i\dfrac{y}{n}=r_n e^{i\theta_n}$, avec $r_n\in\mathbb{R}_+$ et $\theta_n\in]-\pi,\pi]$.

$$u_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=r_n^n e^{in\theta_n}$$

$$r_n=\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}}=\sqrt{1+\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=1+\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln r_n \underset{(n\to\infty)}{\sim}\frac{x}{n},\quad \text{donc :}\quad |u_n|=r_n^n=e^{n\ln r_n}\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}e^x$$

$$\tan\theta_n=\frac{y}{n+x}\underset{(n\to\infty)}{\sim}\frac{y}{n};\quad \text{d'où}\quad \theta_n\underset{(n\to\infty)}{\sim}\frac{y}{n}$$

$$\arg u_n=n\theta_n\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}y$$

En définitive, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=e^x\,e^{iy}=e^z$.

23 **1)** Non. Exemple : $u_n=\dfrac{1}{n}$ et $v_n=\dfrac{2}{n}$.
2) La suite (v_n) étant convergente, elle est majorée ; donc (u_n) est également majorée, et comme elle est croissante, elle converge. En passant à la limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$. De plus, comme (u_n) est croissante, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$, d'où $u_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

24 Considérons la suite complexe $z_n=u_n-jv_n$ où $j=e^{2i\pi/3}$. On remarque que :

$$\begin{aligned}|z_n|^2&=z_n\cdot\overline{z_n}=(u_n-jv_n)(u_n-\bar{j}v_n)\\&=u_n^2-(j+\bar{j})u_nv_n+j\bar{j}v_n^2=u_n^2+u_nv_n+v_n^2\end{aligned}$$

Donc $|z_n|^2$ converge vers 0 ; la suite complexe (z_n) converge vers 0. Or : Re $(z_n)=u_n+\dfrac{1}{2}v_n$ et Im $(z_n)=-\sqrt{3}v_n$, donc les suites (v_n) et (u_n) convergent vers 0.

25 Montrons que ces deux suites sont adjacentes :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1+\dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}\geqslant 1$: la suite (u_n) est croissante.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}}{u_n}\,\frac{1+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}}{1+\frac{1}{nn!}}=\frac{\left(1+\frac{1}{(n+1)^2n!}\right)^2}{1+\frac{1}{nn!}}$$

$$=\left(1+o\left(\frac{1}{nn!}\right)\right)\left(1-\frac{1}{nn!}+o\left(\frac{1}{nn!}\right)\right).$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=1-\frac{1}{nn!}+o\left(\frac{1}{nn!}\right)$$

la suite (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
Enfin, $v_n-u_n=\dfrac{u_n}{nn!}$; comme u_n est majorée par $v_1=4$, cette différence converge vers 0 : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes ; elles convergent et ont la même limite.

Chapitre 17

1 **a)** Faux ex : $f(x)=x^3$; $g(x)=-x$. **b)** Vrai.
c) Faux ; ex : $x+2\sin x$.
d) Vrai. **e)** Faux ; ex : $\chi_{\mathbb{Q}}$. **f)** Vrai. **g)** Faux ; ex : $E(-x^2)$.
h) Faux ; ex : $\chi_{\mathbb{Q}}$. **i)** Faux ; ex : $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}+1$ au voisinage de 0. **j)** Faux ; ex : $f(x)=x$; $g(x)=x^2$ au voisinage de 0.
k) Faux ; ex : $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ converge vers 1 et $\left(f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right)$ converge vers $f(1)$, mais f n'est pas continue en 1.
l) Faux ; ex : $f(x)=\sin x$ et $I=]0,2\pi[$. **m)** Faux ; ex : $\dfrac{1}{x}$ est continue et non bornée sur $]0,1[$ **n)** Vrai. **o)** Vrai. **p)** Vrai.

2 Analyse : si f est la somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h, exprimer $g(x)$ et $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.
Synthèse : Les fonctions g et h trouvées conviennent-elles quelle que soit la fonction f ?

3 **1)** f est continue à droite sur $\mathbb{R}$ et continue à gauche sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Comme elle est 1-périodique, il suffit d'étudier la limite à gauche en 0 pour conclure que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

2) f est 2-périodique : appliquer la même méthode aux points 0 et 1.

3) f est continue sur $\mathbb{R}^*$. On vérifie qu'elle l'est aussi en 0 ($\sin\dfrac{1}{x}$ est bornée...)

4) En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on montre que f n'est continue en aucun point non nul, et continue en 0.

4 Il est clair que :

$$\max(a,b)+\min(a,b)=a+b\,;$$

$$\max(a,b)-\min(a,b)=|a-b|.$$

On en déduit les résultats cherchés. En particulier :

$$f_+=\sup(f,0)\quad\text{et}\quad f_-=\sup(-f,0).$$

5 On peut, par exemple, modifier la fonction :

$$\begin{cases}\text{si } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] & f(x)=x\\ \text{si } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\cap[0,1] & f(x)=1-x\end{cases}$$

pour éviter la continuité au point $\dfrac{1}{2}$;

$\left(\text{Par exemple}\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1\quad\text{et}\quad f(1)=\dfrac{1}{2}.\right)$

Vérifier que la fonction obtenue est bien **bijective** et discontinue en tout point.

Il y a bien d'autres façons de construire un exemple : faites fonctionner votre imagination...

6 **a)** 1 ; **b)** $\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\lim_{0^+} f = \sqrt{2}$ $\lim_{0^-} f = -\sqrt{2}$; **e)** $\sqrt{2}$; **f)** $-\sqrt{3}$; **g)** 1 ; **h)** 1 ; **i)** e.

7 **a)** 1 ; **b)** $-\frac{x^2}{2}$; **c)** $\ln x$ (en 0^+) ; **d)** $\frac{b^2-a^2}{2}x^2$; **e)** $x \ln \frac{a}{b}$; **f)** $-2\pi x$; **g)** $\frac{x^2}{2}$; **h)** $-\frac{5x}{96}$; **i)** $-\frac{3\sqrt{2}}{4}x$.

8 **a)** -2 ; **b)** $\frac{1}{\pi}$; **c)** $\frac{a^2}{b^2}$; **d)** $-\frac{1}{4}$; **e)** -1 ; **f)** 0 ; **g)** e ; **h)** $-\frac{1}{2}$; **i)** 1 ; **j)** e.

9
$$\left(\prod_{i=1}^{n}(x+i)\right)^{\frac{1}{n}} - x = x\left(e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{x})} - 1\right)$$
$$\underset{(+\infty)}{\sim} x \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{x}\right).$$

La limite quand x tend vers $+\infty$ est $\frac{n+1}{2}$.

10 $$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}\left(e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} - 1\right) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

La limite cherchée est donc 1.

11 Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la suite $\left(f(\frac{x}{2^n})\right)$ est constante et conclure en utilisant la continuité de f en 0.

12 $\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$ est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

13 Considérer la fonction $g_n : x \mapsto f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$. Montrer par l'absurde que g_n n'est ni strictement positive ni strictement négative sur $[0, 1]$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

14 **1)** Démonstration directe. Posons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall x \in [a, +\infty[\quad l - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant l + \varepsilon$$
f est bornée sur $[0, a]$ et sur $[a, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$. Soit m et M les bornes respectivement inférieure et supérieure de f sur $\mathbb{R}_+$.

Si $m = M$, f est constante et la question est résolue.

Sinon, l'une au moins des deux bornes est distincte de la limite l. Supposons que ce soit le cas de M. Soit $\varepsilon \in]0, M - l[$. $\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in [a, +\infty[\quad f(x) \leqslant l + \varepsilon < M$.

M est donc la borne supérieure de f sur $[0, a]$ et à ce titre elle est atteinte.

15 Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in D^2 \quad |x - y| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$
et à cet α correspond un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant n_0 \quad |x_n - y_n| \leqslant \alpha$$
a fortiori : $$\forall n \geqslant n_0 \quad |f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \varepsilon$$
la suite $(f(x_n) - f(y_n))$ converge donc vers 0.

On peut montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue en cherchant deux suites (x_n) et (y_n) telles que $(x_n - y_n)$ converge vers 0, tandis que, par exemple, $\sin(x_n^2) = 1$ et $\sin(y_n^2) = -1$. Saurez-vous les trouver ?

16 On sait, d'après le théorème de Heine, que f est aussi uniformément continue sur $[a-1, b+1]$. On en déduit la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ en s'inspirant de la méthode de l'*application* 6.

17 Posons $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l'$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels a et b tels que :
$$\forall x \in]-\infty, a] \quad |f(x) - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
et :
$$\forall x \in [b, +\infty[\quad |f(x) - l'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
On en déduit que, pour tous x et y appartenant simultanément à $]-\infty, a]$ ou à $[b, +\infty[$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Si $a < b$, f est uniformément continue sur $[a-1, b+1]$; il existe donc $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall (x, y) \in [a-1, b+1]^2 \quad |x - y| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$
En définitive :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x - y| \leqslant \min(1, \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$
f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

18 $$\frac{r^t e^{i\alpha t} - 1}{t} = \frac{r^t \cos \alpha t - 1}{t} + i\frac{r^t \sin \alpha t}{t}$$
La fonction $f(t) = r^t \cos \alpha t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :
$$f'(t) = r^t(\ln r \cos \alpha t - \alpha \sin \alpha t)$$
D'où :
$$\lim_{t \to 0} \frac{r^t \cos \alpha t - 1}{t} = f'(0) = \ln r$$
De même, la fonction $g(t) = r^t \sin \alpha t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :
$$g'(t) = r^t(\ln r \sin \alpha t + \alpha \cos \alpha t)$$
D'où :
$$\lim_{t \to 0} \frac{r^t \sin \alpha t}{t} = g'(0) = \alpha$$
En définitive,
$$\lim_{t \to 0} \frac{r^t e^{i\alpha t} - 1}{t} = \ln r + i\alpha$$

19 Si $f(t) = x(t) + iy(t)$, $|f(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

Si f est continue, x et y le sont et $|f|$ aussi. La réciproque est fausse (chercher un contre-exemple).

Chapitre 18

1 **a)** Faux, ex : $x \to |x|$. **b)** Faux, ex : $x \to |x|$. **c)** Vrai. **d)** Vrai. **e)** Faux, ex : $x \to x^3$ en 0. **f)** Vrai. **g)** Faux : une dérivée n'est pas nécessairement continue. **h)** Faux : $x \to |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 0. **i)** Vrai. **j)** Vrai.

2 **a)** Distinguer trois cas :
- $n = 1$: f est définie sur $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, f n'est pas dérivable en 0.
- $n = 2$: f est définie sur $[-1, +\infty[$. $\dfrac{f(x)}{x} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{|x|}{x}$, donc f n'est pas dérivable en 0.
- $n \geqslant 3$: f est définie sur $]-8, -1] \cup \mathbb{R}_+$ ou sur $[-1, +\infty[$ suivant la parité de f. $\dfrac{f(x)}{x} \underset{(0)}{\sim} x^{\frac{n}{2}-1}$ avec $\dfrac{n}{2} > 1$; f est dérivable en 0.

b) $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$.
f est dérivable sur $]-1, 1[$, donc en 0.
c) $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, donc f n'est pas dérivable en 0.
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (voir la remarque à propos du théorème 5 : f' n'a pas de limite en 0, elle n'est pas continue en 0).

3 On peut écrire :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h}\right)$$

Que h tende vers 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures, ce quotient tend vers $\dfrac{1}{2}\left(f'_d(x_0) + f'_g(x_0)\right)$. En particulier, si f est dérivable en x_0, cette limite est $f'(x_0)$.
La réciproque est fausse : toute fonction paire admet une dérivée symétrique nulle en 0, alors qu'elle n'est pas nécessairement dérivable à droite et à gauche en ce point ; exemple : $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

4 **1)** f est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$. En 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
2) $\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$

$$f'(x) = \frac{\ln|x| - 1}{(\ln|x|)^2} \cos\frac{1}{x} + \frac{x}{\ln|x|}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right).$$

D'où : $f'(u_n) = \dfrac{1}{u_n \ln u_n}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f'(u_n) = -\infty$.
De même : $\lim\limits_{n\to\infty} f'(v_n) = +\infty$.
3) (u_n) et (v_n) convergent vers 0 et leurs images par f' ne sont pas bornées, donc il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel f' soit bornée.

5 **2)** Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x| \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(2x) - f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|x| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \left|\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| \leqslant \varepsilon + \left|\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right|$$

x étant fixé, $\dfrac{x}{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et comme f est continue en 0, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ tend vers $f(0)$, c'est-à-dire 0. Il existe donc un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \left|\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

d'où : $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2\varepsilon$
ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

6 **a)** $-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$; **b)** $\dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$;
c) $x^{a-1}a^{-x}(a - x\ln a)$; **d)** $(\ln x + 1)x^x$;
e) $\dfrac{1}{\sin x}$; **f)** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;
g) $(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\cos x) - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$;
h) $\dfrac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}\sin(2\sqrt{\sin(x^2)} + 2)}$.

7 **a)** Au vu des premiers résultats, on peut conjecturer que : $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ et le vérifier par récurrence.
b) De même, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ (on peut le déduire de **a)** en changeant x en $-x$).
c) $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{2(x-1)}$; appliquer **a)** et **b)**.
d) $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cos 3x + \dfrac{3}{4}\cos x$, d'où :

$$f^{(n)}(x) = \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

e) $e^x \sin x = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$, d'où :

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{Im}\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

f) Appliquer la formule de Leibniz :
si $n \geqslant 2$,

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} x^2 n! + \binom{n}{1} 2x\, n!\,(1+x) + \binom{n}{2} 2\,\frac{n!}{2!}\,(1+x)^2$$

$$= \frac{(n+2)!}{2}\, x^2 + n(n+1)!\, x + \frac{(n-1)\,n\, n!}{2}$$

8 **a)** $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$,
$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ $\;f$ est dérivable sur D_f et :

$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

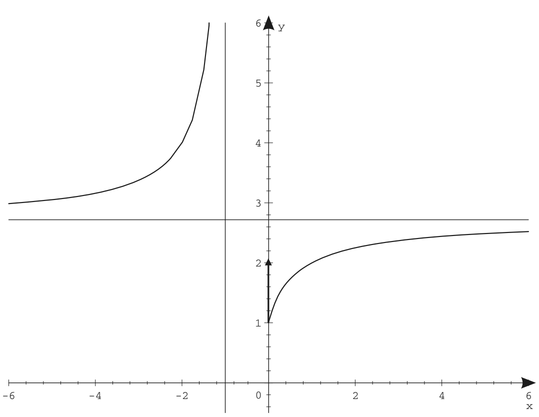
$f'(x)$ est du signe de $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.
g est dérivable sur D_f et :

$$g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}\ ;$$

d'où le tableau des variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'		$+$	‖	‖		$-$	
g	0	↗	$+\infty$ ‖	‖	$+\infty$	↘	0
f'		$+$	‖	‖		$+$	
f	e	↗	$+\infty$ ‖	‖	1	↗	e

Au voisinage de $\pm\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \sim \dfrac{1}{x}$, d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = e$.
En 0, on peut prolonger f par continuité en $f(0) = 1$.
Mais $\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = +\infty$; d'après le théorème de prolongement d'une dérivée, on a aussi $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-1}{x} = +\infty$; f n'est donc pas dérivable en 0. La courbe représentative admet une tangente verticale au point $(0, 1)$.



b) $f(x) = \dfrac{\ln|2x+1|}{\ln|3x+1|}$. $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, 0\right\}$.
f est dérivable sur D_f et :

$$f'(x) = \frac{2(3x+1)\ln|3x+1| - 3(2x+1)\ln|2x+1|}{(2x+1)(3x+1)(\ln|3x+1|)^2}$$

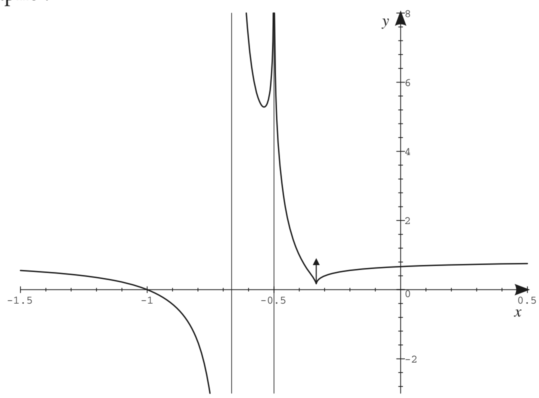
Posons $g(x) = 2(3x+1)\ln|3x+1| - 3(2x+1)\ln|2x+1|$.
$f'(x)$ est du signe de $g(x)/(2x+1)(3x+1)$.
g est dérivable sur D_f et :

$$g'(x) = 6\ln\left|\frac{3x+1}{2x+1}\right|$$

D'où le tableau des variations :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		α		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{2}{5}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
g'		$+$	‖		$+$		‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$+$	
g		↗	$-\ln 3$ ‖ $-\ln 3$		↗		$\ln 2$ ‖ $\ln 2$	↗		↘	$\ln 3$ ‖ $\ln 3$	↘	0 ‖ 0	↗	
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
f	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	0 ‖ 0	↗	$\frac{2}{3}$ ‖ $\frac{2}{3}$	↗	1

Graphe :



9 Utiliser l'inégalité des accroissements finis :

a) $f(x) = \sqrt{x}\ \forall x \in [10000, 10001]\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{200}$,

d'où $\quad |f(10001) - f(10000)| \leqslant 5.10^{-3}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad \forall x \in [0,999; 1]$

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{0,999^3} \leqslant 3,$$

d'où $\quad |f(0,999) - f(1)| \leqslant 3.10^{-3}$.

c) $f(x) = \cos x\ \forall x \in \left[1, \dfrac{\pi}{3}\right]\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant 1$,

d'où $\quad \left|f(1) - f(\frac{\pi}{3})\right| \leqslant \dfrac{\pi}{3} - 1 \leqslant 5.10^{-2}$.

10 **1)** D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [k, k+1]$ tel que :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c},$$

d'où l'inégalité.

2) En sommant cette inégalité de $k = 1$ à $n - 1$, on obtient :

$$\text{si } n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} [\ln(k+1) - \ln(k)] \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

D'où $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant 1$; la suite (S_n) est bornée.

3) Calculer $S_{n+1} - S_n$ et montrer que (S_n) est décroissante. Conclure.

La limite de cette suite est appelée **constante d'Euler**.

11 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. En utilisant le théorème des accroissements finis sur les intervalles $[0, a]$ et $[a, b]$ (bien vérifier toutes les hypothèses), montrer que :

$$\frac{f(a)}{a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{puis que} \quad \frac{f(a)}{a} \leqslant \frac{f(b)}{b}$$

12 **1)** Appliquer le théorème de Rolle à la fonction h définie par :

$$h(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$$

2) Comme $g(x_0) = 0$, g ne s'annule pas sur $V \backslash \{x_0\}$ (penser au théorème de Rolle).

On a donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, où c est compris entre x et x_0. Supposons que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| \leqslant \varepsilon$$

Alors :

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |c - x_0| \leqslant \alpha$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui prouve que $\quad \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

3) On obtient, par application de cette règle, les limites suivantes :

a) $\dfrac{1}{6}$; $\qquad$ **b)** $-\dfrac{1}{2}$.

4) La règle de L'Hôpital n'admet pas de réciproque : soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} x \neq 0 \quad f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, mais $\dfrac{f'(x)}{1}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

13 Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Pour tout $x > b$, on aura :

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

on en déduirait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, en contradiction avec l'hypothèse. Même raisonnement en considérant $x < a$ et en faisant tendre x vers $-\infty$ si $f(a) > f(b)$.

14 **1)** La fonction $-\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est croissante.

2) En lui appliquant l'inégalité de Jensen, avec

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n},$$

on obtient :

$$-\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}(\ln x_1 + \cdots + \ln x_n),$$

d'où l'on tire facilement l'inégalité cherchée.

3) On applique l'inégalité précédente à

$$(x_1, x_2, x_3) = (a^3, b^3, c^3)$$

puis à $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c)$. Les inégalités obtenues ne sont pas triviales : essayez de les retrouver par des moyens élémentaires (factorisation, par exemple), vous n'en apprécierez que mieux les fonctions convexes.
La dernière inégalité s'obtient avec

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = i$$

15 On a vu, dans l'exercice précédent, que la fonction $-\ln$ était convexe. On en déduit que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$$

tels que :

$$\alpha + \beta = 1 \quad -\ln(\alpha x + \beta y) \leqslant -\alpha \ln x - \beta \ln y.$$

D'où : $\qquad x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y$

2) On pose $x = \dfrac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}}$ et $y = \dfrac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}}$ et on leur applique le résultat de la question **1)** :

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta} \leqslant \alpha \frac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}} + \beta \frac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}}$$

d'où, en sommant pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta} \leqslant \alpha + \beta = 1$$

3) Pour $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $\vec{u} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e_i}$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{e_i}$, où $(\vec{e_i})$ est une base orthonormale.
L' inégalité précédente s'écrit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

Nous étudions ce résultat dans le chapitre 28 : *Espaces vectoriels euclidiens* sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz.

16 **1)** Vérifier que $(\overline{f}\,)' = \overline{(f\,')}$.

2) $|f| = \sqrt{f\overline{f}}$. Cette fonction est dérivable en tout point où le contenu de la racine carrée ne s'annule pas et

$$(|f|)' = \frac{\operatorname{Re}(f\overline{f}\,')}{|f|}.$$

17 Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire :

$$(at + b)^n - (at_0 + b)^n = a(t - t_0) \sum_{k=0}^{n-1} (at + b)^k (at + b)^{n-1-k}$$

et conclure.
Pour les puissances négatives, remarquer que, si $n = -m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$:

$$(at + b)^n - (at_0 + b)^n = \frac{1}{(at + b)^n} - \frac{1}{(at_0 + b)^m}$$
$$= -\frac{(at + b)^m - (at_0 + b)^m}{(at + b)^m (at_0 + b)^m}$$

Dans tous les cas, on obtient $f'(t) = na(at + b)^{n-1}$.

18 $\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f(t) = t^2 \cos \dfrac{1}{t} + i\, t^2 \sin \dfrac{1}{t}$.

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f'(t) = \left(2t \cos \frac{1}{t} + \sin \frac{1}{t}\right) + i\left(2t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}\right);$$

f' n'a pas de limite en 0 : elle n'est pas continue en 0.

19 **1)** Pour $x > 0$, $f(x) = x.\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$, produit de deux fonctions qui tendent vers 0 quand $x \to 0$; f est donc continue en 0.
De plus $\dfrac{f(x)}{x} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: $f'(0)$ existe et vaut 0.
2) La fonction logarithme népérien est concave, sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes ; en particulier pour $x = 1$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leqslant x - 1$,
a fortiori, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x < x + 1$.
Pour $x > 0$, $f'(x) = f(x) \dfrac{x + 1 - \ln x}{x^2}$, d'où $f'(x) > 0$.
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = 1$: la courbe a pour direction asymptotique $y = x$.
Au voisinage de $+\infty$, $f(x) - x = x[\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} - 1] \sim \ln x$, cette quantité tend vers $+\infty$, la courbe présente une branche parabolique dans la direction asymptotique $y = x$.

20 **1)** En prenant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

2) La dérivabilité en 0 permet alors d'écrire : $\forall h \in \mathbb{R}$, $f(h) = f'(0)h + o(h)$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= e^x f(h) + e^h f(x) \\ &= e^x[f'(0)h + o(h)] + [1 + h + o(h)]e^x \\ &= f(x) + [e^x f'(0) + f(x)]h + o(h) \end{aligned}$$

f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x, ce qui prouve que f est dérivable en x et donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x f'(0) + f(x)$$

Notons $a = f'(0)$, f est donc solution de l'équation différentielle :

$$y' - y = ae^x \quad (E_a)$$

3) La solution générale de (E_a) est $y = (ax + \lambda)e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, la condition $f(0) = 0$ détermine alors f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = axe^x$$

Nous avons travaillé par conditions nécessaires, une vérification immédiate prouve que ces fonctions sont bien les solutions de (1).

21 **1**) f est dérivable en 0 et $f'(a) = 0$, le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0 s'écrit alors :

$$f(x) = f(a) + o(x - a)$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe et vaut 0.
2) g ainsi prolongée par $g(a) = 0$ est alors continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $g(a) = g(b) = 0$.
Le théorème de Rolle s'applique :

$$\exists c \in]a, b[\quad g'(c) = 0$$

Or $g'(c) = \dfrac{f'(c)(c-a) - (f(c) - f(a))}{(c-a)^2}$...

Chapitre 19

1 **a)** Faux, il faut qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'intervalles, faute de quoi n'importe quelle fonction serait en escalier (constante sur tout singleton $\{x\}$!). **b)** Faux, elle doit avoir en ces points une limite à droite et une limite à gauche. **c)** Vrai. **d)** Faux, ex : $f(x) = \dfrac{1}{2E(\frac{1}{2x}) + 1}$ sur $]0, 1]$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$.
e) Vrai. **f)** Faux, ex : fonction en escalier non constante. **g)** Faux, voir exercice 6. **h)** Vrai.

2 Exemple : $f(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \dfrac{1}{2^n}$ sur $\left]\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n}\right]$.
f possède une infinité de points de discontinuité.

3 f est bornée sur $[0, 1]$, soit $M = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

$$|f(t)| \leqslant M \Rightarrow |g(x)| \leqslant Mx \Rightarrow |f(x)| \leqslant M\frac{x^2}{2} \leqslant \frac{M}{2}$$

En déduire que $M = 0$...

4 Supposons d'abord $x > 0$;
$\forall t \in [x, 2x] \quad \cos 2x \leqslant \cos t \leqslant 1$

$$\text{D'où} \quad \cos 2x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$$

Nous en déduirons la limite à droite en 0, puis de même la limite à gauche (ln 2).

5 **1)** La fonction ln étant concave, sa courbe représentative sur l'intervalle $[1, x^2]$ est comprise entre la corde et la tangente au point d'abscisse 1 :

$$\forall t \in [1, x^2] \qquad \frac{2\ln x}{x^2 - 1}(t - 1) \leqslant \ln t \leqslant t - 1$$

2) En supposant $x > 1$ et en intégrant sur $[x, x^2]$:

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leqslant \frac{x^2 - 1}{2\ln x} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$$

On en déduira la limite à droite en 0, puis de même la limite à gauche (ln 2).
3) Si F est une primitive de

$$t \mapsto \frac{1}{\ln t}, \quad \forall x \neq 1 \quad f(x) = F(x^2) - F(x),$$

d'où $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. D'après le théorème de prolongement d'une dérivée, f est aussi dérivable en 1, et $f'(1) = 1$.
4) Écrire le développement limité de f' à l'ordre 2, puis intégrer terme à terme, sans oublier la valeur $f(1)$ calculée à la question 2 :

$$f(1 + h) = \ln 2 + h + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{36} + o(h^3)$$

6 $\forall x > 0 \quad f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. En définitive, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, mais sa dérivée f' n'est pas bornée, donc pas continue par morceaux sur $[0, 1]$. f' admet pourtant une primitive : f !
Inversement, une fonction en escalier non constante est continue par morceaux, mais elle ne possède pas la propriété des valeurs intermédiaires : ce n'est donc pas une dérivée ; elle ne possède pas de primitives.

7 f étant continue sur le segment $[a, b]$,elle est bornée et atteint ses bornes : $\exists x_0 \in [a, b] \quad f(x_0) = M$. Exprimons la continuité de f au point x_0 :

$$\forall \varepsilon \in]0, M[\quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in [a, b] \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$
$$M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$$

On peut donc construire une fonction en escalier φ qui minore f sur $[a, b]$:

– $\forall x \in [a,b] \cap [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \quad \varphi(x) = M-\varepsilon$
– $\forall x \in [a,b] \setminus [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \quad \varphi(x) = 0$

et une fonction en escalier ψ qui majore f sur $[a,b]$: $\forall x \in [a,b] \quad \psi(x) = M$.

On en déduit : $(M-\varepsilon)\alpha^{\frac{1}{n}} \leqslant I_n \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $(M-\varepsilon)\alpha^{\frac{1}{n}}$ tend vers $M-\varepsilon$ et $M(b-a)^{\frac{1}{n}}$ tend vers M.
Il existe donc un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$M - 2\varepsilon \leqslant I_n \leqslant M+\varepsilon$$

N'est-ce pas la définition de la convergence d'une suite ?
(On ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes ici car les deux encadrants n'ont pas la même limite quand n tend vers l'infini pour ε fixé...)

8 **1)** Intégrer par parties. $a=-1$; $b=\dfrac{1}{2\pi}$.

2) $S_p = \displaystyle\int_0^\pi \left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)\sum_{n=1}^{p}\cos nx \,\mathrm{d}x$

or : $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$

D'où :

$$S_p = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}x + \int_0^\pi \left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)\frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

Développer $\sin\left(p+\dfrac{1}{2}\right)x$, puis appliquer le lemme de Lebesgue aux fonctions :

$$f_1 : \quad x \mapsto -x+\frac{x^2}{2\pi} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \frac{\left(-x+\frac{x^2}{2\pi}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

qui sont toutes deux continues sur $[0,\pi]$ (f_2 est prolongeable par continuité en 0).

En définitive, $\displaystyle\lim_{p\to\infty} S_p = \frac{\pi^2}{6}$.

9 On utilise : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}$.

c) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} = \frac{1-\mathrm{e}}{n(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})} \longrightarrow \mathrm{e}-1$.

d) $\displaystyle\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}}\right) \longrightarrow 1$.

10 **a)** Reconnaître une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Réponse : $\dfrac{\pi}{4}$.

b) Même chose pour la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Réponse : $\dfrac{\ln 2}{2}$.

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}$.

d) $\displaystyle\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}$.

e) Posons $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}$, d'où

$\displaystyle\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

$\ln u_n$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{4}{\mathrm{e}}$.

11 **1)** Interpréter S_n et S_n' comme des intégrales de fonctions en escalier à comparer avec f.

2) $S_n' - S_n = \dfrac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)$

3) Majorer $\displaystyle\int_{[a,b]} f - S_n$ et $\displaystyle S_n' - \int_{[a,b]} f$ et conclure.

12 1) Pour $x>0$, le segment $[x,2x]$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{t^2}{t^2+\sin^2 t}$ est donc continue sur $[x,2x]$, et $f(x)$ est définie.
De même pour $x<0$ car $[2x,x] \subset \mathbb{R}_-^*$.
De plus :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{2x}\frac{u^2}{u^2+\sin^2 u}(-\mathrm{d}u) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est impaire ; on limite l'étude à $\mathbb{R}_+$.
Pour $x>0$, la formule de la moyenne permet d'écrire :

$$f(x) = x\frac{c_x^2}{c_x^2+\sin^2 c_x} \quad \text{où} \quad c_x \in [x,2x] \quad (*)$$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, f est prolongeable par continuité en 0 : $f(0)=0$.

2) $(*)$ nous donne :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{c_x^2}{c_x^2+\sin^2 c_x}$$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$.

f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable, de dérivée :

$$f'(x) = 2\frac{(2x)^2}{(2x)^2 + \sin^2(2x)} - \frac{x^2}{x^2 + \sin^2 x}$$

de limite $\frac{1}{2}$ quand $x \to 0$; ce qui prouve que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) Utilisons encore $(*)$, cette fois au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x\left(\frac{c_x^2}{c_x^2 + \sin^2 c_x} - 1\right) \\ &= x\left(\frac{1}{1 + \dfrac{\sin^2 c_x}{c_x^2}} - 1\right) \\ &= x\left[-\frac{\sin^2 c_x}{c_x^2} + o\left(\frac{\sin^2 c_x}{c_x^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Or $c_x > x$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\dfrac{\sin^2 c_x}{c_x^2} = 0$, ce qui établit que $y = x$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$, et par raison de symétrie, au voisinage de $-\infty$.

13 **1)** $\ln u_n = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{n+k}{k}$.

La fonction $x \mapsto \ln\dfrac{1+x}{x}$ est décroissante sur $]0, 1]$:

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$

$$\frac{1}{n}\ln\frac{n+k+1}{k+1} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\frac{n+k}{k}$$

En sommant de $k = 1$ à $k = n-1$:

$$\ln u_n - \frac{\ln(n+1)}{n} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x \leqslant \ln u_n - \frac{\ln 2}{n}$$

d'où l'inégalité demandée.

2) Une intégration par parties donne :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln\frac{1+x}{x}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$$

Cette intégrale admet donc une limite finie : $\ell = 2\ln 2$, quand n tend vers $+\infty$. Le théorème d'encadrement nous permet de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = 2\ln 2$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Chapitre 20

1 **a)** Faux : nous avons déjà rencontré des dérivées non continues... **b)** Faux : leur différence est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. **c)** Faux : il faut que $a < b$. **d)** Vrai (poser $x = \sqrt{u}$). **e)** Faux : il faut changer les bornes. **f)** Faux ex : $\dfrac{1}{x}$. **g)** Faux ex : $\mathrm{e}^x \cdot \dfrac{1}{x}$.

2 **a)** $1 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$; **b)** $\dfrac{\pi}{12}$; **c)** $1 + \ln 2$; **d)** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

e) $\ln\dfrac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{2}}$; **f)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln(\sqrt{2}-1) - \operatorname{Arctan}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3 $I(x) + J(x) = x$ et $I(x) - J(x) = \ln(\cos x + \sin x)$, d'où $I(x)$ et $J(x)$...

4 **a)** $\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + x + 1} = x - 1 + \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$, d'où :

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + x + 1| + C$.

b) $\dfrac{2x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{(x+1)^2}$, d'où :

$F(x) = 2\ln|x+1| + \dfrac{3}{x+1} + C$.

c) $\dfrac{2x}{x^2 - x + 1} = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, d'où :

$$F(x) = \ln|x^2 - x + 1| + \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

5 **a)** si $\alpha \neq -1$: $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C$;

si $\alpha = -1$: $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.

b) $x\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + c$.

c) $x\operatorname{Arctan} x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

d) si $\alpha \neq 0$: $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha^4}\left(\alpha^3x^3 - 3\alpha^2x^2 + 6\alpha x - 6\right) + C$;

si $\alpha = 0$: $\dfrac{x^4}{4} + C$.

e) si $\alpha \neq 0$:

$\dfrac{1}{\alpha^3}\left(-\alpha^2x^2\cos\alpha x + 2\alpha x\sin\alpha x + 2\cos\alpha x\right) + C$;

si $\alpha = 0$: C

f) $-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int x^2\sin 3x\,\mathrm{d}x + \dfrac{3}{4}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$ (*cf* e.).

g) $x\tan x + \ln|\cos x| + C$.

h) $\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

i) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{13}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + C$.

6 **a)** $(t = x^2)$: $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{|x^2-2|}{x^2+1} + C$.

b) $(t = x^3)$: $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x^3}{x^3+1}\right| + C$.

c) $(t = x^4)$: $\dfrac{1}{4(x^4+1)} + \dfrac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$.

7 **a)** $(t = \sin x)$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$.

b) $(t = \operatorname{ch} x)$ $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\right| + C$.

c) $(t = 2x)$ $\ln|\tan x| + C$.

d) $(t = \ln x)$ $\dfrac{1}{n+1}$.

e) $(t = \operatorname{Arcsin} x)$ $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

f) $(t = \tan x)$ $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}$.

g) $(t = \cos x)$ $-\dfrac{8\sqrt{3}}{5} + \dfrac{34\sqrt{2}}{15}$.

8 En posant $x = \operatorname{sh} t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

En posant $x = \tan t$, avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \cos t \, dt = \sin t + C = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} + C$$

9 Le changement de variable $x = \frac{\pi}{4} - t$ donne :
$I = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$, d'où $I = \cdots$

10 Le changement de variable $t = a + b - x$ donne : $J = (a+b)I - J$

Application : dans le premier cas, la fonction f vérifie bien l'hypothèse
$\forall x \in [0, \pi] \;\; f(\pi - x) = f(x)$.

$$J_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^2 u} = \pi$$

Attention, dans le deuxième cas, la fonction f vérifie l'hypothèse sur $[0, \pi]$ et sur $[\pi, 2\pi]$, mais pas sur $[0, 2\pi]$.

D'où : $$J_2 = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \frac{3\pi}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\frac{\pi^2}{2}$$

11 On peut écrire : $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x(1 + 2\cos x)}$.

Posons $u = \cos x$,

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-du}{(1-u^2)(1+2u)}$$

On trouve :

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)} = \frac{\frac{1}{6}}{1-u} - \frac{\frac{1}{2}}{1+u} + \frac{\frac{4}{3}}{1+2u}$$

$$I = \left[-\frac{1}{6}\ln|1-u| - \frac{1}{2}\ln|1+u| + \frac{2}{3}\ln|1+2u|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2$$

12 **1)** Transformer $\sin x + \cos x$ en $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$. On obtient $I = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.
2) Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ donne

$$I = 2\int_0^1 \frac{dt}{1 + 2t - t^2}.$$

13 Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ donne :

$$I = \int_0^1 \frac{2\,dt}{(a-b)t^2 + (a+b)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\right) & \text{si} \quad a > b \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{b-a}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}-\sqrt{b+a}}\right| & \text{si} \quad a < b \\[2ex] \dfrac{1}{a} \quad \text{si} \quad a = b \end{cases}$$

Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ donne $J = I$.

14 On est amené à poser $x - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}\sin t$. On obtient : $I = (b-a)^2\frac{\pi}{8}$.

15 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$. D'où $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Comme $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$,

on en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant e \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}$.

16 Une double intégration par parties donne :

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

D'où, en divisant par $n!$: $\dfrac{I_n}{n!} = \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!} - \dfrac{I_{n-2}}{(n-2)!}$.
Il faut distinguer suivant la parité de n, pour se ramener à I_0 ou I_1 :

$$(-1)^p\frac{I_{2p}}{(2p)!} = 1 + \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$(-1)^p\frac{I_{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}$$

17 **1)** En posant $t = \ln x$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t \, dt$. D'où

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

On en déduit que (I_n) converge et que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2) $I_n = e - nI_{n-1}$, par intégration par parties.
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(e - (n+1)I_n) = 0$, d'où $I_n \sim \frac{e}{n}$.

18 **1)** $F'(x) = f(x) + xf'(x)$, d'où $F(x) = xf(x) + C$.
Comme $F(0) = 0$, $F(x) = xf(x)$.

2) a) si $v = f(u)$
$$\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^v g(t)\,\mathrm{d}t = uf(u) = uv.$$
b) si $v > f(u)$
$$\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^v g(t)\,\mathrm{d}t = uf(u) + \int_{f(u)}^v g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Comme g est croissante, $\displaystyle\int_{f(u)}^v g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (v - f(u))u$. D'où l'inégalité cherchée.
c) si $v < f(u)$
$$\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^v g(t)\,\mathrm{d}t = uf(u) - \int_v^{f(u)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Comme g est croissante, $\displaystyle\int_v^{f(u)} g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (f(u) - v)u$. D'où l'inégalité cherchée.

19 **1)** Au voisinage de 0 : $f(x) = xf'(0) + o(x)$ et $\cot \pi x = \dfrac{1}{\pi x} + o(1)$.
Donc $f(x)\cot \pi x = \dfrac{f'(0)}{\pi} + o(1)$, soit :
$$\lim_{x\to 0} f(x)\cot \pi x = \frac{f'(0)}{\pi}.$$
De même, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)\cot \pi x = \frac{f'(1)}{\pi}$.
2) h est un produit de fonctions dérivables sur $]0, 1[$.
Utiliser le théorème de prolongement d'une dérivée pour montrer que h est de classe C^1 sur $[0, 1]$.
3) Montrer que
$$\forall x \in [0,1] \quad h'(x) - \frac{1}{\pi}f'(x)^2 + \pi f(x)^2 = -\pi\left(g(x) - \frac{f'(x)}{\pi}\right)^2$$
et conclure.
4) Intégrer l'inégalité de la question précédente sur $[0, 1]$.
On obtient donc une relation entre l'intégrale du carré d'une fonction C^1 et l'intégrale du carré de sa dérivée.

20
$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{Im}\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{(-1+i)x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{e}^{(-1+i)x}}{-1+i}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= (-1)^n \mathrm{Im}\,\frac{-\mathrm{e}^{-(n+1)\pi} - \mathrm{e}^{-n\pi}}{-1+i} \\ &= (-1)^n \frac{(\mathrm{e}^{-(n+1)\pi} + \mathrm{e}^{-n\pi})}{2} \\ &= (-1)^n \mathrm{e}^{-n\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$
La suite (S_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

21 Calculons par parties pour $m \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m(t-\beta)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(t-\alpha)^m\frac{(t-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta \\ &\qquad - \frac{m}{n+1}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{m-1}(t-\beta)^{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1} \end{aligned}$$
$$I_{0,p} = \int_\alpha^\beta (t-\beta)^p\,\mathrm{d}t = -\frac{(\alpha-\beta)^{p+1}}{p+1}$$
Une récurrence immédiate sur $m \in \mathbb{N}$ prouve alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_{m,n} = (-1)^{m+1}\frac{m(m-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(m+n)}\,\frac{(\alpha-\beta)^{m+n+1}}{m+n+1}$$
En particulier :
$$\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^n(t-\beta)^n\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\frac{1}{\binom{2n}{n}}\,\frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{2n+1}$$

22 **1)** $\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1 = (\lambda - \cos x)^2 + (1 - \cos^2 x)$, cette somme de 2 termes positifs ne peut s'annuler que si on a $\cos x = \pm 1 = \lambda$, ce qui est exclu.
2) Calculons $I_n(-\lambda)$ en utilisant le changement de variable $t = \pi - x$:
$$\begin{aligned} I_n(-\lambda) &= \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\lambda^2 + 2\lambda\cos x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos(n(\pi - t))}{\lambda^2 - 2\lambda\cos t + 1}\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n I_n(\lambda) \end{aligned}$$
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(0) = 0$.
$$\cos(nx) + \cos((n+2)x) = 2\cos((n+1)x)\cos x,$$
écrivons alors pour $\lambda \neq 0$:
$$2\cos x = -\frac{1}{\lambda}(\lambda^2 - 2\lambda\cos t + 1) + \frac{1}{\lambda}(\lambda^2 + 1),$$
nous obtenons :
$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{\lambda}(\lambda^2 + 1)I_{n+1}$$

23 L'équation différentielle $\varphi'' + \varphi = 0 \quad (H)$, associée à (E) a pour solution générale :
$$\varphi(x) = a\cos x + b\sin x, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$
Vérifions que $\psi \;:\; x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est solution de (E) :
$$\psi(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où :

$$\psi'(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

et :

$$\psi''(x) = -\sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$$

Toute solution de (E) s'écrit donc :

$$\varphi(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = b + \psi(0) = b$, ce qui démontre la formule proposée.
(On pouvait aussi trouver facilement une solution de (E) par la méthode de variation des constantes, vérifiez-le.)

24 Effectuons le changement de variable : $t = \tan x$; $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\mathrm{d}t$;
puis $u = \sqrt{t}$; $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$. $\quad I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u.$
Décomposons en éléments simples :

$$\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{2u^2}{(u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}u}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}u}{u^2-\sqrt{2}u+1}$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1\left(-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{\sqrt{2}}{(u+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{(u-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1} + 2\mathrm{Arctan}\,(u\sqrt{2}+1) + 2\mathrm{Arctan}\,(u\sqrt{2}-1)\right]_0^1$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln(3-2\sqrt{2})+\pi\right)$$

25 On peut écrire $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, d'où

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur le segment $[0,1]$. Comme cette fonction est continue :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = I$$

Intégrons par parties :

$$I = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

D'où : $I = \ln 2 - 2(1-\frac{\pi}{4}) = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$. En définitive :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2}$$

26 **1)** $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 (x-1)x^n\ln(1+x^2)\mathrm{d}x \leqslant 0$
La suite (I_n) est donc décroissante ; comme elle est minorée par 0, elle converge.
Une intégration par parties donne :

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

D'où :

$$|I_n| \leqslant \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{|x^{n+2}|}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln 2+\frac{\pi}{2}}{n+1}$$

Donc (I_n) converge vers 0.
2) $\left|I_n - \dfrac{\ln 2}{n+1}\right| = \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{n+1}\int_0^1 x^{n+2}\mathrm{d}x = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$
c'est-à-dire : $I_n - \dfrac{\ln 2}{n+1} = o(\dfrac{1}{n})$, d'où $I_n \sim \dfrac{\ln 2}{n+1}$, ou plus simplement : $I_n \sim \dfrac{\ln 2}{n}$.

27 Une intégration par parties donne :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}\frac{f(t)}{t}\cos nt\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b \frac{tf'(t)-f(t)}{t^2}\cos nt\,\mathrm{d}t$$

f et f' étant continues sur $[a,b]$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{tf'(t)-f(t)}{t^2}$ sont bornées sur $[a,b]$. Il en résulte que (I_n) converge vers 0.

Chapitre 21

1 **a)** Vrai. **b)** Faux, ex : $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. **c)** Vrai. **d)** Faux, *cf.* Remarque du paragraphe 3.1. **e)** Vrai. **f)** Faux, *cf.* paragraphe 3.3. **g)** Vrai. **h)** Faux, ex : $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. **i)**. Faux, ex : $\cos x + x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. **j)** Vrai, mais sans intérêt : il suffit de dire $\cos x \sim 1$. En revanche, $\cos x - 1$ est équivalent en 0 à $-\dfrac{x^2}{2}$ et pas à $\dfrac{x^2}{2}$.

2 On choisit $a = 0$ et $x = -1$.

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

Cette intégrale est majorée en valeur absolue par $\dfrac{e}{(n+1)!}$; elle tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1}$.

3 Pour tout $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. D'où, pour $a = 0$ et $x = 1$:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^1 (-1)^n \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt.$$

Cette intégrale est majorée en valeur absolue par $\dfrac{1}{n+1}$; elle tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln 2$.

4 Choisissons $a = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{47\pi}{180}$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, car

$$\frac{\left(\dfrac{47\pi}{180} - \dfrac{\pi}{4}\right)^3}{3!} \approx 7 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$

On obtient :

$$\sin \frac{47\pi}{180} \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{90} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\right) \approx 0,73136$$

à 10^{-5} près.

5 Posons $M = \max_{[0,1]} |f''|$ (M existe, car f'' est continue sur $[0,1]$ et $\exists a \in [0,1]$, $f''(a) = M$).

$$1 = |f(1) - f(0)| \leqslant \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| \leqslant 2 \times \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

D'où $M \geqslant 4$, ce qui prouve le résultat demandé.

6 Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour $f(a+h)$ et $f(a-h)$. La limite cherchée est $f''(a)$.

7 Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. La limite cherchée est $\dfrac{1}{2}f''(0)$.

8 **a)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + h\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}h - \dfrac{1}{4}h^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \dfrac{1}{48}h^4 + o(h^4)$;

b) $\ln(e + h) = 1 + \dfrac{h}{e} - \dfrac{h^2}{2e^2} + \dfrac{h^3}{3e^3} - \dfrac{h^4}{4e^4} + o(h^4)$;

c) $e^{1+h} = e + eh + \dfrac{e}{2}h^2 + \dfrac{e}{6}h^3 + \dfrac{e}{24}h^4 + o(h^4)$;

d) $\dfrac{1}{2+h} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} + \dfrac{h^2}{8} - \dfrac{h^3}{16} + \dfrac{h^4}{32} + o(h^4)$;

e) $\operatorname{Arctan} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$;

f) $\operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} + o(x^5)$.

9 En comparant les développements limités à l'ordre 5 en 0 de ces fonctions, on peut écrire :
$\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in [0, \alpha]$,
$\operatorname{th} x \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant \sin x \leqslant \operatorname{Argsh} x \leqslant x \leqslant \operatorname{sh} x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \tan x \leqslant \operatorname{Argth} x$

10 **a)** $e^x \operatorname{Arctan} x = x + x^2 + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^5)$;

b) $\dfrac{\ln(1+h)}{1+h} = h - \dfrac{3h^2}{2} + \dfrac{11h^3}{6} - \dfrac{25h^4}{12} + o(h^4)$;

c) $\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x^4}{45} + o(x^4)$;

d) $\cos^3 x = 1 - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{7x^4}{8} - \dfrac{61x^6}{240} + o(x^6)$;

e) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = 1 + 2h + 2h^2 + \dfrac{8h^3}{3} + o(h^3)$;

f) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \dfrac{ex}{2} + \dfrac{11ex^2}{24} - \dfrac{7ex^3}{16} + o(x^3)$;

g) $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin} x} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)$;

h) $(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{3x^3}{16} + \dfrac{11x^4}{128} + o(x^4)$.

11 Posons $f(x) = \tan x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^7)$. Comme on sait que f est de classe C^∞, sa dérivée possède un développement limité à tout ordre. En identifiant les D.L. d'ordre 6 de f' et de $1 + f^2$, on obtient : $a = \dfrac{1}{3}$; $b = \dfrac{2}{15}$; $c = \dfrac{17}{315}$.

12 **a)** $\dfrac{1}{3}$; b) -1 ; **c)** $\dfrac{1}{6}$; **d)** $e^{-\frac{1}{6}}$; **e)** $e^{-\frac{1}{8}}$;

f) -2 ; **g)** $\dfrac{n(n-1)}{8}$; **h)** $\dfrac{a^{a+1}(1 - \ln a)\ln a}{2}$.

13 **a)** Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$,

$$f(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation $y = x - \dfrac{2}{3}$ est asymptote ; la courbe est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $-\infty$ et en dessous au voisinage de $+\infty$.

b) Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, $f(x) = x - 3 + \dfrac{13}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote ; la courbe est en dessous de cette asymptote au voisinage de $-\infty$ et au-dessus au voisinage de $+\infty$.

c) Au voisinage de $+\infty$, $f(x) = 2x - \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La droite d'équation $y = 2x$ est asymptote ; la courbe est en dessous au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, $f(x) = \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote ; la courbe est en dessous au voisinage de $-\infty$.

d) Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, $f(x) = 2x - \dfrac{4}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La droite d'équation $y = 2x$ est asymptote ; la courbe est en dessous au voisinage de $+\infty$ et au-dessus au voisinage de $-\infty$.

14 **a)** Tangente dirigée par $(1, -3)$; point de rebroussement de première espèce.

b) Tangente dirigée par $(1{,}6)$; point de remboursement de deuxième espèce.

c) Tangente dirigée par $(1{,}1)$; point d'inflexion.

15 Écrivons le développement limité à l'ordre 2 de la fonction exponentielle au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On en déduit immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

Ce qui établit que f est continue en 0, dérivable en ce point et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

f est alors dérivable, donc continue sur tout $\mathbb{R}$, il reste à étudier la continuité de sa dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

En utilisant encore le développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto e^x$, nous avons :

$$f'(x) = \frac{x(1 + x + o(x)) - (x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$: f est de classe C^1 sur tout $\mathbb{R}$.

16 Posons $x = 1 + h$,

$$\frac{x^x - x}{1 - x - \ln x} = \frac{(1+h)^{(1+h)} - (1+h)}{-h - \ln(1+h)}.$$

$-h + \ln(1+h) = -\dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$, il suffit donc d'effectuer un développement limité du numérateur de la fraction à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}(1+h)^{(1+h)} - (1+h) &= e^{(1+h)\ln(1+h)} - (1+h)\\ &= e^{(1+h)(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2))} - (1+h)\\ &= e^{h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)} - (1+h)\\ &= 1 + h + h^2 + o(h^2) - (1+h)\\ &= h^2 + o(h^2)\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x - \ln x} = -2$$

17 $\sin^5 x = x^5 + o(x^5)$, il suffit donc d'effectuer un développement limité du numérateur de la fraction à l'ordre 5.
Retrouvons le développement limité de $\tan x$, vu dans le cours :

$$\begin{aligned}\tan x = x + o(x^2) &\Rightarrow \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o(x^3)\\ &\Rightarrow \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\\ &\Rightarrow \tan'(x) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\\ &\Rightarrow \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\tan x &= x - \frac{2}{3}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})\\ &\quad - \frac{1}{3}(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}) + o(x^5)\\ &= -\frac{x^5}{20} + o(x^5)\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^5 x}\left(x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\tan x\right) = -\frac{1}{20}$$

18 Posons $x = 1 + h$, avec $h \to 0$, alors :

$$\begin{aligned}f(x) = g(h) &= \frac{\ln(2+h)}{(1+h)^2}\\ &= (\ln(2+h))(1+h)^{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(2+h) &= \ln(2(1 + \frac{h}{2}))\\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)\\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+h)^{-2} &= 1 - 2h + \frac{(-2)(-3)}{2}h^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6}h^3 + o(h^3)\\ &= 1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

D'où :

$$g(h) = (\ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3))(1 - 2h + 3h^2 - 4h^3 + o(h^3))$$

$$= \ln 2 + (\frac{1}{2} - 2\ln 2)h + (3\ln 2 - \frac{9}{8})h^2 + (-4\ln 2 + \frac{43}{24})h^3 + o(h^3)$$

Et donc :

$$f(x) = \ln 2 + (\frac{1}{2} - 2\ln 2)(x-1) + (3\ln 2 - \frac{9}{8})(x-1)^2 + (-4\ln 2 + \frac{43}{24})(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

19 $$e^x = \sum_{k=0}^{100} \frac{x^k}{k!} + o(x^{100}) = \sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$$

D'où :

$$f(x) - x = f(x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})}\right)$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{x^{100}}{100!}\frac{1}{\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}} + o(x^{100})\right)$$

$$= -\frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}) \quad \text{car} \quad \sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \sim 1$$

Et donc :

$$f(x) = x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$$

Chapitre 22

1 **1.** Faux. **2.** Faux. **3.** Faux. **4.** Vrai. **5.** Faux. **6.** Faux. **7.** Vrai. **8.** Vrai. **9.** Vrai. **10.** Faux.

2 Vérifions par une récurrence immédiate que la suite est bien définie et bornée par 0 et 1.

- pour $n = 0$, $u_0 \in [0, 1]$;
- soit $n \geqslant 0$ tel que $u_m \in [0, 1]$, alors $\sqrt{u_n}$ et $\sqrt{1 - u_n}$ sont bien définis, positifs, de somme strictement positive, d'où u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in [0, 1]$.

Soit alors f définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ par

$$x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}.$$

f est continue, une limite éventuelle de (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie donc $f(\ell) = \ell$.

$$\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{\ell} + \sqrt{1-\ell}} = \ell \iff \ell = 0 \text{ ou } \sqrt{\ell}\left[\sqrt{\ell} + \sqrt{1-\ell}\right] = 1$$
$$\iff \ell = 0 \text{ ou } 1 - \ell = \sqrt{\ell - \ell^2}$$
$$\iff \ell = 0 \text{ ou } \{\ell \in [0, 1] \text{ et } 2\ell^2 - 3\ell + 1 = 0\}$$
$$\iff \ell \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$$

De plus f a pour tableau de variations (vérifiez en calculant sa dérivée) :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1

et le signe de $f(x) - x$ est celui de $2x^2 - 3x + 1$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f(x) - x$	0	$+$	0	$-$	0

Ce qui nous permet de conclure :

- pour $u_0 \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ la suite est stationnaire ;
- pour $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$, la suite est croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, elle converge vers $\frac{1}{2}$;
- pour $u_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$, la suite est décroissante, minorée par $\frac{1}{2}$, elle converge vers $\frac{1}{2}$.

3 La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{6}{x^2}$, est continue, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'unique point fixe $l = \sqrt[3]{6}$.

Elle a pour tableau de variation :

x	0		$\sqrt[3]{6}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt[3]{6}$	↘	0

Nous savons qu'alors $f \circ f$ est croissante et que les suites extraites $(u_{2n}$ et $u_{2n+1})$ sont monotones, de monotonies contraires.

Le signe de $f \circ f(x) - x = \frac{x^4}{6} - x$ est sur $\mathbb{R}_+^*$ celui de $\frac{x^3}{6} - 1$:

x	0		$\sqrt[3]{6}$		$+\infty$
$f \circ f(x) - x$	‖	$-$	0	$+$	

Ce qui nous permet de conclure :

- pour $u_0 = \sqrt[3]{6}$, la suite est stationnaire ;
- pour $u_0 \in]\sqrt[3]{6}, +\infty[$, la suite (u_{2n}) est croissante, strictement minorée par $\sqrt[3]{6}$, elle ne peut converger vers $\sqrt[3]{6}$, qui est la seule limite possible pour (u_n) : (u_n) diverge ;

- pour $u_0 =]0, \sqrt[3]{[}, u_1 \in]\sqrt[3]{6}, +\infty[$ et le raisonnement précédent s'applique à la suite (u_{2n+1}) : (u_n) diverge.

4 **1)** Étudions les variations de $f_n \ : \ x \mapsto x^n - nx + 1$ pour $x \in \mathbb{R}_+$:
$f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1)$ est positif si et seulement si $x \geqslant 1$, d'où le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

Ce qui prouve que pour $n \geqslant 3$, f_n admet deux racines dans $\mathbb{R}_+$, notées a_n et b_n et telles que :

$$0 < a_n < 1 < b_n$$

2) Soit $a_n \in]0, 1[$ telle que $a_n^n - na_n + 1 = 0$, alors :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_n) &= a_n^{n+1} - (n+1)a_n - 1 \\ &< a_n^n - na_n + 1 - a_n \quad \text{car } a_n < 1 \\ &< -a_n \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc $f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1})$, ce qui prouve que $a_{n+1} < a_n$ puisque f_{n+1} est décroissante sur $[0, 1]$.
La suite (a_n), décroissante, minorée par 0 converge donc vers $\ell \geqslant 0$.
Montrons par l'absurde que $\ell = 0$, supposons $\ell \in]0, 1[$, alors $a_n^n - na_n + 1 \sim -n\ell$ tend vers $-\infty$ en contradiction avec $a_n^n - na_n + 1 = 0$; donc $\ell = 0$.
Alors :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}a_n^n \quad \text{avec} \quad a_n^n = o(1) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $a_n \sim \dfrac{1}{n}$.

3)
$$\begin{aligned} f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) &= \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n - n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + 1 \\ &\geqslant 1 + n\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 - n - \frac{2n}{\sqrt{n}} + 1 \\ &\qquad \text{(en écrivant 3 termes de } \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n) \\ &\geqslant n \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $b_n < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ puisque f_n est croissante sur $[1, +\infty$, alors $1 < b_n < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ entraîne que :

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 1$$

5 **1)** Étudions les variations de $f_k \ : \ x \mapsto x + \ln x - k$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$f_k'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ est strictement positif, d'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Et l'existence d'un unique x_k tel que : $x_k + \ln x_k = k$

2) Pour tout $x > 0$, $\ln(x) < x$, d'où $\dfrac{k}{2} + \ln\dfrac{k}{2} < k$, c'est-à-dire $f_k\left(\dfrac{k}{2}\right) < 0$, ce qui prouve que $\dfrac{k}{2} < x_k$ et donc que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} x_k = +\infty$.
D'où $\ln(x_k) = o(x_k)$ et $x_k = k - \ln(x_k)$ qui entraînent $x_k \sim k$ soit $x_k = k(1 + o(1))$.
Nous pouvons alors écrire successivement :

$$\begin{aligned} x_k - k &= \ln(k(1 + o(1))) \\ &= \ln k + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln(k) + o(1) \end{aligned}$$

d'où $x_k = k + \ln(k) + o(\ln k)$), puis

$$\begin{aligned} x_k - k &= \ln(k + \ln(k) + o(\ln k)) \\ &= \ln k + \ln(1 + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)) \\ &= \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$x_k = k + \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$$

6 **1)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_x \ : \ y \mapsto \dfrac{x^3}{6}\operatorname{ch}(y) + x - \operatorname{sh} x$.
Cette fonction est strictement croissante pour $y \in [0, x]$, nous allons déterminer les signes respectifs de $f_x(0)$ et $f_x(x)$:

- $f_x(0) = \dfrac{x^3}{6} + x - \operatorname{sh} x = g(x)$ où g est une fonction telle que :
  $g'(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1 - \operatorname{ch} x$,
  $g''(x) = x - \operatorname{sh} x$, $g^{(3)}(x) = 1 - \operatorname{ch} x$, ce qui permet d'établir de proche en proche que g'', puis g' et enfin g sont strictement décroissantes et strictement négatives sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_x(0) < 0$;
- $f_x(x) = \dfrac{x^3}{6}\operatorname{ch} x + x - \operatorname{sh} x = h(x)$ où h est une fonction telle que :
  $h'(x) = \dfrac{x^2}{2}\operatorname{ch} x + \dfrac{x^3}{6}\operatorname{sh} x + 1 - \operatorname{ch} x$,
  $h''(x) = x\operatorname{ch} x + x^2\operatorname{sh} x + \dfrac{x^3}{6}\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ $h^{(3)}(x) = 3x\operatorname{sh} x + 3\dfrac{x^2}{2}\operatorname{ch} x + \dfrac{x^3}{6}\operatorname{sh} x$, ce qui permet d'établir de proche en proche que h'', puis h' et enfin h sont strictement croissantes et strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_x(x) > 0$;

Ce qui prouve l'existence d'un unique $y \in]0, x[$ tel que $f_x(y) = 0$, on notera $y = \theta(x)x$, avec $\theta(x) \in]0, 1[$.

2) Quand $x \to 0$, $\theta(x)x = O(x)$ donc $\theta(x)x \to 0$; écrivons alors le développement limité à l'ordre 5 de $f_x(\theta(x)x)$:

$$\begin{aligned} f_x(\theta(x)x) &= \frac{x^3}{6}\left(1+\frac{\theta(x)^2x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= \frac{(10\theta(x)^2-1)x^5}{120} + o(x^5) \end{aligned}$$

Or, par définition de $\theta(x)$ cette quantité est nulle, ce qui prouve que :

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

7 1) Étudions les variations de $f_n \ : \ x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\pi}{2nx}$ pour $x \in]0,1[$:
$f_n'(x) = \frac{\pi}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2nx^2}$ est strictement positif, d'où le tableau de variations :

x	0		1
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Et l'existence d'un unique $x_n \in]0,1[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.
2)

$$f_n(x_n) = 0 \iff x_n \tan\frac{\pi x_n}{2} = \frac{\pi}{2n} \quad (1)$$

c'est-à-dire $x_n = \varphi^{-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ où $\varphi(y) = y\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)$ φ produit de fonctions positives croissantes sur $]0,1[$ l'est également, ce qui prouve que φ^{-1} est croissante et donc que la suite (x_n) est décroissante, comme la suite $(\frac{\pi}{2n})$.
De plus, φ et donc φ^{-1} sont continues, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \varphi^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\right) = 0$$

En utilisant alors un développement limité à l'ordre 1 de la fonction tangente et l'égalité (1), nous obtenons :

$$\frac{\pi x_n^2}{2} + o(x_n^2) = \frac{\pi}{2n}$$

soit, puisque $x_n > 0$, $x_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

8 1) La fonction f est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur $[a,b]$.
2) Considérons la fonction g définie sur $[a,b]$ par : $g(x) = f(x) - x$. $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Comme g est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires prouve qu'il existe au moins un réel c de $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$. S'il en existait deux distincts, c_1 et c_2, on aurait : $|c_1 - c_2| < |c_1 - c_2|$, ce qui est absurde, d'où l'unicité d'un tel réel.
3) Si la suite (u_n) converge, sa limite est nécessairement c.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - c| \leqslant |u_n - c|$: la suite $(|u_n - c|)$ est décroissante ; comme elle est minorée par 0, elle converge. Soit ℓ sa limite.
Comme la suite (u_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il en existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge ; soit c' sa limite. $|u_{\varphi(n)} - c|$ converge vers $|c' - c|$ d'où $|c' - c| = \ell$. De même, $(u_{\varphi(n)+1})$ converge vers $f(c')$, donc $|u_{\varphi(n)+1} - c|$ converge vers $|f(c') - c|$ d'où $|f(c') - c| = \ell$. On en déduit que : $|f(c') - c| = |c' - c|$, c'est-à-dire $|f(c') - f(c)| = |c' - c|$, ce qui d'après l'hypothèse n'est possible que si $c' = c$. En définitive, $\ell = 0$: la suite $(|u_n - c|)$ converge vers 0, c'est-à-dire que (u_n) converge vers c.

Chapitre 23

1 **a)** Faux ; ce n'est pas suffisant. **b)** Faux ; il est évident que les α_i peuvent être tous nuls. **c)** Faux ; il en suffit d'un. **d)** Vrai. **e)** Vrai. **f)** Faux. **g)** Faux ; elle doit être libre. **h)** Vrai. **i)** Vrai. **j)** Faux ; on n'a pas nécessairement $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

2 **a)** Libre. **b)** Libre. **c)** Liée : $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ **d)** Liée : $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ (une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement liée).

3 **a)** On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 = 0.$$

En choisissant des valeurs particulières de x, montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
b) $2f_1 - f_2 - f_3 = 0$: la famille (f_1, f_2, f_3) est liée.
c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.
• $n = 1$. La fonction $x \mapsto e^{\lambda_1 x}$ est non nulle ; elle forme donc une famille libre.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ soit libre. Soit f_{n+1} la fonction $x \mapsto e^{\lambda_{n+1}x}$ où λ_{n+1} est un réel distinct de tous les λ_i pour $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1})$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, e^{\lambda_i x} = 0 \quad (1)$$

On dérive cette relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \, \lambda_i \, e^{\lambda_i x} = 0 \quad (2)$$

En multipliant la relation (1) par λ_{n+1} et en retranchant la relation (2) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, (\lambda_{n+1} - \lambda_i) \, e^{\lambda_i x} = 0 \quad (3)$$

Comme la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \alpha_i \, (\lambda_{n+1} - \lambda_i) = 0$$

et comme

$$\lambda_{n+1} \neq \lambda_i, \quad \alpha_i = 0.$$

Il reste $\alpha_{n+1} f_{n+1} = 0$, d'où $\alpha_{n+1} = 0$; la famille $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ est libre.

d) Même méthode, en dérivant deux fois.

4 **1)** On sait que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda_x x$. Il faut montrer que λ_x ne dépend pas de x. Montrer pour cela que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \lambda_x = \lambda_y$; il faut distinguer deux cas suivant que la famille (x, y) est libre ou liée.
2) Les homothéties vectorielles conviennent. Réciproquement, soit f un endomorphisme qui commute avec tout endomorphisme de E. Pour tout $x \in E$, f commute avec la projection p sur Vect(x) parallèlement à un s.e.v. supplémentaire quelconque. Montrer comment on peut en déduire que $f(x)$ est colinéaire à x et conclure.

5 Chercher une base...
a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x - 2y + 3z\}$

$$= \{(2y - 2z, y, z) \ , \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \ , \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

Donc $A = \text{Vect}\big((2, 1, 0), (-3, 0, 1)\big)$.
On prouve que la famille $\big((2, 1, 0), (-3, 0, 1)\big)$ est libre, donc que c'est une base de A. $\dim A = 2$.
b) $\dim B = 1$. **c)** $\dim C = 1$. **d)** $\dim D = 4$. **e)** $\dim E = 2$. **f)** $\dim F = 2$. **g)** $\dim G = 2$.

6 **a)** base de Ker f : $(1, 1)$ base de Im f : $(1, -1, 0)$; **b)** base de Ker f : $(1, 1, 1)$; base de Im f : $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$; **c)** base de Ker f : $(1 - i)$; base de Im f : $(1 + i)$; **d)** base de Ker f : $(X + 1)$; base de Im f : $(1\ , X^2 + 2X\ , 2X^3 + 3X^2)$.

7 Il faut que e_3 ne soit pas combinaison linéaire de (e_1, e_2) et que e_4 ne soit pas combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3). Par exemple :

$$\big((1, 1, 1, 1)\ , (1, 1, -1, -1)\ , (1, 0, 0, 0)\ , (0, 0, 0, 1)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

8 **a)** $2 : x_3 = x_1 + x_2\ , \ x_4 = -x_1 + x_2$. **b)** 4.
c) $3 : 2x_1 + x_2 - x_4 = 0$.

9 Une condition nécessaire est donnée par le théorème du rang :
$\dim F + \dim G = n$. On montre que cette condition est suffisante : soit F et G deux s.e.v. de E de dimensions respectives r et p avec $r + p = n$. Soit $(f_1, \cdots, f_r)$ une base de F et $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de G. On peut compléter cette dernière en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. L'endomorphisme u défini par : $\forall i \in [\![1, p]\!] \ u(e_i) = 0$ et $\forall i \in [\![p + 1, n]\!] \quad u(e_i) = f_{i-p}$ convient.

10 S'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que Ker u = Im u, le théorème du rang donne $\dim E = 2\dim \text{Ker}\, u$, qui est donc pair.
Réciproquement, si

$$\dim E = 2p,$$

soit $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_{2p})$ une base de E. L'endomorphisme u défini par : $\forall i \in [\![1, p]\!] \ u(e_i) = 0$ et $\forall i \in [\![p + 1, 2p]\!]$ $u(e_i) = e_{i-p}$ convient.

11 Utiliser l'inclusion $\text{Im}\,(f + g) \subset \text{Im}\, f + \text{Im}\, g$ pour montrer que : $\text{rg}\,(f + g) \leqslant \text{rg}\, f + \text{rg}\, g$.
Puis appliquer ce résultat à :

$$f = (f + g) - g \quad \text{et} \quad g = (f + g) - f$$

12 Comme $f^{p_0 - 1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^{p_0 - 1}(x) \neq 0$.
Soit $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{p_0 - 1}) \in \mathbb{K}^{p_0}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p_0 - 1} \alpha_i f^i(x) = 0$.
Calculer l'image de cette somme par f^k successivement pour $k = p_0 - 1$, $k = p_0 - 2$, etc. jusqu'à $k = 1$ et conclure.
On a obtenu une famille libre à p_0 éléments : $p_0 \leqslant n$.
Pour tout $k \geqslant p_0$, $f^k = 0$; en particulier $f^n = 0$.

13 **1)** On montre facilement que $\text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, g = \{0\}$ et $\text{Ker}\, g \cap \text{Im}\, f = \{0\}$. On a alors :

$$\dim \text{Ker}\, f + \dim \text{Im}\, g \leqslant \dim E \quad (1)$$
$$\dim \text{Ker}\, g + \dim \text{Im}\, f \leqslant \dim F \quad (2)$$

Ajouter membre à membre et utiliser le théorème du rang pour montrer que (1) et (2) sont des égalités.
2) La question précédente prouve également que :

$$\dim \text{Im}\, f = \dim \text{Im}\, g$$

Par ailleurs, $f g f = f$ prouve que $\text{Im}\, f g = \text{Im}\, f$ et $g f g = g$ prouve que $\text{Im}\, g f = \text{Im}\, g$.

14 **1)** Appliquer le théorème du rang à la restriction de g à Im f.
2) On en déduit $\text{rg}\, gf \leqslant \text{rg}\, f$. Par ailleurs, $\text{Im}\, gf \subset \text{Im}\, g$, d'où $\text{rg}\, gf \leqslant \text{rg}\, g$, ce qui donne la seconde inégalité.
Pour la première, utiliser l'inclusion

$$\text{Im}\, f \cap \text{Ker}\, g \subset \text{Ker}\, g$$

dans l'égalité de la question **1)**.
3) D'après la première question :

$$\text{rg}\,(hgf) = \text{rg}\,(gf) - \dim\,(\text{Im}\,(gf) \cap \text{Ker}\, h)$$
$$\text{rg}\,(hg) = \text{rg}\, g - \dim\,(\text{Im}\, g \cap \text{Ker}\, h)$$

Comparer ces deux expressions en remarquant que $\text{Im}\,(gf) \subset \text{Im}\, g$.

15 Soit $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une famille finie de nombres premiers distincts deux à deux, et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ une famille de nombres rationnels tels que : $\alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2 + \cdots + \alpha_n \ln p_n = 0$, soit après réduction au même dénominateur : $a_1 \ln p_1 + a_2 \ln p_2 + \cdots + a_n \ln p_n = 0$, avec $a_1, \ldots, a_n$ entiers relatifs. On a donc :

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n} = 1$$

ce qui, d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, implique : $a_1 = \cdots = a_n = 0$.
La famille $(\ln p_1, \ln p_2, \ldots, \ln p_n)$ est donc $\mathbb{Q}$-libre.

16 **1)** Soit $y \in \operatorname{Im} f : \exists x \in E \ y = f(x)$, alors :

$$(f + Id_E)(y) = f^2(x) + f(x) = 0 \quad : \quad y \in \operatorname{Ker}(f + Id_E).$$

Réciproquement :
soit $y \in \operatorname{Ker}(f + Id_E) : f(y) = -y$, ce qui prouve que $y \in \operatorname{Im} f$.
L'égalité : $\operatorname{Ker}(f + Id_E) = \operatorname{Im} f$ est bien établie.
2) Utilisons le résultat de la première question.
Soit $y \in \operatorname{Ker}(f + Id_E) \cap \operatorname{Im}(f + Id_E) : \exists x \in E \ y = f(x) + x$ et $f(y) + y = 0$, alors : $y = -f(y) \iff y = -(f^2(x) + f(x)) = 0$.
Ce qui établit : $\operatorname{Ker}(f + Id_E) \cap \operatorname{Im}(f + Id_E) = \{0\}$.
Le théorème du rang, appliqué à l'endomorphisme $f + Id_E$, permet d'affirmer : $\dim(\operatorname{Ker}(f + Id_E)) + \dim(\operatorname{Im}(f + Id_E)) = \dim(E)$.
D'où, **si E est de dimension finie,**

$$E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im}(f + Id_E)$$

17 **1)** Vérifiez que $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\alpha) \end{array} \right.$ est une forme linéaire.
Alors $E(\alpha)$, noyau de cette forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$; le même raisonnement s'applique à $E(\beta)$.
Enfin E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ comme intersection de 2 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) a) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(\alpha)X + (\lambda P + \mu Q)(\beta) \\ &= \lambda P(\alpha)X + \mu Q(\alpha)X + \lambda P(\beta) + \mu Q(\beta) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Ce qui établit la linéarité de l'application u.
b) $P \in \operatorname{Ker} u \iff P(\alpha) = P(\beta) = 0 : \operatorname{Ker} u = E$.
Il est clair que $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_1[X]$.
Réciproquement, soit $Q = a_1 X + a_0$, le polynôme

$$P = a_1 \frac{X - \beta}{\alpha - \beta} + a_1 \frac{X - \alpha}{\beta - \alpha}$$

vérifie $u(P) = Q$. D'où $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$.
3) et **4)** $E(\alpha) + E(\beta)$, somme de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminons sa dimension :
$E(\alpha) \cap E(\beta) = E = \operatorname{Ker} u$ a pour dimension $(n+1) - 2 = n - 1$, d'après le théorème du rang.
$E(\alpha) + E(\beta)$ a donc pour dimension : $2n - (n - 1) = n + 1$.
$\dim(E(\alpha) + E(\beta)) = \dim \mathbb{R}_n[X]$, **finie**, nous permet de conclure :

$$\mathbb{R}_n[X] = E(\alpha) + E(\beta), \quad \text{la somme n'est pas directe si } n > 1$$

18 **1)** Comme dans l'exercice précédent, $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\alpha) \end{array} \right.$ est une forme linéaire.

- Si $a \notin \{-2, 2\}$, $P \in \operatorname{Ker} f_a \iff (X - a)(X - 2)(X + 2)$ divise P :

  $$\operatorname{Ker} f_a = \{\lambda(X - a)(X - 2)(X + 2), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

  Ce noyau est une droite, le théorème du rang nous permet alors d'affirmer que le rang de f_a est 3 ;
- si $a \in \{-2, 2\}$ $P \in \operatorname{Ker} f_a \iff (X - 2)(X + 2)$ divise P :

  $$\operatorname{Ker} f_a = \{(X - 2)(X + 2)Q, Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$$

  Ce noyau est un plan, le théorème du rang nous permet alors d'affirmer que le rang de f_a est 2.

2) Considérons l'application f_a restreinte à $\mathbb{R}_2[X]$, notée g_a et reprenons la discussion précédente :

- Si $a \notin \{-2, 2\}$, $\operatorname{Ker} g_a = \operatorname{Ker} f_a \cap \mathbb{R}_2[X] = \{0\}$, g_a est injective.
  De plus $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc g_a est bijective.
  Il existe une unique solution de degré 2 de l'équation $f_a(P) = g_a(P) = (3, 2, 1)$;
- si $a \in \{-2, 2\}$, il n'existe pas de polynôme solution puisque l'équation donne 3 valeurs distinctes à $P(-2)$, $P(2)$ et $P(a)$.

3) Nous travaillons donc avec l'hypothèse supplémentaire :

$$a \notin \{-2, 2\}.$$

L'application g_a est bijective, l'image réciproque par g_a de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$, appelée famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $-2, 2$ et a.
Ces polynômes, notés L_{a_i} tels que $L_{a_i}(a_j) = \delta_{i,j}$ sont :

$$\begin{aligned} L_{-2}(X) &= \frac{(X - 2)(X - a)}{(-2 - 2)(-2 - a)} = \frac{(X - 2)(X - a)}{4(2 + a)} \\ L_2(X) &= \frac{(X + 2)(X - a)}{(2 + 2)(2 - a)} = \frac{(X - 2)(X - a)}{4(2 + a)} \\ L_a(X) &= \frac{(X - 2)(X - a)}{4(2 + a)}. \end{aligned}$$

Tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ se décompose sur cette base de la façon suivante :

$$P(X) = P(-2)L_{-2}(X) + P(2)L_2(X) + P(a)L_a(X).$$

Alors :

$$\begin{aligned} g_a(P) = (3, 2, 1) &\iff P = g_a^{-1}(3, 2, 1) \\ &\iff P = 3g_a^{-1}(1, 0, 0) + 2g_a^{-1}(0, 1, 0) \\ &\qquad + g_a^{-1}(0, 0, 1) \\ &\iff P = 3L_{-2}(X) + 2L_2(X) + L_a(X). \end{aligned}$$

L'unique solution de degré inférieur ou égal à 2 de l'équation est donc :

$$P_0 = 3\frac{(X - 2)(X - a)}{4(2 + a)} + \frac{(X - 2)(X - a)}{2(2 + a)} + \frac{(X - 2)(X - a)}{4(2 + a)}$$

Chapitre 24

1 **a)** Vrai. **b)** Faux ; il n'y a pas de multiplication interne. **c)** Faux ; il n'est pas stable par addition ($I_n - I_n = 0$). **d)** Vrai. **e)** Vrai. **f)** Faux ; c'est le contraire. **g)** Vrai. **h)** Faux. **i)** Faux ; c'est ${}^tB\,{}^tA$. **j)** Vrai.

2 **1)** $E = \mathrm{Vect}(I, J)$ où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De plus (I, J) est une famille libre, c'est donc une base de E.
2) $J^2 = 0$, d'où

$$(aI + bJ)(a'I + b'J) = aa'I + (ab' + a'b)J.$$

En déduire que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
J, par exemple, n'est pas inversible ; E n'est donc pas un corps.
3) Soit $A = aI + bJ$ et $A' = a'I + b'J$ deux éléments non nuls de E.
En utilisant la base (I, J), montrer que :

$$AA' = 0 \iff a = a' = 0.$$

L'ensemble des diviseurs de zéro de E est $\mathrm{Vect}(J)$.
4) De même, $AA' = I \iff a \neq 0,\ a' = \dfrac{1}{a},\ b' = -\dfrac{b}{a^2}$.
L'ensemble des éléments inversibles de E est $E \backslash \mathrm{Vect}(J)$.

3 **1)** Écrire, comme dans l'exercice précédent, que :
$E = \mathrm{Vect}(I, J)$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et prouver que l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi} & E \\ a+bi & \mapsto & aI+bJ \end{array} \right.$ est un isomorphisme de corps.
2) Calculer $\varphi\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big)$.

4 **1)** Montrer que $E = \mathrm{Vect}(I, J, K)$ et que (I, J, K) est une famille libre.
2) Calculer J^2, K^2, JK et KJ.
En déduire $(aI + bJ + cK)(a'I + b'J + c'K)$ et montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, qui est de plus commutatif.

5 **a) b)** et **c)** : Conjecturer le résultat, puis vérifier par récurrence.
d) $A = -I + 2J$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Or $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad J^k = 2^{k-1}J$
D'où :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = (-I + 2J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} \\ &= (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2k-1} (-1)^{n-k} J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{2}(3^n - (-1)^n) J \end{aligned}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} & \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} \\[2mm] \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} & \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

e) $A = -I + J$ avec $\forall k \in \mathbb{N}^*\ J^k = 3^{k-1}J$.
D'où :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = (-I + J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k} \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) J \end{aligned}$$

d'où l'on tire facilement l'expression détaillée de la matrice A^n.

6 $A^3 = 0$, d'où :

$$\forall n \geqslant 3 \quad (I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2$$

7 **1)** $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$
2) Comme $I_2 = A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_2)$, on en déduit que :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_2$$

3) $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + aX + b$. En remplaçant X successivement par 1 et 2, on obtient : $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$.
4) On en déduit :

$$\begin{aligned} A^n &= (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 2^n - 5 & 5(2^n - 1) \\ -6(2^n - 1) & 6 - 5 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8 Si $A^p = 0$ avec $p \geqslant 1$,
$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) = I_n - A^p = I_n$.
On en déduit que $I_n - A$ est inversible et que :

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

9 Utilisons le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } 0 \text{ si } i \neq j.$$

Posons :

$$E_{ij}^{np} = (m_{rs}) \quad \text{où} \quad \forall (r,s) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad m_{rs} = \delta_{ri}\,\delta_{sj}$$

$$E_{kl}^{pq} = (m'_{st}) \quad \text{où} \quad \forall (s,t) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!] \quad m'_{st} = \delta_{sk}\,\delta_{tl}$$

$$E_{ij}^{np} \times E_{kl}^{pq} = (m''_{rt}) \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$$

$$\forall (r,t) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$$

$$m''_{rt} = \sum_{h=1}^{p} m_{rh}\, m'_{ht} = \sum_{h=1}^{p} \delta_{ri}\,\delta_{hj}\,\delta_{hk}\,\delta_{tl}$$

• Si $j \neq k$, tous les termes de cette somme sont nuls : $E_{ij}^{np} \times E_{kl}^{pq} = 0$
• Si $j = k$, $m''_{rt} = \delta_{ri}\delta_{tl}$: $E_{ij}^{np} \times E_{kl}^{pq} = E_{il}^{nq}$.
En définitive : $E_{ij}^{np} \times E_{kl}^{pq} = \delta_{jk}\, E_{il}^{nq}$

10 Soit $M = (m_{ij})$ une matrice appartenant au centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. M commute avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en particulier, $\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2 \quad M\,E_{kl} = E_{kl}\,M$.

Posons :

$$M\,E_{kl} = P = (p_{ij}),$$

où

$$p_{ij} = \sum_{r=1}^{n} m_{ir}\,\delta_{rk}\,\delta_{jl} = m_{ik}\,\delta_{jl}$$

et :

$$E_{kl}\,M = Q = (q_{ij}),$$

où

$$q_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \delta_{ik}\,\delta_{rl}\,m_{rj} = \delta_{ik}\,m_{lj}$$

$$P = Q \iff \forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4 \quad m_{ik}\delta_{jl} = \delta_{ik}m_{lj}$$

En choisissant $k = i$ et $l = j$, on obtient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{ii} = m_{jj}$$

En choisissant $j = k = l$ et $i \neq j$, on obtient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{ij} = 0$$

En définitive, la matrice M est scalaire : $\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad M = \lambda I_n$. Réciproquement, il est clair qu'une telle matrice commute avec toute matrice carrée d'ordre n. Le centre de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{Vect}(I_n)$.

11 **1)** $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$

$$= (2I_n - (I_n + A))(I_n + A)^{-1} \quad (*)$$

Ce produit est commutatif.

2) En développant (*), on obtient $I_n + B = 2(I_n + A)^{-1}$. $(I_n + B)$ est donc inversible. En déduire facilement que :

$$A = (I_n - B)(I_n + B)^{-1} \text{ (ou } (I_n + B)^{-1}(I_n - B))$$

12 **a)** $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $M = (1, -5, 4)$

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13 La famille $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{n-1}(x))$ est libre (*cf. exercice* 12 du chapitre précédent). Comme elle a n éléments, c'est une base de E. La matrice de f dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Toutes les matrices carrées d'ordre n nilpotentes d'indice n sont donc semblables à cette matrice.

14 $\mathrm{Ker}\, f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = z\} = \mathrm{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = (1,1,1)$.

$\mathrm{Im}\, f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ avec $e_2 = (2,-1,-1)$ et $e_3 = (-1,2,-1)$.

On vérifie que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = 3$, ce qui prouve que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$. On en déduit que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $f(e_1) = 0, f(e_2) = 3e_2$ et $f(e_3) = 3e_3$, la matrice de f dans cette base est :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On constate que $f = h \circ p = p \circ h$ où h est l'homothétie vectorielle de rapport 3 et p la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.

15 $M_A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$

16 Soit f, f', f'' les applications linéaires canoniquement associées à A, A', A''.

1) $AA' = I_n \implies f \circ f' = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \implies f$ surjective

$\implies \dim \mathbb{R}^n \leqslant \dim \mathbb{R}^p$

2) $A''A = I_p \implies f'' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} \implies f$ injective

$\implies \dim \mathbb{R}^n \geqslant \dim \mathbb{R}^p$

Si $n \neq p$, une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ne peut être simultanément inversible à droite et à gauche. Si $n = p$, la surjectivité et l'injectivité de f sont équivalentes, et l'on sait que si A possède une inverse à droite et une inverse à gauche, elles sont égales.

17 Soit f et g les applications linéaires canoniquement associées à A et B.

AB inversible $\iff f \circ g$ bijective

$\implies f$ surjective et g injective.

BA inversible $\iff g \circ f$ bijective

$\implies f$ injective et g surjective.

Si AB et BA sont toutes les deux inversibles, f et g sont bijectives, ce qui implique $n = p$, en contradiction avec l'énoncé.

18 Soit φ_P l'application : $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & P^{-1}AP \end{array} \right.$

On montre facilement que :

$$\varphi_P(\alpha A + \beta B) = \alpha\varphi_P(A) + \beta\varphi_P(B)$$

$$\varphi_P(AB) = \varphi_P(A)\varphi_P(B)$$

$$\varphi_P(I_n) = I_n$$

φ_P est donc un endomorphisme d'espace vectoriel et d'anneau. Il est bijectif et $(\varphi_P)^{-1} = \varphi_{P^{-1}}$.

Soit Q un polynôme annulant la matrice A : $Q(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0$. Montrer soigneusement que $Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P = 0$. (C'est un moyen pour reconnaître rapidement que deux matrices carrées ne sont pas semblables, en trouvant un polynôme qui annule l'une des matrices et pas l'autre.)

19 Chercher une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $PA = BP$. On aboutit à un système de quatre équations à quatre inconnues, qui admet des solutions ; par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

20 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. On raisonne par l'absurde : si I_n+A n'est pas inversible, $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}+u$ n'est pas injectif ; il existe donc $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que $(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} + u)(x) = 0$, c'est-à-dire $u(x) = -x$.
En revenant aux matrices, il existe une matrice unicolonne non nulle $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ telle que $AX = -X$, ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = -x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = -x_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = -x_n \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} |x_1| = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n| < \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ |x_2| = |a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n| < \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \dots \\ |x_n| = |a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n| < \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \end{cases}$$

En sommant membre à membre, on aboutit à une contradiction.

21 **1)** Posons $A = (a_{ij})$ et $A\,{}^tA = (c_{ij})$.
$\forall i \in [\![1, m]\!] \quad c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$.

$$A\,{}^tA = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1, m]\!] \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$$

Dans $\mathbb{R}$, une somme de carrés est nulle si, et seulement si, chacun des termes est nul. D'où $\forall (i, k) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!] \quad a_{ik} = 0$, c'est-à-dire $A = 0$. Ce résultat est faux dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$, comme le montre l'exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Appliquer le résultat de la première question à la matrice BA.

3) Appliquer le résultat de la deuxième question à la matrice $B - C$.

22 **1)** On suppose que ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$. Calculer ${}^tAB$ et conclure que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.
2) On suppose que ${}^tA = -A$ et ${}^tB = -B$. Montrer de même que AB est antisymétrique si et seulement si $BA = -AB$ (on dit que A et B « anticommutent »).

23 **1)** Vérifier que $M^2 + 2M - 3I_3 = 0 \quad (*)$ **2)** Comme dans l'exercice précédent, écrire la division euclidienne de X^n par $X^2 + 2X - 3 = (X+3)(X-1)$:

$$\exists !(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad X^n = (X+3)(X-1)Q + aX + b$$

$X = 1$ et $X = -3$ donnent alors :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -3a + b = (-3)^n \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1 - (-3)^n}{4} \\ b = \dfrac{3 + (-3)^n}{4} \end{cases}$$

D'où

$$M^n = \frac{1 - (-3)^n}{4} M + \frac{3 + (-3)^n}{2} I_3$$

3) L'égalité $(*)$ prouve que A est inversible et donne

$$M^{-1} = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}I_3,$$

qui vérifie la fomule précédente pour $n = -1$.
Une récurrence sur alors $n \in \mathbb{N}^*$ prouve alors

$$M^{-n} = \frac{1 - (-3)^{-n}}{4} M + \frac{3 + (-3)^{-n}}{2},$$

le calcul de M^n s'étend à $n \in \mathbb{Z}$.

24 Notons $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$f(e_2) = 2f(e_1) = 2(e_1 + e_2) \quad \text{et} \quad f(e_3) = 2e_3.$$

Im (f) est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$; on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f) = 1$, $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}(2e_1 - e_2)$.

25 **1)** A n'est pas nulle, ses colonnes sont proportionnelles à la première : rg $(A) = 1$.
Im $(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - 3e_2 - 2e_3)$, Ker (f) est l'hyperplan d'équation : $x + y - z = 0$.
2) $e_1 - 3e_2 - 2e_3 \in \mathrm{Ker}\,(f)$, d'où Im $(f) \subset$ Ker (f).
Il suffit de choisir $e'2 = e_1$, d'où $e'1 = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ et de compléter par un vecteur de Ker (f) linéairement indépendant de e_2', par exemple $e'3 = e_1 + e_2 + 2e_3$ pour obtenir la base cherchée.
(Vérification : calculez P matrice de passage de B à B' et vérifier $PA' = AP$.)

26 La matrice nulle est clairement solution du problème, vérifions par l'absurde que c'est la seule.

Soit $A \neq 0$ telle que $A^2 = A$, l'application canoniquement associée à A est donc une projection p non nulle.
Nous savons qu'alors $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id})$, avec $\dim \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}) = m > 0$; ce qui entraine que dans une base adaptée à cette décomposition, p a pour matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} 0_{n_m,n_m} & 0_{n_m,m} \\ 0_{n,n_m} & I_{m,m} \end{pmatrix}$$

Et donc que $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A') = m > 0$, en contradiction avec l'énoncé. (reprenez l'application 4 pour les propriétés de la trace d'une matrice)
La matrice nulle est la seule solution du problème.

27 Une matrice M d'ordre n est nilpotente si et seulement si $M^n = 0$ (reportez-vous à l'exercice 12 du chapitre 23). L'hypothèse est donc $(A+\lambda B)^n = 0$; or : $(A+\lambda B)^n = A^n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k M_k + \lambda^n B^n$ où chaque matrice M_k est la somme des $\binom{n}{k}$ produits distincts comportant k facteurs B et $n-k$ facteurs A.
(en effet, l'énoncé ne suppose pas que A et B commutent ; par exemple $M_1 = A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \cdots + ABA^{n-2} + BA^{n-1}$).
Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'élément d'indice (i,j) de la matrice $(A+\lambda B)^n$ est donc : $P_{i,j}(\lambda) = (A^n)_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (M_k)_{i,j} + \lambda^n (B^n)_{i,j}$
Or ce polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annule pour $n+1$ valeurs distinctes, ce qui signifie qu'il est nul, en particulier : $(A^n)_{i,j} = (B^n)_{i,j} = 0$.
Nous avons donc établi que A^n et B^n sont égales à la matrice nulle :

$$A \quad \text{et} \quad B \quad \text{sont nilpotentes}$$

Chapitre 25

1 **a)** Vrai. **b)** Vrai. **c)** Faux ; on peut **ajouter** à une ligne une combinaison linéaire des autres. **d)** Faux ; il faut que T soit de la forme T_r. **e)** Vrai. **f)** Faux ; l'une des équations pourrait être $0 = 1$. **g)** Vrai. **h)** Vrai.

2 $\operatorname{rg} A = 2$; $\operatorname{rg} B = 3$; $\operatorname{rg} C = 3$;
$\operatorname{rg} D = 2$, si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et $\operatorname{rg} D = 1$, si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

3 Si $a = 1$, $\operatorname{rg} A = 1$. Si $a = -\dfrac{1}{n-1}$, $\operatorname{rg} A = n-1$.
Dans tous les autres cas, $\operatorname{rg} A = n$.

4 **a)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1-i \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$

d) On pose $\alpha = abc + ab + ac + bc$. D est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et :

$$D^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} b+c+bc & -c & -b \\ -c & c+a+ca & -a \\ -b & -a & a+b+ab \end{pmatrix}$$

5 **a)** Le système a des solutions si et seulement si $\lambda = 9$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est :

$$(x,y,z) = \left(\frac{16}{7} - \frac{5}{7}z, \frac{1}{7} + \frac{8}{7}z, z\right).$$

b) $(x,y,z,t) = \left(1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.

c) $(x,y,z,t) = \left(-\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}z + \dfrac{1}{5}t, -\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}z - \dfrac{7}{5}t, z, t\right)$.

d) $(x,y,z) = (4,3,2)$.

6 Le système équivaut à :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ (b-a)y + (c-a)z + (d-a)t = 1-a \\ (c-a)(c-b)z + (d-a)(d-b)t = (1-a)(1-b) \\ (d-a)(d-b)(d-c)t = (1-a)(1-b)(1-c) \end{cases}$$

Si les quatre valeurs a, b, c et d sont distinctes deux à deux, le système est de Cramer et admet pour unique solution :

$$x = \frac{(1-a)(1-c)(1-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)},$$

$$y = \frac{(1-a)(1-c)(1-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$z = \frac{(1-a)(1-b)(1-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)},$$

$$t = \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

Si les quatre valeurs ne sont pas distinctes, l'une au moins doit être égale à 1 pour que le système ait des solutions. On peut distinguer six cas (aux permutations près des lettres a, b, c, d) :
1) $c = d = 1$ et $\operatorname{Card}(a,b,1) = 3$. Le système équivaut à : $x = y = 0$; $z + t = 1$.
2) $c = d \neq 1$, $a = 1$ et $\operatorname{Card}(b,c,1) = 3$: $x = 1$; $y = 0$; $z + t = 0$.
3) $c = d = 1$ et $a = b \neq 1$: $x + y = 0$; $z + t = 1$.
4) $b = c = d = 1$ et $a \neq 1$: $x = 0$; $y + z + t = 1$.
5) $b = c = d \neq 1$ et $a = 1$: $x = 1$; $y + z + t = 0$.
6) $a = b = c = d = 1$: $x + y + z + t = 1$.

7 Si $a \notin \{0, 1, -1, i, -i\}$, le système est de Cramer et admet pour unique solution : $(x,y,z) = \left(a, 1, \dfrac{1}{a}\right)$.
Si $a = 0$, le système est incompatible.

Si $a = 1,\ (x, y, z) = (1, z, z)$.
Si $a = -1,\ (x, y, z) = (-1, -z, z)$.
Si $a = i,\ (x, y, z) = (iy, y, -i)$.
Si $a = -i,\ (x, y, z) = (-iy, y, i)$.

8 Les solutions de ces deux systèmes voisins sont bien éloignées :
a) $(10, -20, 30)$. **b)** $(-66, 69, -11)$.

9 Ker f est l'ensemble des éléments $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ solutions du système :

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -x + y + 2t = 0 \end{cases}$$

Par la méthode du pivot, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x = -z + t \\ y = -z - t \end{cases}$$

Soit : $(x, y, z, t) = z(-1, -1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1)$, quel que soit $(z, t) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((-1, -1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\big)$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 2.$$

Les deux premiers vecteurs colonnes de la matrice A étant linéairement indépendants, ils forment une base de Im f :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((0, 1, 1, -1), (1, 0, 1, 1)\big)$$

10 La fraction rationnelle F a pour partie entière -1 ; sa décomposition en éléments simples s'écrit :

$$F = -1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{X + j}$$

Comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $F(i) = 0$, les coefficients c_j sont solutions du système linéaire donné.
Réciproquement, si $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est une solution du système, on considère la fraction rationnelle G définie par :

$$G = -1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X + j} = \frac{P(X)}{(X + 1) \cdots (X + n)}$$

Montrer que le polynôme P est de degré n, que son coefficient dominant est -1 et qu'il a pour racines $1, 2, \cdots, n$. En déduire que $G = F$ et que $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $x_j = c_j$. Le système admet donc une solution unique.
Il reste à calculer les coefficients c_j de la décomposition de F en éléments simples. On obtient :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad x_j = (-1)^{n-j} \frac{(n + j)!}{(j - 1)!\ j!(n - j)!}$$

11 **1)** $\dim \operatorname{Im} f = 3$ et d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Si $f^2 = 0$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$, ce qui est impossible du fait des dimensions.

Il existe donc un vecteur x tel que $f^2(x) \neq 0$. La famille $(x, f(x), f^2(x))$ est libre, on peut la compléter en une base $(x, f(x), f^2(x), y)$. La matrice de f dans cette base est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

La matrice représentant f^3 est :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ad^2 \\ 0 & 0 & 0 & (a + bd)d \\ 0 & 0 & 0 & a + (b + cd)d \\ 0 & 0 & 0 & d^3 \end{pmatrix}$$

Si $f^3 = 0$, $A^3 = 0$, d'où $a = d = 0$. La matrice A est alors de rang 2, contrairement à l'hypothèse. Donc $f^3 \neq 0$.
2) Ces inclusions sont immédiates.
Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Comme pour tout $x \in E$, $f^2(x) \in \operatorname{Ker} f^2$, on en déduirait $f^2(x) \in \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $f^3(x) = 0$, d'où $f^3 = 0$, en contradiction avec la question précédente.
Supposons $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f^3$. Comme pour tout $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Ker} f^3$, on en déduirait $f(x) \in \operatorname{Ker} f^2$, c'est-à-dire $f^3(x) = 0$, d'où $f^3 = 0$: contradiction.
Supposons $\operatorname{Ker} f^3 = \operatorname{Ker} f^4 = E$. On aurait encore $f^3 = 0$: contradiction.
En définitive, ces inclusions sont strictes.
3) Les dimensions des sous-espaces $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Ker} f^2, \operatorname{Ker} f^3$ et $\operatorname{Ker} f^4$ sont respectivement 1, 2, 3, 4. D'après le théorème du rang, on en déduit que les rangs de f, f^2, f^3, f^4 sont respectivement 3, 2, 1, 0.

12 On remarque que $r \leqslant n$. Soit f et g les applications linéaires resp. de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^r$ canoniquement associées aux matrices B et C. On sait que $\operatorname{Im} fg \subset \operatorname{Im} f$, et comme g est surjective, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} fg$: $\operatorname{Im} fg = \operatorname{Im} f$ d'où $\operatorname{rg} fg = \operatorname{rg} f = r$, c'est-à-dire $\operatorname{rg} A = r$.
Réciproquement, soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A de rang r. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de Im h, que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. La matrice de h dans cette base s'écrit en blocs :

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A_1 est une matrice carrée d'ordre r inversible.
On peut la décomposer en :

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}$$

En revenant à la base initiale, on aura bien :

$$A = PA'P^{-1} = PB'C'P^{-1} = BC$$

avec

$$B' = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C' = \begin{pmatrix} I_r & A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}$$

avec $B = PB'$ et $C = C'P^{-1}$ de rang r.

Dans l'exemple proposé, on obtient avec l'aide de Maple :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 20 & 26 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$B = \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 40 & 54 \\ 50 & 68 \\ 60 & 82 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{13}{10} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Chapitre 26

1 **a)** Faux ; ex. : produit de 2 transpositions à supports disjoints. **b)** Faux ; pas de condition de support. **c)** Vrai. **d)** Vrai. **e)** Faux ; il ne contient pas l'identité et il n'est pas stable. **f)** Vrai. **g)** Faux ; c'est le contraire (n'allez pas comprendre qu'un cycle de longueur impaire est une permutation impaire ! ! !) **h)** Faux ; c'est vrai si leurs supports sont disjoints.

2 L'ordre de σ est 5, celui de σ' est 6.
$\sigma\,\sigma'$ est la transposition $(2,5)$. $\sigma'\,\sigma$ est la transposition $(3,4)$.

3 **1)** Soit p l'ordre de la permutation $\sigma\,\sigma'$:

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad (\sigma\,\sigma')^k \neq \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad (\sigma\,\sigma')^p = \mathrm{Id}$$

Multiplier à gauche par σ' et à droite par σ'^{-1} et conclure que p est aussi l'ordre de $\sigma'\,\sigma$.
2) Même méthode.

4 Si $n = 2$, le groupe $\mathcal{S}_2$ est commutatif, il est donc égal à son centre.
Si $n > 2$, soit i, j, k trois éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. Une permutation σ appartenant au centre de $\mathcal{S}_n$ doit en particulier commuter avec les transpositions (i,j) et (i,k). En déduire que $\sigma(i) = i$ et que le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à $\{\mathrm{Id}\}$.

5 $\sigma = (4,6)(4,5)(2,4)(2,3)(1,2) \quad \varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$
$\sigma' = (1,8)(3,7)(5,6)(1,4)(2,3)(2,5) \ \varepsilon(\sigma') = (-1)^6 = +1$

6
$$\tau\,\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Le nombre d'inversions de σ est :

$$2 + 2 + 1 = 5 \quad \varepsilon(\sigma) = -1.$$

Le nombre d'inversions de τ est :

$$2 + 3 + 1 + 1 = 7 \quad \varepsilon(\tau) = -1.$$

Le nombre d'inversions de $\tau\,\sigma$ est :

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4 \ \varepsilon(\tau\,\sigma) = +1.$$

Le nombre d'inversions de $\sigma\,\tau$ est :

$$4 + 4 = 8 \quad \varepsilon(\sigma\,\tau) = +1.$$

7 **1)** Le groupe alterné étant engendré par les produits de deux transpositions, il suffit de démontrer que le produit de deux transpositions distinctes est un produit de cycles d'ordre 3. Distinguons deux cas :
a) Les supports des deux transpositions sont disjoints :

$$(k,l)(i,j) = (k,i,l)(i,j,k)$$

(i, j, k, l sont supposés distincts deux à deux)
b) Les supports ont un élément commun :

$$(i,k)(i,j) = (i,j,k)$$

(i, j, k sont supposés distincts deux à deux).
2) D'après le résultat de l'**Exercice résolu** (question **1)**), le groupe alterné est engendré par les produits $(1,j)(1,i)$, c'est-à-dire les cycles $(1,i,j)$.
Or : $\ (1,i,j) = (1,2,j)(1,2,j)(1,2,i)(1,2,j)$.
Le groupe alterné est donc engendré par les cycles $(1,2,k)$ pour $k \in [\![3, n]\!]$.

8 Un déplacement horizontal ne change pas l'ordre des numéros, donc ne produit pas d'autre permutation que l'identité. Un déplacement vertical produit un cycle de longueur 3, donc une permutation paire. Par toute manipulation du taquin, on obtient un produit de permutations paires.
Question subsidiaire : Peut-on obtenir toutes les permutations paires ?

Chapitre 27

1 **a)** Faux ; elle n'est pas linéaire par rapport à un p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$, mais par rapport à chacune des variables $x_1, \cdots, x_p$. **b)** Vrai. **c)** Faux. **d)** Faux. **e)** Vrai. **f)** Faux ; si n est pair : $\mathrm{Det}(-A) = \mathrm{Det}(A)$. **g)** Faux ; on multiplie le déterminant par ce scalaire. **h)** Vrai. **i)** Faux ; il faut que **tous** les déterminants extraits d'ordre $r+1$ soient nuls.

2 Posons $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$.
$\mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{Det}_b(x - e_1, x - e_2, \cdots, x - e_n)$
Développer, en notant que les termes où x apparaît plus d'une fois sont nuls.
On obtient : $\quad \mathrm{Det}_b(x_1, \cdots, x_n) = n(-1)^{n-1} + (-1)^n$

3 **a)** 0 . **b)** $\sin(c-b) + \sin(a-c) + \sin(b-a)$. **c)** 0 .

4 Effectuer une permutation des colonnes pour se ramener à un déterminant triangulaire :

$$D = (-1)^{E(\frac{n}{2})} a_1\, a_2 \cdots a_n$$

5 **a)** $(ad - bc)^2$. **b)** $8abcd$. **c)** $(a-b)^2\left[(a+b)^2 - 4x^2\right]$.

6 On vérifie facilement que u_A est linéaire. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La matrice de u_A dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ est :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

d'où : $\quad \mathrm{Det}(u_A) = (ad - bc)^2 = (\mathrm{Det}A)^2$

7 On vérifie aisément que $\deg(Q) = \deg(P)$ et que l'application $\varphi : P \mapsto Q$ est linéaire. Calculer $\varphi(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et montrer qu'il s'agit d'un polynôme unitaire de degré k. En déduire la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ et trouver $\mathrm{Det}(\varphi) = 1$.

8 Calculer de deux façons $\mathrm{Det}({}^tA)$ et conclure.

9 L'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^* \\ M & \mapsto & \mathrm{Det}M \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes. L'image réciproque d'un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ par ce morphisme est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exemples :

$\{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\quad \mathrm{Det}M \in \mathbb{R}^*\}$,
$\{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\quad \mathrm{Det}M = 1\}$
$\{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\quad |\mathrm{Det}M| = 1\}$,
$\{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\quad \mathrm{Det}M \in \{1, i, -1, -i\}\}$, etc.

10 **1)** *cf. exercice* 13 du chapitre 24 sur les matrices : B est semblable à la matrice :

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $I_n + B$ est semblable à $I_n + B'$, donc :

$$\mathrm{Det}(I_n + B) = \mathrm{Det}(I_n + B') = 1.$$

3) Si A est inversible : $\mathrm{Det}(A + B) = \mathrm{Det}\left(A(I_n + A^{-1}B)\right) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(I_n + A^{-1}B)$. Comme A et B commutent, $A^{-1}B$ est nilpotente d'indice n ; on peut lui appliquer le résultat de la question précédente : $\mathrm{Det}(I_n + A^{-1}B) = 1$, d'où

$$\mathrm{Det}(A + B) = \mathrm{Det}(A).$$

Si A n'est pas inversible, on peut montrer par l'absurde que $A + B$ ne l'est pas non plus. (Si $A+B$ était inversible, on appliquerait le cas précédent à $A = (A + B) - B$...) Donc $\mathrm{Det}(A + B) = \mathrm{Det}A = 0$.

11 On effectue les opérations suivantes sur les colonnes C_k ou sur les lignes L_k :
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $C_k \leftarrow C_k + iC_{k+n}$
Pour tout $k \in [\![n + 1, 2n]\!]$, $L_k \leftarrow L_k - iL_{k-n}$
On obtient :

$$\mathrm{Det}C = \left|\begin{array}{c|c} A + iB & B \\ \hline 0 & A - iB \end{array}\right| = \mathrm{Det}(A + iB)\mathrm{Det}(A - iB)$$

Montrer que $\mathrm{Det}(A - iB) = \overline{\mathrm{Det}(A + iB)}$ et conclure.

12 De chaque colonne à partir de la deuxième, retrancher la précédente ; puis à chaque ligne jusqu'à l'avant-dernière, ajouter la dernière. On obtient un déterminant triangulaire qui vaut : $(n - 1)(-2)^{n-2}(-1)$.

13 Soit $(C_1, \cdots, C_n)$ les vecteurs-colonnes de A et $J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}B &= \mathrm{Det}(C_1 + xJ, \cdots, C_n + xJ) \\ &= \mathrm{Det}(C_1 + xJ, C_2 - C_1, \cdots, C_n - C_1) \\ &= \mathrm{Det}(C_1, C_2, \cdots, C_n) + x\,\mathrm{Det}(J, C_2 - C_1, \cdots, C_n - C_1) \\ &= \alpha x + \beta \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
Application : $D_n(a + x, b + x, c + x) = \alpha x + \beta$. En supposant $b \neq c$, remplacer x par $-b$ ou par $-c$ et calculer α et β. On obtient :

$$D_n(a, b, c) = \frac{c(a - b)^n - b(a - c)^n}{c - b}$$

Si $b = c$, un calcul direct donne :

$$D_n(a, b, b) = (a - b)^{n-1}\,(a + (n - 1)b).$$

14 **a)** $A_n = 2\cos\theta A_{n-1} - A_{n-2}$. Les racines complexes de l'équation caractéristique sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, d'où $A_n = \alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta$. Les valeurs de A_1 et A_2 donnent α et β.

En définitive : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \dfrac{\sin(n + 1)\theta}{\sin\theta}$

b) $B_n = (1 + x^2)B_{n-1} - x^2 B_{n-2}$. Même méthode, qui conduit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

c) On développe C_n par rapport à la première colonne :

$$C_n = a\begin{vmatrix} a & & & b & 0 \\ & \ddots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \ddots & & \vdots \\ b & & & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(2n-1)} - b\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ a & & & b & 0 \\ & \ddots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \ddots & & \vdots \\ b & & & a & 0 \end{vmatrix}_{(2n-1)}$$

En développant ces deux déterminants suivant leur dernière colonne, on obtient :

$$C_n = a^2 C_{n-1} - b^2 C_{n-1}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad C_n = (a^2 - b^2)^n$

d) De chaque ligne à partir de la deuxième, on retranche la précédente. On obtient : $D_n = D_{n-1}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \; D_n = D_1 = 1$.

e) De chaque ligne jusqu'à l'avant-dernière, on retranche la suivante :

$$E_n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdots (a_{n-1} - a_n)a_n$$

f) De chaque colonne à partir de la deuxième, on retranche la précédente et on recommence la même opération. Si $n \geqslant 4$, deux colonnes sont égales et le déterminant est nul. Il reste à calculer : $F_1 = 1$, $F_2 = -7$ et $F_3 = -8$.

15 La fonction D_n est polynomiale, donc dérivable. Désignons par $a_{ij}(x)$ les coefficients de ce déterminant.

$$D_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}(x) a_{\sigma(2)2}(x) \cdots a_{\sigma(n)n}(x)$$

En appliquant à chaque terme la règle de dérivation d'un produit, on obtient, en désignant par (C_k) les vecteurs colonnes de $D_n(x)$:

$$D_n'(x) = \operatorname{Det}(C_1', C_2, \cdots, C_n) + \operatorname{Det}(C_1, C_2', \cdots, C_n) + \cdots + \operatorname{Det}(C_1, C_2, \cdots, C_n')$$

Dans le cas présent, les déterminants obtenus en dérivant séparément chacune des $n-1$ premières colonnes sont nuls. Le dernier est égal à $D_{n-1}(x)$.

De $D_n'(x) = D_{n-1}(x)$ et $D_n(0) = 0$, on tire par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

16

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

17 • Si $\operatorname{rg} A = n$, A est inversible et $\widetilde{A}$ aussi.

• Si $\operatorname{rg} A = n-1$, soit u et $\widetilde{u}$ les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A et $\widetilde{A}$. Comme $A\widetilde{A} = 0$, $\operatorname{Im} \widetilde{u} \subset \operatorname{Ker} u$. Or $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, donc $\dim \operatorname{Im} \widetilde{u} \leqslant 1$. Cependant, $\widetilde{u} \neq 0$, car au moins un déterminant d'ordre $(n-1)$ extrait de A est non nul, et c'est au signe près un coefficient de la matrice $\widetilde{A}$. Donc $\dim \operatorname{Im} \widetilde{u} = 1$.

• Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, tous les déterminants d'ordre $(n-1)$ extraits de A sont nuls, donc $\widetilde{A} = 0$.

18 **1)**
$$PM = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

2) Cette matrice étant triangulaire par blocs,

$$\operatorname{Det}(PM) = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(D - CA^{-1}B).$$

Comme $\operatorname{Det}(P) = 1$, on en déduit :

$$\operatorname{Det}(M) = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(D - CA^{-1}B)$$

3) Si $\operatorname{rg}(M) = n$, $\operatorname{rg}(PM) = n = \operatorname{rg}(A)$, donc : $D - CA^{-1}B = 0$, d'où $\operatorname{Det}(D) = \operatorname{Det}(C)\operatorname{Det}(A)^{-1}\operatorname{Det}(B)$, et : $\operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(D) - \operatorname{Det}(B)\operatorname{Det}(C) = 0$.

19 **1)** Il existe une base de E dans laquelle la matrice de $g + \mathrm{Id}_E$ est triangulaire supérieure avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1, d'où : $\operatorname{Det}(g + \mathrm{Id}_E) = 1$.

2) Supposons f inversible : $f + g = f(\mathrm{Id}_E + f^{-1}g)$, d'où : $\operatorname{Det}(f + g) = Det(f) \times \operatorname{Det}(\mathrm{Id}_E + f^{-1}g)$. Comme $f^{-1}g$ est nilpotent, $\operatorname{Det}(\mathrm{Id}_E + f^{-1}g) = 1$, d'où $\operatorname{Det}(f + g) = \operatorname{Det}(f)$.

Si f n'est pas inversible, $f + g$ ne l'est pas non plus (sinon on pourrait refaire le même raisonnement en posant $f = (f + g) - g$), donc $\operatorname{Det}(f + g) = \operatorname{Det}(f) = 0$.

20 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^2$, inversible, alors $MM^{-1} = I_2$, d'où $\det(M)\det(M^{-1}) = 1$, ce qui signifie que $\det(M)$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}$.

Donc $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Le polynôme $\det(A + xB)$, de degré inférieur ou égal à 2, ne prend pour $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, qu'au plus deux valeurs, il prend donc au moins 3 fois la même valeur ε.

Alors $\det(A + xB) - \varepsilon$, de degré inférieur ou égal à 2 et qui s'annule pour 3 valeurs distinctes, est constant. En particulier :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \det(A + kB) = \varepsilon$$

Ce qui entraine que pour tout entier k, $A + kB$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

Chapitre 28

1 **a)** Vrai. **b)** Faux, c'est $|k| \; \| \; x \; \|$. **c)** Vrai. **d)** Vrai. **e)** Vrai. **f)** Faux : cette famille doit être orthonormale. **g)** Vrai.

2 On montre facilement que l'application est une forme bilinéaire symétrique positive. Si $(f|f) = 0$, on a : $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t = 0$. Comme f'^2 est une fonction **continue** et positive, on en déduit que f' est nulle sur $[0, 1]$. La fonction f est donc constante sur cet intervalle, et cette constante est $f(0) = 0$.

3 Utiliser l'identité de polarisation pour exprimer les produits scalaires en termes de normes.

4 $(X^{\perp})^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel qui contient X. Or le plus petit s.e.v. contenant X est $\mathrm{Vect}(X)$, donc $\mathrm{Vect}(X) \subset (X^{\perp})^{\perp}$. Comparer leurs dimensions...

5 **1)** Supposons $F \subset G$. Soit $y \in G^{\perp}$:

$$\forall x \in G \quad (x|y) = 0.$$

En particulier : $\forall x \in F \quad (x|y) = 0$, donc $y \in F^{\perp}$.
2) En appliquant le résultat précédent aux inclusions $F \subset F + G$ et $F \subset F + G$, on obtient déjà : $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$
Réciproquement, soit $y \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $x \in F + G$: $\quad x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$. $(y|x) = (y|x_1) + (y|x_2) = 0$. Donc $y \in (F+G)^{\perp}$.
3) Poser $F = F_1^{\perp}$ et $G = G_1^{\perp}$, et appliquer le résultat de la question précédente à F_1 et G_1.

6 **1)** Si p est une projection orthogonale,

$$\forall x \in E \quad x = p(x) + (x - p(x))$$

où $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux. D'où : $\| x \|^2 = \| p(x) \|^2 + \| x - p(x) \|^2$. On en déduit l'inégalité cherchée (et le cas d'égalité).
2) Soit p une projection sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G non orthogonal à F. Soit x un élément non nul de F. Comme $E = G \oplus G^{\perp}$, on peut décomposer x en : $x = x_G + x'_G$ avec $x_G \in G$ et $x'_G \in G^{\perp}$. Démontrer que : $\| p(x'_G) \| > \| x'_G \|$ et conclure.

7 Calculer soigneusement tous les produits scalaires mutuels des éléments de cette famille :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Big| \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

et pour tout $p \in [\![1, n]\!]$:

$$(\cos px |\cos px) = 1 \quad (\sin px | \sin px) = 1$$

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Big| \cos px\right) = 0 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Big| \sin px\right) = 0$$

pour tout $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$(\cos px | \sin qx) = 0$$

Si $p \neq q$:

$$(\cos px | \cos qx) = 0 \qquad (\sin px | \sin qx) = 0$$

La famille est orthonormale donc libre. Tout polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n est combinaison linéaire des éléments de cette famille (c'est le principe de la linéarisation des polynômes trigonométriques), donc la famille est génératrice ; c'est une base de E, qui est donc de dimension $2n + 1$.

8 En appliquant l'égalité de l'énoncé au vecteur e_j, on obtient : $\forall i \neq j \quad (e_j|e_i) = 0$. La famille est donc orthonormale, et par conséquent libre. Il faut montrer qu'elle est génératrice (rien ne dit dans l'énoncé que n est la dimension de E...). Pour cela, appliquer l'égalité de l'énoncé à un élément de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)^{\perp}$.

9 Soit p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$. $p(e_1)$ est colinéaire à u : $p(e_1) = \lambda u$, et $(p(e_1) - e_1|u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha$. De même, $p(e_2) = \beta u$ et $p(e_3) = \gamma u$. La matrice de p est donc :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale sur $(\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ est $q = \mathrm{Id}_E - p$. Sa matrice est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1-\beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1-\gamma^2 \end{pmatrix}$$

Les symétries orthogonales par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$ et $(\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ sont : $s = p - q$ et $s' = q - p$. Leurs matrices sont respectivement :

$$S = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 - 1 & 2\alpha\beta & 2\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta & 2\beta^2 - 1 & 2\beta\gamma \\ 2\alpha\gamma & 2\beta\gamma & 2\gamma^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$S' = \begin{pmatrix} 1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma \\ -2\alpha\beta & 1-2\beta^2 & -2\beta\gamma \\ -2\alpha\gamma & -2\beta\gamma & 1-2\gamma^2 \end{pmatrix}$$

10 $$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(0, 1, 1, 1) \qquad e_2 = \frac{\sqrt{15}}{15}(3, -2, 1, 1)$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{35}}{35}(3, 3, -4, 1) \quad e_4 = \frac{\sqrt{7}}{7}(1, 1, 1, -2)$$

11 Le vecteur $e_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$ peut-être complété en un base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, $B' = (e_1, e_2, e_3)$; dans cette base, un vecteur x de $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$x = (x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2 + (x|e_3)e_3$$

$D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $D^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, d'où :

$$p(x) = (x|e_1)e_1 = \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u \qquad (*)$$

La matrice A de p relativement à la base B s'obtient en appliquant $(*)$ aux vecteurs de B :

$$A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

La projection orthogonale sur $D^\perp$ est $q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p$, sa matrice relativement à la base B est donc $B = I_3 - A$:

$$B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

12 **1**) Récurrence immédiate.
2) D'après le théorème du rang, il suffit d'établir que

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}.$$

Soit x un élément de cette intersection : $f(x) = x$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.
On a alors : $f^2(y) - f(y) = f(y) - y$, soit : $f^2(y) = 2f(y) - y$.
On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k(y) = kf(y) - (k-1)y = kx + y$$

On en déduit d'après la question précédente que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|kx + y\| \leqslant \|y\|$.
Mais si $x \neq 0$, $\|kx+y\|$ tend vers l'infini quand k tend vers l'infini ; donc $x = 0$:

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$$

et

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E) = E$$

3) Soit $x \in E$. D'après la question précédente, il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a $f(x_1) = x_1$ et $x_2 = f(x_3) - x_3$. D'où :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) = x_1 + \frac{1}{n}(f^n(x_3) - x_3)$$

Comme $\|f^n(x_3) - x_3\| \leqslant 2\|x_3\|$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) = x_1.$$

L'endomorphisme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k$ est la projection sur $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}_E)$.

Chapitre 29

1 **a)** Faux, elle ne conserve pas la norme. **b)** Vrai. **c)** Vrai. **d)** Faux, c'est une condition nécessaire, mais non suffisante. **e)** Vrai. **f)** Faux, en dimension 3, il y a aussi les composées réflexion-rotation. **g)** Vrai.

2 **1)** Montrer que φ_x conserve la norme.
2) $\varphi_x(y) = y \iff (x|y) = 0$ et $\varphi_x(x) = -x$.
φ_x est la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathrm{Vect}(x))^\perp$.

3 A est orthogonale si et seulement si $a^2 = b^2 = c^2$, c'est-à-dire si a, b, c sont égaux au signe près.
– Si $a = b = c$, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.
– Si $a = b = -c$, symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y - z = 0$.
– Si $a = -b = c$, symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - y + z = 0$.
– Si $-a = b = c$, symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $-x + y + z = 0$.

4 On vérifie d'abord que ces quatre matrices sont orthogonales : les vecteurs colonnes forment une base orthonormale.

- $\mathrm{Det}A = +1$. A est la matrice d'une rotation. L'axe est l'ensemble des vecteurs invariants, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(v)$ où $v = (1, 0, 1)$. Pour déterminer l'angle θ de la rotation, choisissons un vecteur orthogonal à l'axe, par exemple $u = (0, 1, 0)$; θ est l'angle $(u, f(u))$. D'où $\cos\theta = \dfrac{(u|f(u))}{\|u\|\,\|f(u)\|} = \dfrac{1}{3}$. Enfin, orientons l'axe de la rotation dans le sens du vecteur $u \wedge f(u) = -\dfrac{2}{3}v$.

  En définitive, A est la matrice de la rotation d'angle $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{3}$ autour de l'axe $\mathrm{Vect}(1, 0, 1)$ orienté dans le sens du vecteur $(-1, 0, -1)$.
- $\mathrm{Det}B = -1$. Il n'y a pas de vecteur invariant ; B est la matrice d'une composée réflexion-rotation. L'axe de la rotation est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(1, 1, 1)$. Pour déterminer l'angle de la rotation, choisissons un vecteur orthogonal à l'axe, par exemple $u = (1, -1, 0)$; on obtient $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, $u \wedge f(u) = (-1, -1, -1)$.

  B est la matrice de la composée d'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ autour de l'axe $\mathrm{Vect}(1, 1, 1)$ orienté dans le sens du vecteur $(-1, -1, -1)$, et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à cet axe.
- $\mathrm{Det}C = -1$. L'ensemble des vecteurs invariants est le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
  C est la matrice de la réflexion par rapport à ce plan.
- $\mathrm{Det}D = +1$. D est la matrice d'une rotation. On trouve un quart de tour (rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$) autour de l'axe $\mathrm{Vect}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ orienté dans le sens du vecteur $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$.

5 On complète u en une base orthonormale directe (u, v, w). Dans cette base :

$$x = (u|x)\,u + (v|x)\,v + (w|x)\,w$$

et la matrice de la rotation R est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On en déduit facilement l'expression cherchée.

Pour obtenir la matrice de R dans la base orthonormale initiale, appliquer cette formule aux vecteurs de base e_1, e_2, e_3. On obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & \alpha\beta(1-\cos\theta)-\gamma\sin\theta & \alpha\gamma(1-\cos\theta)+\beta\sin\theta \\ \alpha\beta(1-\cos\theta)+\gamma\sin\theta & \beta^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & \beta\gamma(1-\cos\theta)-\alpha\sin\theta \\ \alpha\gamma(1-\cos\theta)-\beta\sin\theta & \beta\gamma(1-\cos\theta)+\alpha\sin\theta & \gamma^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un demi-tour ($\theta = \pi$), on retrouve la matrice déjà rencontrée dans l'exercice 9 du chapitre précédent :

$$A' = \begin{pmatrix} 2\alpha^2-1 & 2\alpha\beta & 2\alpha\gamma \\ 2\alpha\beta & 2\beta^2-1 & 2\beta\gamma \\ 2\alpha\gamma & 2\beta\gamma & 2\gamma^2-1 \end{pmatrix}$$

6 La matrice A est la matrice de passage d'une base orthonormée $B = (e_1, \cdots, e_n)$ à une base orthonormée B', ses vecteurs-colonne sont donc unitaires, c'est-à-dire que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$$

d'où en sommant pour $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = n$$

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A et $v = \sum_{i=1}^{n} e_i$, utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(u(v)|v)^2 \leqslant \|u(v)\|.\|v\| \iff \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)^2 \leqslant n^2$$

d'où l'inégalité proposée.

7 On vérifie que A est bien orthogonale, $\det(A) = 1$, f est une rotation d'axe $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}(u)$ où $u = (1,-1,1)$. $v = (1,1,0)$ est un vecteur orthogonal à l'axe, d'image $f(v) = (1,0,-1)$, l'angle θ de la rotation vérifie donc

$$\cos(\theta) = \frac{(v|f(v))}{\|v\|^2} = \frac{1}{2}.$$

Orientons alors l'axe de la rotation par $v \wedge f(v) = -u$: f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe D orienté par $-u = (-1,1,-1)$.

Notons $e_1' = \frac{-u}{\|-u\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$,

$$e_2' = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \text{ et } e_3' = e_1' \wedge e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2).$$

Dans la base orthonormée $B' = (e_1', e_2', e_3')$, f a pour matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

8 **1)** La stabilité de G par produit prouve que φ est une application de G dans G. Vérifions qu'elle est injective :

soit $(M,N) \in G^2$ tel que $\varphi(M) = \varphi(N)$

$M_iM = M_iN \Rightarrow (M_i)^{-1}M_iM = (M_i)^{-1}M_iN$, puisque M_i est inversible, c'est-à-dire $M = N$.

φ est une injection d'un ensemble fini dans lui-même, c'est une bijection.

En particulier, si $\mathrm{I}_d \in G$, I_d appartient à l'image de φ, ce qui prouve que $(M_i)^{-1} = (\varphi)^{-1}.(\mathrm{I}_d)$ est élément de G.

G est alors clairement un sous-groupe de $Gl_d(\mathbb{R})$.

2) L'application Q est bilinéaire symétrique comme le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$, de plus pour tout $X \in \mathbb{R}^d$:

$$Q(X,X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|M_kX\|^2 = \frac{1}{n}\left(\|X\|^2 + \sum_{M_k\in G,\ M_k\neq \mathrm{I}_d}\|M_kX\|^2\right)$$

Ce qui établit que pour tout $X \in \mathbb{R}^d$, $Q(X,X) \geqslant 0$ et que $Q(X,X) = 0 \iff X = 0$.

3) Montrons que M_i est une matrice orthogonale pour Q, c'est-à-dire que :

$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^d)^2 \quad Q(M_iX, M_iY) = Q(X,Y)$.

Nous avons établi que φ est une bijection de G sur G, ceci signifie que lorsque l'on parcourt l'ensemble des matrices M_iM_k pour $k \in [\![1,n]\!]$, on parcourt, dans un ordre éventuellement différent, exactement tous les éléments de G une fois et une seule, d'où :

$$Q(M_iX, M_iY) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(M_iM_kX|M_iM_kY)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(M_kX|M_kY) = Q(X,Y)$$

4) Calculons M^2 :

$$M^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} M_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} M_iM_k\right]$$

d'où, en utilisant encore la bijectivité de φ :

$$M^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} M_k\right] = nM$$

Une récurrence immédiate prouve alors que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $M^j = n^{j-1}M$, d'où :

$$\operatorname{Tr}(M) = 0 \Rightarrow \operatorname{Tr}(M^j) = 0$$

9 **1)** Si s est une réflexion, $s^2 = \mathrm{Id}_E$, d'où $\varphi(s)^2 = \varphi(s^2) = 1$: $\varphi(s) = \pm 1$.

2) Soit $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ des vecteurs normaux respectifs de H et H'. Soit $\vec{n_1}$ un vecteur coplanaire avec $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ et tel que $(\widehat{\vec{n}, \vec{n_1}}) = (\widehat{\vec{n_1}, \vec{n}'})$. Soit s_1 la réflexion par rapport à l'hyperplan H_1 de vecteur normal $\vec{n_1}$. Alors $s' \circ s_1 = s_1 \circ s$, rotation d'axe $H \cap H'$ et d'angle $2(\widehat{\vec{n}, \vec{n_1}})$. On a alors : $\varphi(s' \circ s_1) = \varphi(s_1 \circ s)$, d'où $\varphi(s')\varphi(s_1) = \varphi(s_1)\varphi(s)$, et comme $\varphi(s_1) \neq 0$, $\varphi(s') = \varphi(s)$.

3) Il en résulte que toutes les réflexions ont la même image par φ, qui est 1 ou -1. Comme les réflexions engendrent le groupe $\mathcal{O}(E)$:

- Si toutes les réflexions ont pour image 1, tout automorphisme a pour image 1 ; φ est l'application constante 1.
- Si toutes les réflexions ont pour image -1, tout automorphisme f a pour image $(-1)^n$, où n est le nombre de réflexions composant f ; $\varphi(f)$ est alors le déterminant de f.

Il n'y a donc que deux morphismes de groupes de $\mathcal{O}(E)$ dans $\mathbb{R}^*$: le morphisme constant $f \mapsto 1$, et le déterminant.

10 Soit $X \in \operatorname{Ker}(M + \mathrm{I}) : MX = -X$. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^t(MX)(MX) &= {}^tXX = {}^tX\,{}^tMMX \\ &= -\,{}^tXM^2X = {}^tXMX = -\,{}^tXX \end{aligned}$$

d'où ${}^tXX = 0$, et $X = 0$: $\operatorname{Ker}(M+\mathrm{I}) = \{0\}$; $M+\mathrm{I}$ est inversible.

$$\begin{aligned} {}^tAA &= {}^t(M + \mathrm{I})^{-1}\,{}^t(M - \mathrm{I})(M - \mathrm{I})(M + \mathrm{I})^{-1} \\ &= (M - \mathrm{I})^{-1}(M + \mathrm{I})(M - \mathrm{I})(M + \mathrm{I})^{-1} \end{aligned}$$

Comme $(M+\mathrm{I})(M-\mathrm{I}) = M^2 - \mathrm{I} = (M-\mathrm{I})(M+\mathrm{I})$, on obtient ${}^tAA = \mathrm{I}$: A est orthogonale.

11 Notons (C_1, C_2, C_3) les trois vecteurs colonne de A et ${}^tX = (x_1, x_2, x_3)$, alors :

$$AX = B \iff x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = B$$

L'existence de solutions équivaut donc au fait que B appartienne à $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)$.
Or, $C_1 + C_2 - 2C_3 = 0$, d'où $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$; et $\det(C_1, C_2, C_3) \neq 0$, d'où : $B \notin \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$. L'équation n'admet pas de solution.
$\{AX,\ X \in \mathbb{R}^3\}$ est le plan $P = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$, nous savons qu'alors il existe un unique vecteur B' de ce plan tel que $\|B' - B\|$ soit minimale, B' est le projeté orthogonal de B sur P.
En revanche, ceci n'assure pas l'unicité de la solution X_0 recherchée, en effet si X_0 est une solution, pour tout Y appartenant à la droite d'équation $AY = 0$, $X_o + Y$ est encore solution.

Chapitre 30

1 **a)** Vrai. **b)** Vrai. **c)** Faux ; ça peut être un vissage. **d)** Vrai. **e)** Faux ; ça peut être une translation.

2 **a)** Rotation de centre $\Omega(4, 3)$ et d'angle $\operatorname{Arccos} \dfrac{3}{5}$.
b) Il s'agit d'un antidéplacement sans point invariant : composée d'une réflexion et d'une translation. La direction de l'axe de la réflexion est $\vec{D} = \operatorname{Vect}(1, -1)$. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \vec{D}$ est la droite D d'équation $2x + 2y - 3 = 0$. f est la composée de la réflexion d'axe D et de la translation de vecteur

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

c) Rotation de centre $\Omega(2, 4)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

d) C'est un antidéplacement avec points invariants : c'est une réflexion ; son axe a pour équation

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)y - 1 = 0.$$

3 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi.$
$R_A \circ R_B \circ R_C$ est donc une rotation d'angle π, c'est-à-dire une symétrie centrale, dont il reste à déterminer le centre.
Étudier les images des points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec les côtés de ce triangle.

4 Soit G un sous-groupe fini du groupe des déplacements du plan. G ne peut contenir d'autre translation que l'identité. En déduire que deux rotations quelconques de G ont nécessairement le même centre.

5 **a)** Il s'agit d'une rotation, d'axe $A + \operatorname{Vect}(\vec{u})$ où $A = (1, 1, 0)$ et $\vec{u} = (1, 1, 1)$, d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$ en orientant l'axe dans le sens du vecteur $\vec{u}$.
b) Réflexion par rapport au plan d'équation $x - y + z - 3 = 0$.
c) C'est un déplacement sans point invariant, autre qu'une translation : c'est un vissage. L'ensemble des vecteurs invariants est $\vec{D} = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$. L'axe du vissage est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MM'} \in \vec{D}$, c'est-à-dire $A + \operatorname{Vect}(\vec{u})$, où $A = \left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{8}{3}, 0\right)$ et $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Le vecteur du vissage est $\vec{v} = \dfrac{2}{3}\vec{u}$ et son angle $-\dfrac{2\pi}{3}$, l'axe étant naturellement orienté dans le sens du vecteur $\vec{v}$.
d) C'est un antidéplacement avec un point invariant unique : $A(1, 0, 2)$; c'est la composée d'une réflexion par rapport à un plan P passant par A et d'une rotation dont l'axe est la perpendiculaire en A à P. La direction de cet axe est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé, c'est-à-dire $\operatorname{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u} = (1, 1, 1)$. L'axe est donc la droite $A + \vec{u}$, le plan P a pour équation $x + y + z = 3$. Enfin l'angle de la rotation est $+\dfrac{\pi}{3}$ en orientant l'axe dans le sens du vecteur $\vec{u}$.

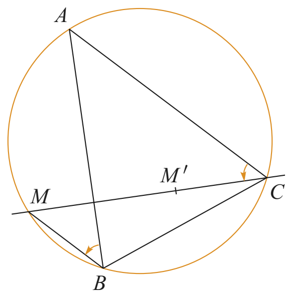
6 **1)** Si la rotation n'est pas un demi-tour, la seule droite globalement invariante est son axe. Pour un demi-tour, il y a de plus les droites perpendiculaires à l'axe.
2) Soit R et R' deux rotations distinctes de l'identité, d'axes respectifs D et D', qui commutent. Pour tout point M de l'espace :

$$R \circ R'(M) = R' \circ R(M)$$

Si $M \in D$, $R \circ R'(M) = R'(M)$, donc $R'(M) \in D$: la droite D est globalement invariante par R' ; on montre de même que D' est globalement invariante par R.
— Si l'une au moins des deux rotations n'est pas un demi-tour, on en déduit que $D = D'$.
— Si R et R' sont des demi-tours, les droites D et D' peuvent être confondues ou perpendiculaires (dans ce dernier cas, on a bien $R \circ R' = R' \circ R$, qui est le demi-tour ayant pour axe la perpendiculaire commune à D et D').

7 D'après le théorème de l'angle inscrit :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) + k\pi$$



Et, comme une similitude directe conserve les angles orientés :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM'})$$

8 $S_1 \circ S_2 \circ S_3$ et $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ sont des similitudes de rapport 1 et d'angle π, c'est-à-dire des symétries centrales. Étudier les images des points A, B, C pour déterminer les centres de ces symétries.

Chapitre 31

1 **a)** Faux ; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1] = \mathbb{R}_+$. **b)** Vrai. **c)** Faux ; ex. paragraphe 3.2. **d)** Faux ; ex. paragraphe 3.2. **e)** Vrai. **f)** Faux ; ex. paragraphe 5. **g)** Faux ; revoir les hypothèses du théorème de Schwarz.

2 Choisir des boules de rayon $\varepsilon = \dfrac{||a-b||}{3}$

3 Soit O_1 et O_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $a \in O_1 \cap O_2$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B(a, \varepsilon_1) \subset O_1$, et $\varepsilon_2 > 0$ tel que $B(a, \varepsilon_2) \subset O_2$. Alors $B(a, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \subset O_1 \cap O_2$. $O_1 \cap O_2$ est donc ouvert.

Par récurrence, toute intersection finie d'ouverts est ouverte. Attention : l'intersection d'une famille infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert : par exemple, l'intersection de toutes les boules ouvertes de centre a est le singleton $\{a\}$, qui n'est pas ouvert.

En revanche, on démontrera très facilement qu'une réunion quelconque d'ouverts est toujours un ouvert.

4 Soit $x_0 \in p_1(A)$; il existe $a = (x_0, y_0) \in A$ tel que $x_0 = p_1(a)$. Comme A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

On en déduit $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset p_1(A)$. $p_1(A)$ est donc ouvert.

Il en est de même de $p_2(A)$.

5 **a)** f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = 1 \neq f(0,0)$: f n'est pas continue en $(0,0)$.

b) f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\}$. Étudions la continuité en $(x_0, 0)$:

- Si $x_0 \neq 0$, $\lim\limits_{y\to 0+} f(x_0, y) = +\infty$: f n'est pas continue en $(x_0, 0)$.
- Si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x^2) = 1$: f n'est pas continue en $(0,0)$.

c) Posons $M = \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

$|f(x,y)| \leqslant \dfrac{M^3}{M^2} = M$.

f est donc continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

d) Si $x \neq y$, le théorème des accroissements finis prouve l'existence d'un réel c strictement compris entre x et y tel que $f(x,y) = e^c$. Lorsque (x,y) tend vers (a,a), c tend vers a et e^c tend vers e^a. Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = e^a = f(a,a)$.

f est donc continue en (a,a), et, par conséquent, sur $\mathbb{R}^2$.

6 **a)** Comparer $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$.

b) $f(x,y) = \varepsilon\dfrac{\pi}{2}$ où $\varepsilon = \mathrm{sgn}(xy)$. f n'a donc pas de limite en $(0,0)$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^y - y^y}{x-y} - \dfrac{y^x - y^y}{x-y}$. Appliquer le théorème des accroissements finis aux fonctions $x \mapsto x^y$ et $x \mapsto y^x$ et conclure :

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = a^a(1 - \ln a).$$

7 **a)** Si $(x,y) \neq (0,0)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas définies en $(0,0)$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{y^x} y^x \left(\ln x \ln y + \dfrac{1}{x}\right)$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{y^x} y^{x-1} x \ln x$.

c) Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}\cos(x^3y) - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\sin(x^3y)\ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}\cos(x^3y) - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\sin(x^3y).$$

Si $(x,y) = (0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$; $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

d) Si $x \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x}\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos\frac{y}{x}.$$

Si $x = 0$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$; $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$.

8 **a)** Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$, car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \dfrac{1}{2}$.

b) Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ces deux fonctions sont continues en $(0,0)$: f est de classe C^1 et $\overrightarrow{\mathrm{Grad}} f\ (0,0) = \vec{0}$.

c) Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$, car $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 1$.

9 **a)** $J = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$.

b) $J = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y & x \\ y & -x \end{pmatrix}$.

10 $f(x,y) = \left(\dfrac{R^2x}{x^2+y^2}, \dfrac{R^2y}{x^2+y^2}\right)$.

f est de classe C^1 en tout point M distinct de O et sa matrice jacobienne est :

$$J = \frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -x^2+y^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

En posant $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$:

$$J = -\frac{R^2}{r^2}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

La différentielle de f en M est la composée de l'homothétie de rapport $\dfrac{R^2}{OM^2}$ et de la réflexion d'axe orthogonal à (OM).

11 Posons $f(x,y) = F(u,v)$, avec $u = x+y$ et $v = x-y$.
On a donc :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial F}{\partial v}$.

On a donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\dfrac{\partial F}{\partial v} = a$.

On en déduit :

$$F(u,v) = \frac{a}{2}v + g(u) \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{a}{2}(x-y) + g(x+y).$$

12 Posons $f(x,y) = F(\rho,\theta)$, avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.
Avec la même méthode que dans l'exercice précédent, on obtient, pour tout point $(x,y) \neq (0,0)$:

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'équation $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = kF$ a pour solutions :

$$F(\rho,\theta) = \lambda(\rho)\, e^{k\theta}.$$

Cette fonction n'est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^2$ que si $k = 0$ ($F(\rho,\theta)$ ne dépend alors que de ρ), ou si la fonction λ est nulle (F est alors également nulle).

13 Dérivons la relation donnée par rapport à λ :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \alpha\lambda^{\alpha-1}f(x,y).$$

En multipliant par λ :

$$\lambda x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) + \lambda y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \alpha\lambda^{\alpha}f(x,y) = \alpha f(\lambda x, \lambda y).$$

En choisissant $\lambda = 1$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

14 **a)** Le gradient de f s'annule en $(0,0)$ et $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$.
En $(0,0)$:

$$f(x,y) = x^2(1-x) + y^2 \geqslant 0$$

au voisinage de $(0,0)$ (il suffit que $x \leqslant 1$).
f présente un minimum local en $(0,0)$.
En $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$:

$$f\left(\frac{2}{3}, y\right) - f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = y^2 \geqslant 0$$

et

$$f\left(\frac{2}{3}+h, 0\right) - f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -h^2(1+h)$$

négatif pour $h \geqslant -1$.
Pas d'extremum local en $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

b) Le gradient de f s'annule en $(0,0)$ et $(1,1)$.
En $(0,0)$: $f(x,0) = x^3$, qui n'a pas un signe constant ; pas d'extremum local.
En $(1,1)$:

$$f(1+h, 1+k) - f(1,1) = 3\left(\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right) + o(h^2) + o(k^2).$$

Cette expression est positive au voisinage de $(h,k) = (0,0)$. f présente un minimum local en $(1,1)$

c) Le gradient de f s'annule en $(0,0)$. $f(x,x) = (2x)^3$, qui n'a pas un signe constant au voisinage de 0 ; pas d'extremum local.

15 **1)** Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

et $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - 0}{y} = 0$$

et $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - 0}{x} = 0.$$

3) Pour $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$.

Cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$, car

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,x) = -1 \neq 0.$$

(Le théorème de Schwarz n'admet pas de réciproque...)

16 Après un calcul long et pénible (mais pas difficile), on obtient :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho}.$$

Une fonction harmonique isotrope est une fonction $\varphi(\rho)$ vérifiant l'équation différentielle $\varphi''(\rho) + \dfrac{\varphi'(\rho)}{\rho} = 0$, dont les solutions sont de la forme : $\varphi(\rho) = a \ln|\rho| + b$.

17 On obtient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0.$$

D'où :

$$F(u,v) = g(u) + h(v) \quad \text{et} \quad f(x,y) = g(x+y) + h(x-y).$$

18 En tout point $(x,y) \neq (0,0)$, f admet des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Au point $(0,0)$, ces dérivées partielles sont définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, comme composées de fonctions continues. Elles sont également continues en $(0,0)$ car :

$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = 2r|\cos\theta \sin^4\theta| \leqslant 2r$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = 2r|\sin\theta \cos^4\theta| \leqslant 2r$$

Ainsi, f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

19 f admet des dérivées partielles en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Si f est de classe C^1 en $(0,0)$, alors elle admet en ce point une dérivée nulle suivant n'importe quel vecteur. Or, pour $u = (1,1)$: $\dfrac{f(t,t) - f(0,0)}{t}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ si t tend vers 0^+ et vers $-\dfrac{1}{2}$ si t tend vers 0^- : f n'admet pas de dérivée suivant le vecteur $(1,1)$, donc f n'est pas de classe C^1.

20 Par linéarité, il suffit de démontrer la propriété pour les polynômes $F(X) = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{cases} P(x,y) = \operatorname{Re}\left((x+iy)^n\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(-1)^k y^{2k} \\ Q(x,y) = \operatorname{Re}\left((x+iy)^n\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1}(-1)^k y^{2k+1} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k}(n-2k) x^{n-2k-1}(-1)^k y^{2k} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1}(-1)^k (2k+1) y^{2k} \end{cases}$$

Comme $(n-2k)\dbinom{n}{2k} = (2k+1)\dbinom{n}{2k+1}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$.

De même :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) & = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(-1)^k 2k y^{2k-1} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \binom{n}{2k+1}(n-2k-1) x^{n-2k-2}(-1)^k y^{2k+1} \\ & = \displaystyle\sum_{k=1}^{E(\frac{n+1}{2})} \binom{n}{2k-1}(n-2k+1) x^{n-2k}(-1)^{k+1} y^{2k-1} \end{cases}$$

Comme $2k\dbinom{n}{2k} = (n-2k+1)\dbinom{n}{2k-1}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Chapitre 32

1 **a)** Faux. **b)** Faux, même la fonction 1 n'est pas toujours intégrable... (cf. a)). **c)** Vrai. **d)** Faux, une condition suffisante est que le champ soit défini sur une partie étoilée de $\mathbb{R}^2$. **e)** Vrai. **f)** Vrai.

2 **a)** $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\,y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{24}$.

b) $I = 4 \displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{a^2 b^2}{2}$.

c) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x+y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{4}{3}$.

d) $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^2} \right) \mathrm{d}x = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$.

3 $V = \displaystyle\iint_U (1 - x^2 - 2y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

où $U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 2y^2 \leqslant 1 \}$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-2y^2}} (1 - x^2 - 2y^2) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

4 **a)** En coordonnées polaires : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$I = \iint_{U'} \frac{\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta}{\rho^2+1} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{\rho \,\mathrm{d}\rho}{\rho^2+1} = \pi \ln 2$$

b) On peut poser $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$, avec $\rho \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.
Le déterminant jacobien correspondant est $\operatorname{Det} J = ab\rho$.

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\rho} ab\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta = 2\pi\, ab$$

5 **1)** Sur le segment $[AB]$: $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^1 2x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

2) En passant par $D(1,-1)$:

$$I_2 = \int_{-1}^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 (y^2+1)\,\mathrm{d}y = \frac{16}{3}.$$

3) En passant par $E(-1,1)$:

$$I_3 = \int_{-1}^1 (y^2-1)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^1 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{3}.$$

L'intégrale dépend de l'arc et pas seulement de ses extrémités.

6 **a)** Le champ de vecteurs $\vec{V} = (x^2 - y^2, -2xy)$ a une matrice jacobienne symétrique sur $\mathbb{R}^2$ $\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y \right)$; c'est donc un champ de gradient. Son intégrale curviligne sur un arc C ne dépend que des extrémités A et B de cet arc.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{Grad}} \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 \right) ;$$

d'où :

$$I = \frac{x_B^3 - x_A^3}{3} - (x_B y_B^2 - x_A y_A^2).$$

b) Idem sur le demi-plan $y > 0$, qui est étoilé par rapport à chacun de ses points.

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{Grad}} \left(\frac{x^2}{y} + y \right) ;$$

d'où :

$$I = \frac{x_B^2}{y_B} - \frac{x_A^2}{y_A} + y_B - y_A.$$

7 **a)**
$$I_1 = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t \,\mathrm{d}t) + (\cos t + \sin t)(\cos t \,\mathrm{d}t)$$
$$= 2\pi$$

b)
$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{(1+y)\,\mathrm{d}y}{1+y^2} + \int_1^{-1} \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_1^{-1} \frac{(-1+y)\,\mathrm{d}y}{1+y^2} + \int_{-1}^1 \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$= 4\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\pi.$$

Ces intégrales curvilignes sur des courbes fermées ne sont pas nulles, bien que le champ de vecteurs correspondant possède une matrice jacobienne symétrique. Cela est dû au fait que le domaine $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ n'est pas étoilé. Elles ont cependant la même valeur, car le champ de vecteurs est un champ de gradient dans le domaine $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0),\ x \leqslant 0\}$ qui, lui, est étoilé (par exemple, par rapport au point $(1,0)$). La valeur commune est la différence de potentiel de part et d'autre de l'axe Ox au voisinage du point $B(-1,0)$.

8 **1)** $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

2) En coordonnées polaires :

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \rho(\cos\theta + \sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^1 \rho^2 \,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}.$$

3) Choisissons le champ de vecteurs $P = -xy$, $Q = xy$, qui vérifie :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x + y.$$

$$I = \int_\gamma -xy \, \mathrm{d}x + xy \, \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, (\cos t + \sin t) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$

9 **1)** $I = \displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{a^2 b^2}{8}$

2)
$$I = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} (a\rho\cos\theta)(b\rho\sin\theta) ab\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta$$
$$= a^2 b^2 \int_0^1 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{a^2 b^2}{8}.$$

3) $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{x^2 y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{a^2 b^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{a^2 b^2}{8}.$

10 Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. L'équation de la courbe devient :

$$r^3 \cos\theta = ar^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Soit : $r = 0$, ou pour $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$: $r = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.
La courbe C est donc entièrement définie par l'équation polaire :

$$r(\theta) = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

On remarque que pour tout $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$:

- $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$: l'arc est périodique de période π ;
- $r(-\theta) = r(\theta)$: la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox).

Étudions le signe de $r(\theta)$ sur l'intervalle $[0, \dfrac{\pi}{2}[$:

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r	a	$+$	0	$-$	$-\infty$ ||

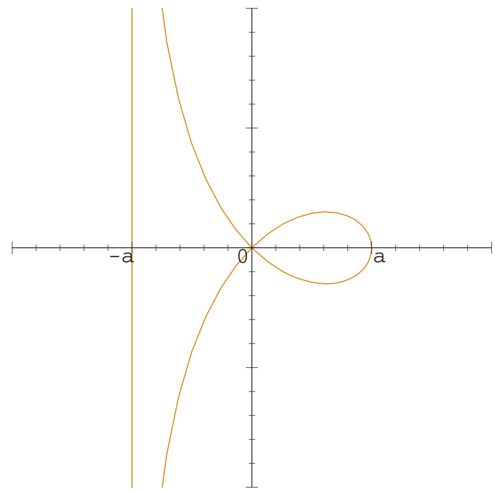
Étudions la branche infinie pour $\theta \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$:

$$r(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -r(\theta)\cos\theta = -a\cos 2\theta,$$

d'où :

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} r(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a$$

La courbe possède donc une asymptote d'équation $Y = a$ dans le repère $\left(O, \vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right), \vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, c'est-à-dire $x = -a$ dans le repère initial.



Aire de la boucle :

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r(\theta)^2 \mathrm{d}\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cos 2\theta - 2 + \frac{1}{\cos^2\theta} \right) \mathrm{d}\theta$$
$$= a^2 \Big[\sin 2\theta - 2\theta + \tan\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

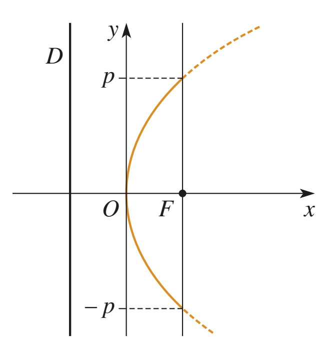
Chapitre 33

1 **1) a)** Faux, c'est une condition nécessaire mais non suffisante. **b)** Vrai. **c)** Vrai. **d)** Faux, il peut être négatif. **e)** Faux, lorsque le mouvement n'est pas uniforme. **f)** Vrai.

2
$$\vec{f}'(t) = 6\sin t(\cos 2t\vec{\imath} + \sin 2t\vec{\jmath})$$
$$\Rightarrow \|\vec{f}'(t)\| = 6|\sin t|$$

$$L = 6\int_0^{2\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t = 12\int_0^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = 24$$

3 Paramétrons la parabole : $x(t) = \dfrac{t^2}{2p}$ $\quad y(t) = t$.



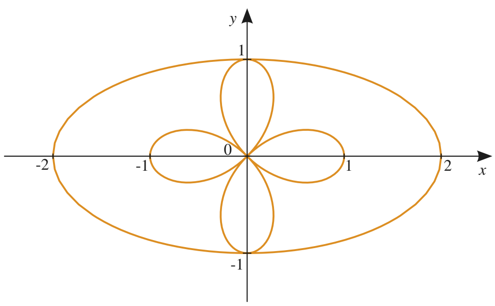
$$\| \vec{f}'(t) \| = \frac{1}{p}\sqrt{t^2 + p^2}$$

$$L = \frac{2}{p}\int_0^p \sqrt{t^2 + p^2}\ \mathrm{d}\,t = p\big(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\big).$$

4 $\vec{f}'(\theta) = -2\sin\theta\cos\theta\vec{u}(\theta) + \cos^2\theta\vec{v}(\theta)$.
$\| \vec{f}'(\theta) \| = |\cos\theta|\sqrt{1 + 3\sin^2\theta}$

$$\begin{aligned} L &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2\theta}\cos\theta\ \mathrm{d}\,\theta \\ &= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 3u^2}\ \mathrm{d}\,u = 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\ln(\sqrt{3} + 2) \end{aligned}$$

5

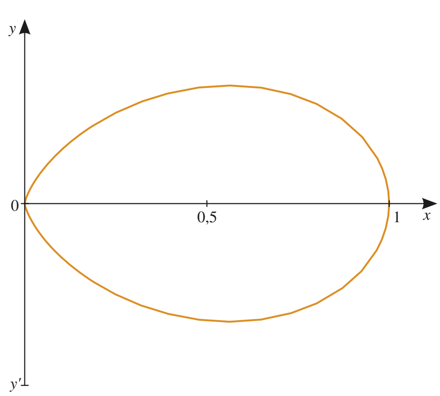


On obtient dans les deux cas l'intégrale :

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\ \mathrm{d}\,t\,.$$

6 La courbe passe par O pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, donc avec une tangente verticale.
La formule générale donne pour la courbure au point $M(\theta)$:

$$c = \frac{4(2\sin^2\theta + 1)}{(8\sin^2\theta + 1)^{\frac{3}{2}}\cos^2\theta}$$



La courbure n'est pas définie au point O, qui est stationnaire. La courbure tend vers $+\infty$ quand θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, un point « d'allure ordinaire » peut avoir une courbure « infinie ».

7 $\tan\varphi = \tan t$, d'où $\varphi = t + k\pi$. Sur un arc régulier, k est constant, donc $\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = 1$.

$$c = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t}\Big/\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\sin t}{|\cos 2t|}.$$

8 **1)** $\vec{f}'(t) = 3\sin t\cos t(-\cos t\vec{\imath} + \sin t\vec{\jmath})$

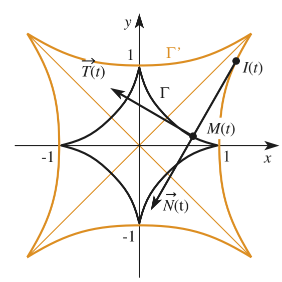
$$L = 24\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t\ \mathrm{d}\,t = 6$$

2) $R(t) = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s}} = -\dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = -3|\sin t\cos t|$

3) $I(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t)$

$$\begin{cases} x_I(t) = \cos t(3 - 2\cos^2 t) \\ y_I(t) = \sin t(3 - 2\sin^2 t) \end{cases}$$

4)



5) $x_I\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\cos^3 t - \sin^3 t)$
$y_I\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\cos^3 t + \sin^3 t)$

$$\begin{pmatrix} x_I(t + \frac{\pi}{4}) \\ y_I(t + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Γ' est l'image de Γ par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

9 $R = \dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,\varphi} = 1 + s^2$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}s}{1 + s^2} = \mathrm{d}\,\varphi$; $\mathrm{Arctan}\ s = \varphi - \varphi_0$.
Quitte à effectuer une rotation du repère, on peut choisir $\varphi_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{f}'(s) = \cos(\mathrm{Arctan}\ s)\vec{\imath} + \sin(\mathrm{Arctan}\ s)\vec{\jmath} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}}\vec{\imath} + \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}\vec{\jmath}. \end{aligned}$$

D'où : $\vec{f}(s) = (\mathrm{Argsh}\ s + x_0)\vec{\imath} + (\sqrt{1 + s^2} + y_0)\vec{\jmath}$.
Quitte à effectuer une translation du repère, on peut choisir $x_0 = y_0 = 0$.
On obtient donc : $x(s) = \mathrm{Argsh}\ s$ et $y(s) = \sqrt{1 + s^2}$, soit $y = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{ch}\, x$.

Il s'agit de la courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique, à un déplacement quelconque près.

10 Utilisons le paramétrage de l'ellipse :

$$x(t) = a\cos t\ ,\quad y(t) = b\sin t,$$

on obtient alors :

- $\overrightarrow{f'}(t) = (-a\sin t, b\cos t)$
- $\overrightarrow{f''}(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$
- $\|\overrightarrow{f'}(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$
- $\overrightarrow{T(t)} = \left(-\dfrac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}, \dfrac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\right)$
- $\overrightarrow{N(t)} = \left(-\dfrac{b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}, -\dfrac{a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\right)$
- $c(t) = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{f''}(t)\right)}{\|\overrightarrow{f'}(t)\|^3} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}^3}$

Alors $\overrightarrow{OI}(t) = \overrightarrow{OM}(t) + R(t)\overrightarrow{N(t)}$ a pour coordonnées :

$$x_I(t) = \frac{a^2 - b^2}{b}\cos^3 t\ ,\quad y_I(t) = \frac{b^2 - a^2}{a}\sin^3 t$$

La développée d'une ellipse est donc déduite par affinité orthogonale d'une astroïde.
(remarque : si $a = b$, nous obtenons : la développée d'un cercle est réduite au centre de ce cercle... rassurant).

11 Soit P d'équation $y^2 = 2px$, que nous pouvons considérer comme la courbe paramétrée définie par : $\vec{f}(y) = \dfrac{y^2}{2p}\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
D'où $\vec{f}'(y) = \dfrac{y}{p}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{f}''(y) = \dfrac{1}{p}\vec{\imath}$.
Le rayon de courbure au point $M(\dfrac{y^2}{2p}, y)$ vaut alors :

$$R(y) = \frac{\|\vec{f}'(y)\|^3}{\det(\vec{f}'(y), \vec{f}''(y))} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

La normale en $M\left(\dfrac{y^2}{2p}, y\right)$ à P a pour équation :
$\left(X - \dfrac{y^2}{2p}\right)\dfrac{y}{2} + (Y - y) = 0$ et la directrice de la parabole : $x = -\dfrac{p}{2}$, leur intersection est donc le point N :
$N = \left(-\dfrac{p}{2}, \dfrac{3y}{2} + \dfrac{y^3}{2p^2}\right)$, d'où :
$\overrightarrow{NM} = \left(\dfrac{p(y^2 + p^2)}{2p^2}, \dfrac{y(y^2 + p^2)}{2p^2}\right)$ et :

$$\|\overrightarrow{NM}\| = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{1}{2}R(y)$$

12 La courbe a une paramétrisation telle que $y(t) = tx(t)$; la boucle est « fermée » par un point double $M(t) = M(t')$ qui vérifie donc nécessairement $x(t) = x(t') = 0$, soit $t = -t' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
De plus , l'arc présente un symétrie par rapport à l'axe $(x'x)$, la longueur cherchée est donc :

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \|\vec{f}'(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (9t^2 + 1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

13 Notons $\vec{f}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, $\vec{f}$ est 2π-périodique, ce qui prouve que la courbe est entièrement décrite pour t variant dans un intervalle d'amplitude 2π, de plus l'étude des symétries nous permet de limiter l'étude à $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et d'en déduire toute la courbe par symétries successives par rapport à $(x'x)$ et $(y'y)$.
Alors, pour $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, $\vec{f}'(t) = a\cos t(3\cos^2 t - 1)\vec{\imath} + a\sin t(3\cos^2 t - 1)\vec{\jmath}$, d'où :
$\|\overrightarrow{f'}(t)\| = \varepsilon(3\cos^2 t - 1)$ et $\vec{T} = \varepsilon(\cos t\vec{\imath} + \sin T\vec{\jmath})$ où ε est le signe de $3\cos^2 t - 1$.
Ce qui donne immédiatement : $\vec{N} = \varepsilon(-\sin t\vec{\imath} + \cos T\vec{\jmath})$ et $\varphi = t + \pi$, d'où :
$R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \varepsilon(3\cos^2 t - 1)$ et donc, pour $I(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OI}(t) = \overrightarrow{OM}(t) + R(t)\vec{N}(t)$$

$$\left\{\begin{aligned} x_I(t) &= a(1 + \cos^2 t)\sin t - a(3\cos^2 t - 1)\sin t \\ &= 2a\sin^3 t \\ y_I(t) &= a\sin^2 t\cos t + a(3\cos^2 t - 1)\cos t \\ &= 2a\cos^3 t \end{aligned}\right.$$

I décrit une astroïde de longueur $12a$ (exercice 8).

Index

H PRÉPA TOUT EN UN

Xavier OUDOT et Marie ALLANO-CHEVALIER

La collection **H PRÉPA** propose des ouvrages clairs et complets pour faciliter l'**apprentissage** et la **progression** des étudiants des Classes préparatoires en Mathématiques, Physique et Chimie.

TOUT LE PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE PREMIÈRE ANNÉE MPSI EN UN SEUL OUVRAGE

Dans chaque chapitre vous trouverez :
- un cours progressif, illustré d'exemples et de nombreuses applications ;
- une fiche méthode récapitulant les principaux savoir-faire ;
- un exercice résolu, intégralement corrigé et accompagné de conseils, pour acquérir la méthodologie et les réflexes nécessaires à la résolution des exercices types ;
- de nombreux exercices, avec des indications pour démarrer la résolution et des réponses en fin d'ouvrage plus ou moins détaillées selon la difficulté.

Ce livre est également utile aux étudiants des Licences scientifiques.

14/5659/9
ISBN : 978-2-0118-11-2

www.hachette-education.com

hachette SUPÉRIEUR